Cours d’Analyse 2

Filière : MIP

Auteur : Khalid Boutahir

Établissement : Faculté des Science, Meknès

Année universitaire : 2024-2025

جامعة مولاي إسماعيل
UNIVERSITÉ MOULAY ISMAÏL

كلية العلوم
FACULTÉ DES SCIENCES

Table des matières

Chapitre 1 Formule de Taylor, Développement limité et applications

Motivation

La formule de Taylor et les développements limités sont des outils essentiels en analyse mathématique, motivés par plusieurs besoins, parmi ces besoins on trouve :

- **Approximation des fonctions non polynomiales :** Les fonctions non polynomiales comme e^x, $ln(x)$, $sin(x)$ et $cos(x)$ sont difficiles à manipuler directement. La formule de Taylor permet de les remplacer localement par un polynôme d'ordre n, ce qui simplifie les calculs.
- **Étude locale des fonctions :** Le développement limité donne une approximation précise du comportement d'une fonction autour d'un point. Cela aide à comprendre les propriétés locales, comme les extrema, les points d'inflexion, ou les zéros.
- **Estimation de l'erreur :** Le reste de Taylor (terme d'erreur) permet de quantifier la différence entre la fonction et son approximation.

1.1 Préliminaires

1.1.1 Notation de Landau

Définition 1.1

On dit qu'une fonction f est négligeable (ou « infiniment petit ») devant une fonction g au voisinage de x_0, s'il existe une fonction ε définie sur un voisinage de x_0 telle que : $f(x) = g(x)\varepsilon(x)$ et $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$.
Une façon parmi d'autres de noter que f est négligeable devant g au voisinage de x_0 est d'écrire

$$f \underset{x_0}{=} o(g) \text{ ou } f = o_{x_0}(g),$$

Dans le cas où g ne s'annule pas au voisinage de x_0, on a :

$$f \underset{x_0}{=} o(g) \text{ si et seulement si } \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Il est bien entendu que x_0 peut être un nombre ou l'infini. ♣

Propriété *Dans un voisinage de x_0 fini, on a les propriétés suivantes :*

$$\begin{aligned} o(x^n) + o(x^n) &= o(x^n); \qquad x^p.o(x^n) = o(x^{n+p}) \\ \lambda o(x^n) &= o(x^n); \qquad o(\lambda x^n) = o(x^n) \qquad \lambda \in \mathbb{R} \\ o(x^n).o(x^p) &= o(x^{n+p}); \end{aligned}$$

1.1.2 Fonctions équivalentes

Définition 1.2

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I, sauf éventuellement en x_0, $(x_0 \in \mathrm{I})$. On suppose que $g(x)$ et $f(x)$ ne s'annulent pas sur $\mathrm{I} - \{x_0\}$. On dit que f et g sont équivalentes au voisinage de x_0 s'il existe une fonction h définie sur un voisinage V de x_0 telle que

$$\forall x \in V \setminus \{x_0\}, \quad f(x) = h(x)g(x) \quad \text{et } \lim_{x \to x_0} h(x) = 1.$$

Dans le cas où g ne s'annule pas au voisinage de x_0, alors

$$f \text{ et } g \text{ sont équivalentes au voisinage de } x_0 \iff \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

♣

Notation 1 : Si f et g sont équivalentes au voisinage de x_0 alors on note : $f \underset{x_0}{\sim} g$ ou $f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} g(x)$ ou $f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x)$.

Exemple 1.1 La fonction $\sin x$ est équivalente à x au voisinage de 0, car $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Note *On peut définir de la même manière la notion de fonctions équivalentes au voisinage de ∞.*

$$f \underset{\infty}{\sim} g \quad ou \quad f(x) \underset{x \to \infty}{\sim} g(x).$$

Exemple 1.2 La fonction $g(x) = x^4 - x^2 + 1$ est équivalente à x^4 au voisinage de $+\infty$, car

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^4 - x^2 + 1}{x^4} = 1$$

Propriété

- *Si $f \underset{x_0}{\sim} g$ et $g \underset{x_0}{\sim} h$, alors $f \underset{x_0}{\sim} h$;*
- *Si $f \underset{x_0}{\sim} g$ alors $hf \underset{x_0}{\sim} hg$*
- *Si $f_1 \underset{x_0}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{x_0}{\sim} g_2$ alors $f_1 f_2 \underset{x_0}{\sim} g_1 g_2$ et $\frac{f_1}{f_2} \underset{x_0}{\sim} \frac{g_1}{g_2}$.*

Remarque La relation $\sim$ est une relation d'équivalence, c'est-à-dire que cette relation est réflexive, symétrique et transitive.

Remarque Les équivalents ne s'additionnent pas. Par exemple on a

$$x + x^3 \underset{x \to 0}{\sim} x \quad ; \quad x \underset{x \to 0}{\sim} x - x^2$$

si on soustrait :

$$x + x^3 - x \underset{x \to 0}{\sim} x - (x - x^2)$$

donc $\quad x^3 \underset{x \to 0}{\sim} x^2$ ce qui est impossible ! Calculer $\lim_{x \to 0} \frac{x^3}{x^2}$?

Exemple 1.3 Quelques équivalences usuels au voisinage de 0

$\sin x \sim x,$	$\arcsin x \sim x,$	$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2},$	$\arctan x \sim x$
$\tan x \sim x,$	$e^x - 1 \sim x,$	$\ln(1+x) \sim x,$	$\cosh(x) \sim 1 + \frac{x^2}{2}$

En effet,

- $e^x - 1 \sim x$ car

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^0}{x - 0} = e^0 = 1$$

- $\arcsin x \sim x$ car

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x - \arcsin 0}{x - 0} = \arcsin'(0) = \frac{1}{\sqrt{1 - 0^2}} = 1$$

- Pour la preuve du reste on peut utiliser la règle de L'Hospital.

1.1.3 Applications au calcul des limites

Les équivalences de fonctions permettent de simplifier des expressions complexes et de calculer des limites indéterminées.

Proposition 1.1

Si $\lim_{x \to x_0} g(x) = l$ et $f \underset{x_0}{\sim} g$ alors $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$.

Remarque Lors de la recherche de limites on peut (quand c'est possible) remplacer une fonction par son équivalent avant de passer à la limite.

Exemple 1.4 Calcul de $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x}$:

On sait que $\sin x \underset{0}{\sim} x$, d'où

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x - x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x} = 0$$

Exemple 1.5 Calcul de $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\sin^2 x}$:

Au voisinage de 0, on a les équivalences : $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$ et $\sin x \sim x$ et donc $\sin^2 x \sim x^2$. D'où

$$\frac{1-\cos x}{\sin^2 x} \underset{0}{\sim} \frac{\frac{x^2}{2}}{x^2} = \frac{1}{2}$$

et donc

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\sin^2 x} = \frac{1}{2}$$

Remarque Attention !

1. $x \underset{+\infty}{\sim} x+1$ mais e^x non $\sim e^{x+1}$
2. $1 + x \underset{0}{\sim} 1 - x$ mais $\ln(1+x)$ non $\sim \ln(1-x)$

1.2 Formules de Taylor

Parfois, analyser une fonction peut être très difficile. Une méthode très utile et couramment utilisée pour faciliter ce travail consiste à approximer la fonction en question par des polynômes, car ce sont les fonctions réelles les plus faciles à évaluer. Lorsque nous utilisons cette méthode, nous perdons évidemment en exactitude, mais nous gagnons en opérabilité.

Nous pouvons distinguer deux types d'approximations de fonctions par des polynômes : locales et globales. Les premières sont celles où le polynôme que nous construisons coïncide avec la fonction en un seul point et ne nous servira que pour des valeurs proches, car à mesure que nous nous éloignons, il est probable que le polynôme et la fonction divergent de plus en plus. Les approximations globales, en revanche, sont celles où le polynôme et la fonction coïncident sur tout un intervalle. Nous construirons le polynôme de Taylor, qui est une approximation locale d'une fonction qui coïncide avec toutes ses dérivées.

1.2.1 Rappels et préliminaires

- **Formule de Taylor pour un polynôme** : Rappelons que tout polynôme de degré n

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

peut s'écrire en puissance de $(x-a)$ sous la forme :

$$p(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n$$

Les coefficients c_i sont tels que

$$p(x) = p(a) + \frac{p'(a)}{1!}(x-a) + \frac{p''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{p^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

- Soit f une fonction définie sur un voisinage de a :$]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$. Rappelons que l'approximation linéaire de f au voisinage de a est donnée par :

$$f(x) \underset{a}{\sim} P_1(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$$

- L'approximation quadratique de f au voisinage de a est donnée par :

$$f(x) \underset{a}{\sim} P_2(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2$$

L'objectif dans la suite de cette section est la recherche d'un polynôme $P(x)$ de degré n qui approche le mieux $f(x)$ au voisinage d'un point donné.

Polynôme de Taylor

Définition 1.3

Étant donnée une fonction f dérivable $n-1$ fois dans un intervalle I et un point $a \in I$ où $f^{(n-1)}$ est dérivable,

- *Le polynôme*

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

*est appelé **polynôme de Taylor de degré n de f au point** a.*

- *Dans le cas où $a = 0$ le polynôme*

$$P(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x^1 + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

*est appelé **polynôme de Maclaurin d'ordre n associé à f au point** $x = 0$.* ♣

Exemple 1.6 Le polynôme de Maclaurin de $\ln(1+x)$ à l'ordre n est :

$$p(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n}.$$

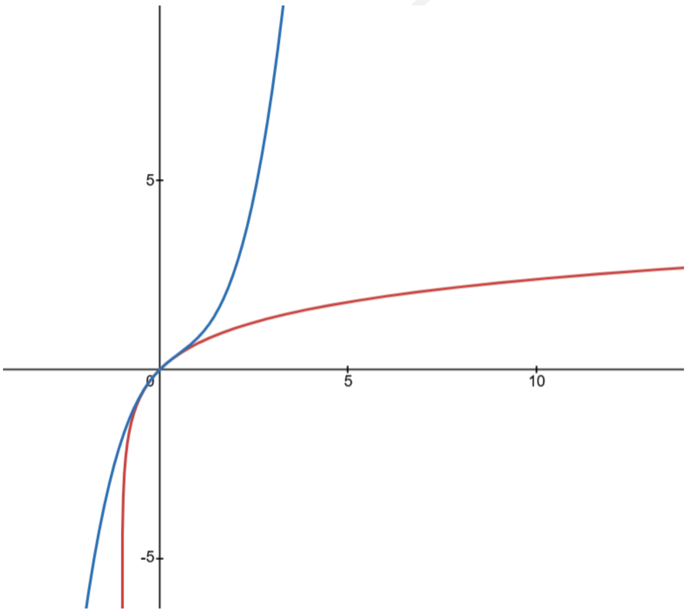

Figure 1.1 – $f(x) = \ln(x+1)$ et son polynôme de Taylor de degré 3 au voisinage de $x = 0$, $P(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$

Définition 1.4

Soit f une fonction n fois dérivable dans un intervalle I et soit $x_0 \in I$. Le reste de Taylor d'ordre n de la fonction f au point x_0 est :

$$R(x) = f(x) - P(x) = f(x) - \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i$$

♣

Remarque Le terme du reste peut également être vu comme l'erreur d'approximation de f par $P(x)$.

1.2.2 Approximation d'une fonction par le polynôme de Taylor

Proposition 1.2 (Existence et unicité du polynôme de Taylor)

Soit f une fonction n fois dérivable au point x_0, alors il existe un unique polynôme $P(x)$ de degré inférieur ou égal à n vérifiant : $P(x_0) = f(x_0)$, $P'(x_0) = f'(x_0)$, ..., $P^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0)$. Ce polynôme est le polynôme de Taylor de degré n de f au point x_0.

Démonstration Comme $\{1, (x-x_0), (x-x_0)^2, \ldots, (x-x_0)^n\}$ est une base de l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n, on peut écrire tout polynôme de degré inférieur ou égal à n de manière unique comme :

$$P(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n$$

Pour montrer qu'il n'existe qu'un seul polynôme vérifiant les conditions de la proposition, on va montrer que les coefficients de $P(x)$ peuvent être déterminés de manière unique en appliquant les conditions mentionnées précédemment. On a $P(x_0) = a_0$ et on veut que $P(x_0) = f(x_0)$, donc $a_0 = f(x_0)$. En calculant la dérivée de $P(x)$, on obtient :

$$P'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + \cdots + na_n(x - x_0)^{n-1}$$

et en appliquant la condition $P'(x_0) = f'(x_0)$, on a $a_1 = f'(x_0)$.

On procède de même pour la deuxième dérivée et on obtient $a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}$.

Successivement, on aura $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$ pour $k = 0, \ldots, n$.

Par conséquent, il existe un unique polynôme vérifiant les conditions qu'on a demandé, et c'est :

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

qui est le polynôme de Taylor de degré n de f au point x_0. □

Note *Ce résultat signifie qu'au voisinage de $x = x_0$, le polynôme de Taylor $P(x)$ d'ordre n est une bonne approximation de la fonction $f(x)$ c-à-d :*

$$f(x) \underset{x_0}{\sim} f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Remarque Les polynômes de Taylor permettent d'approcher beaucoup de fonctions par des fonctions polynômes simples.

1. Si $n = 1$, on retrouve l'approximation linéaire.
2. Si $n = 2$, on retrouve l'approximation quadratique.

Exemple 1.7 Déterminons le polynôme de Taylor d'ordre 4 au voisinage de a $= 0$ associé à $f(x) = e^x$.

D'après la formule de Taylor on a :

$$e^x \underset{0}{\sim} P(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x^1 + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4$$

comme $f'(x) = e^x, f''(x) = e^x, \ldots, f^{(4)}(x) = e^x$, et donc $f'(0) = 1, f''(0) = 1, \ldots, f^{(4)}(0) = 1$, on a :

$$e^x \underset{0}{\sim} P(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}$$

Ci-dessous, sur la même figure, les graphes des fonctions :

- e^x,
- $1 + \frac{x}{1!}$: approximation linéaire,
- $1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!}$: approximation quadratique,
- $1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$: approximation d'ordre 3
- $1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}$: approximation d'ordre 4.

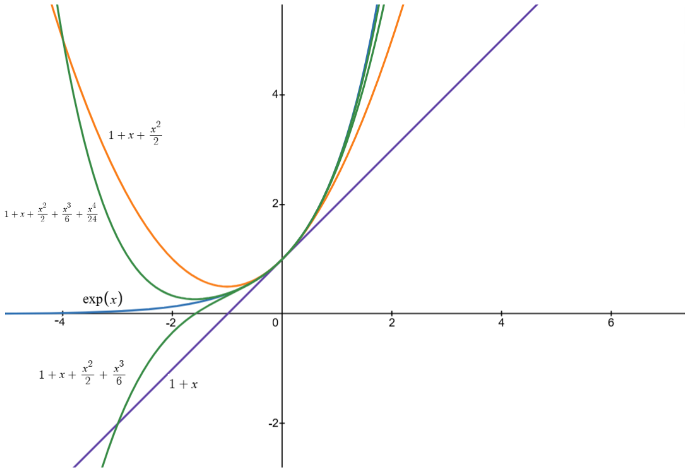

Figure 1.2

Remarquons que les courbes coïncident au voisinage de 0.

Exercice 1.1 Déterminer le polynôme de Taylor d'ordre 3 au voisinage de $a = 0$ associé à $f(x) = \sin x$.

Solution *D'après la formule de Taylor on a :*

$$P(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x^1 + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3$$

Comme

$$\begin{array}{ll} f(x) = \sin x & f(0) = 0 \\ f'(x) = \cos x & f'(0) = 1 \\ f''(x) = -\sin x & f''(0) = 0 \\ f^{(3)}(x) = -\cos x & f^{(3)}(0) = -1 \end{array}$$

On a donc

$$\sin x \underset{a}{\sim} P(x) = x - \frac{x^3}{3!}$$

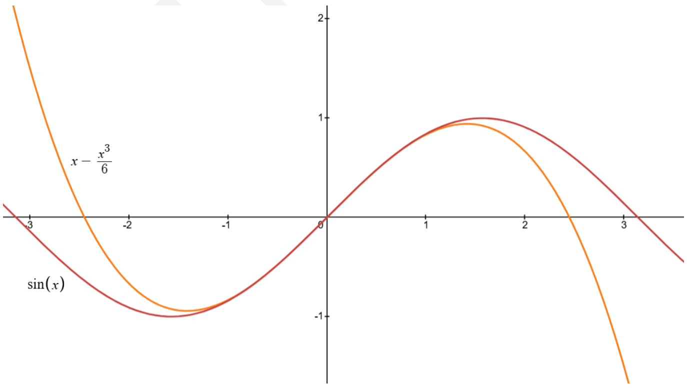

Figure 1.3 – Courbes de $\sin x$ et de $P(x) = x - \frac{x^3}{3!}$

Remarquons que les deux courbes coïncident au voisinage de 0.

Exercice 1.2 Déterminer le polynôme de Taylor d'ordre 4 au voisinage de $a = 0$ associé à $f(x) = \cos x$.

Solution *D'après la formule de Taylor on a :*

$$P(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x^1 + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3$$

Comme

$$\begin{array}{ll} f(x) = \cos x & f(0) = 1 \\ f'(x) = -\sin x & f'(0) = 0 \\ f''(x) = -\cos x & f''(0) = -1 \\ f^{(3)}(x) = \sin x & f^{(3)}(0) = 0 \\ f^{(4)}(x) = \cos x & f^{(4)}(0) = 1 \end{array}$$

On a donc

$$\cos x \underset{0}{\sim} P(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$$

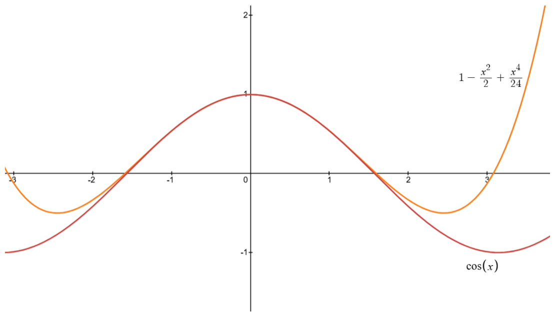

Figure 1.4 – Courbes de $\cos x$ et de $P(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$

Remarquons que les deux courbes coïncident au voisinage de 0*.*

1.2.3 Opérations sur les polynômes de Taylor

Soient f et g deux fonctions de classe $\mathscr{C}^n$. Comment obtenir le polynôme de Taylor de $f+g$, de fg, de $\frac{f}{g}$ et $f \circ g$, à partir de ceux de f et g ?

Proposition 1.3

Soient f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur I, et soit $x_0 \in I$. Soit P (resp. Q) le polynôme de Taylor de f (resp. g) à l'ordre n au point x_0. Alors

1. *Le polynôme de Taylor de $f+g$ à l'ordre n en x_0 est $P+Q$.*
2. *Le polynôme de Taylor de fg à l'ordre n en x_0 est PQ tronqué en degré n.*
3. *Si $g(x_0) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ est de classe $\mathcal{C}^n$ au voisinage de x_0 et le polynôme de Taylor de $\frac{f}{g}$ est le quotient de P par Q selon les puissances croissantes à l'ordre n.*

Démonstration Évidente d'après l'unicité du polynôme de Taylor associé à une fonction. □

Remarque

1. PQ est un polynôme de degré au plus $2n$, son *tronqué en degré* n est le polynôme obtenu en supprimant tous les termes de degré strictement supérieur à n.
2. La *division selon les puissances croissantes* de P par Q à l'ordre n est définie comme suit : si $Q(0) \neq 0$, alors il existe un unique couple (A, B) de polynômes tel que l'on ait

$$P(X) = Q(X)A(X) + X^{n+1}B(X) \quad \text{avec} \quad \deg(A) \leq n$$

On dit que A est le quotient de P par Q selon les puissances croissantes à l'ordre n et que B est le reste.
Cette division, contrairement 'a la division euclidienne des polynômes (que l'on appelle aussi division selon les puissances décroissantes), a pour effet d'augmenter le degré du reste, au lieu de le diminuer. Ainsi, il n'y a pas une seule division selon les puissances croissantes, il y en a une pour chaque ordre n. Plus n augmente, plus le degré du quotient et du reste augmentent.

Exemple 1.8 Le polynôme de Taylor à l'ordre 3 en 0 pour $\sin(x)$ est

$$P(x) = x - \frac{x^3}{6}$$

et pour $\ln(1+x)$
$$Q(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$
d'où l'on déduit :

a) Le polynôme de Taylor à l'ordre 3 en 0 pour la différence est
$$P(x) - Q(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2}$$
b) Le polynôme de Taylor à l'ordre 3 en 0 pour le produit est
$$\begin{aligned} P(x)Q(x) &= \left(x - \frac{x^3}{6}\right)\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right) \\ &= x^2 - \frac{x^3}{2} \end{aligned}$$

Proposition 1.4

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathscr{C}^n$ telles que $f(I) \subseteq J$, et soit $x_0 \in I$. Soit P le polynôme de Taylor de f à l'ordre n au point x_0, et Q le polynôme de Taylor de g à l'ordre n au point $f(x_0)$. Alors le polynôme de Taylor de $g \circ f$ à l'ordre n au point x_0 est le polynôme composé $Q \circ P$ tronqué en degré n.

1.2.4 Formule de Taylor Lagrange

Définition 1.5 (Rappel)

On dit que f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I si f est n-fois dérivable et la dérivée n-ième, $f^{(n)}$, est continue sur I.
On dit que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ si f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I pour tout n.

Théorème 1.1 (Formule de Taylor-Lagrange à l'ordre n)

Soit a et b deux réels tels que $a < b$ et soit f une fonction réelle de classe $\mathscr{C}^n$ sur $[a,b]$ et admettant sur $]a,b[$ une dérivée d'ordre $n+1$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que
$$\begin{aligned} f(b) &= f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f^{(2)}(a) + \cdots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c) \\ &= f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!}f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c) \end{aligned}$$
Le terme $\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$ est appelé le reste de Lagrange d'ordre n.

Remarque Pour $n = 0$, ce théorème est exactement la formule des accroissements finis.

Démonstration Considérons la fonction ϕ définie sur $[a,b]$ par
$$\phi(x) = f(x) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k)}(x)$$
La fonction ϕ est continue sur $[a,b]$, puisque f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur $[a,b]$. Comme f admet une dérivée d'ordre $(n+1)$ sur $]a,b[$, la fonction ϕ est dérivable sur $]a,b[$. De plus pour tout $x \in]a,b[$, on a
$$\begin{aligned} \phi'(x) &= f'(x) + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{-k(b-x)^{k-1}}{k!}f^{(k)}(x) + \frac{(b-x)^k}{k!}f^{(k+1)}(x)\right) \\ &= f'(x) + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{-(b-x)^{k-1}}{(k-1)!}f^{(k)}(x) + \frac{(b-x)^k}{k!}f^{(k+1)}(x)\right) \\ &= \frac{(b-x)^n}{n!}f^{(n+1)}(x) \end{aligned}$$
Posons $\psi(x) = \frac{-(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}$. La fonction ψ est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Donc, d'après le

théorème des accroissements finis généralisés, il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$\frac{\phi(b)-\phi(a)}{\psi(b)-\psi(a)} = \frac{\phi'(c)}{\psi'(c)}$$

.

Or $\phi'(c) = \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x)\psi'(x)$, on obtient donc

$$\frac{\phi(b)-\phi(a)}{\psi(b)-\psi(a)} = \frac{\phi'(c)}{\psi'(c)} f^{(n+1)}(c).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\phi(b)-\phi(a) &= (\psi(b)-\psi(a))\, f^{(n+1)}(c)\\ &= \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)\end{aligned}$$

ce qui montre que

$$f(b) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c).$$

□

Note *Un tel nombre c est souvent désigné par $a + \theta(b-a)$ avec $\theta \in]0, 1[$.*

Cas particulier : Lorsque $a = 0$, et en posant $b = x$, on obtient la formule dite de **Mac-Laurin** :

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x) \quad (0 < \theta < 1).$$

Exemple 1.9

- La fonction $x \longmapsto f(x) = \exp(x)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et l'on a $f^{(k)}(x) = \exp(x)$ pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$. Donc pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, il existe un nombre réel c entre 0 et x tel que

$$\exp(x) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \exp(c)$$

- La fonction $x \longmapsto f(x) = \sin(x)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et l'on a $f^{(k)}(x) = \sin\left(x + \frac{k\pi}{2}\right)$ pour tous $k \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, et pour $x = 0$, on a $f^{(k)}(0) = \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)$, donc,

$$f^{(2k)}(0) = \sin^{(2k)}(0) = \sin(2k\pi/2) = 0$$

et

$$f^{(2k+1)}(0) = \sin^{(2k+1)}(0) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = \cos(k\pi) = (-1)^k$$

et

$$\sin\left(c + \frac{(2k+2)\pi}{2}\right) = (-1)^{k+1} \sin(c).$$

Par conséquent, pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ avec $n = 2p+1$, il existe un nombre réel c entre 0 et x tel que

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + (-1)^{p+1} \frac{x^{2p+2} \sin(c)}{(2p+2)!}$$

- De même pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ avec $n = 2p$, il existe un nombre réel c entre 0 et x tel que

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + (-1)^{p+1} \frac{x^{2p+1} \cos(c)}{(2p+1)!}$$

1.2.5 Formule de Taylor-Young

Théorème 1.2

Soit $f \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ et soit $a \in I$. Alors il existe une fonction réelle ε définie sur un voisinage de a telle que

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + (x-a)^n \varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$$

- *Partie principale :*

$$f(a) + (x-a)f'(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a)$$

- *Reste de Young :*

$$o((x-a)^n) = (x-a)^n \varepsilon(x) \quad \text{avec } \lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$$

♡

Cas particulier : Pour $a = 0$, on obtient la formule de **Mac-Laurin avec reste de Young**

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + x^n \varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$$

Exemple 1.10 En prenant $a = 0$ dans la formule de Taylor avec reste Young on obtient les formules suivantes :

1. $\exp(x) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!} + x^n \varepsilon(x)$.
2. $\cosh(x) = 1 + \sum_{k=1}^{p} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + x^{2p+1} \varepsilon(x)$.
3. $\sinh = \sum_{k=0}^{p} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + x^{2p+2} \varepsilon(x)$.
4. $\sin(x) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + x^{2p+2} \varepsilon(x)$.
5. $\cos(x) = 1 + \sum_{k=1}^{p} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + x^{2p+1} \varepsilon(x)$.

1.2.6 Applications

Extremums relatifs de fonctions

Soit f une fonction $n-1$ fois dérivable dans un intervalle I et soit $x_0 \in I$. Supposons également que f est n fois dérivable en x_0 avec $f^{(k)}(x_0) = 0$ pour $0 \leq k < n$ et $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Alors, le polynôme de Taylor de f au voisinage de x_0 est :

$$P(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

et

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^n} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

On peut observer que, puisque $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, lorsque x est très proche de x_0, le signe de $f(x) - f(x_0)$ dépend de la parité de n et du signe de $f^{(n)}(x_0)$. Formellement, nous dirions qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $[a - \varepsilon, a + \varepsilon]$ est inclus dans I et

$$|x - x_0| < \varepsilon \Rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^n} f^{(n)}(x_0) \geq 0$$

Par conséquent, nous avons trois cas possibles :

a) Si n est pair et $f^{(n)}(x_0) > 0$, alors $\forall x \in [a - \varepsilon, a + \varepsilon]$, $f(x) \geq f(x_0)$ et f a un minimum relatif en x_0.
b) Si n est pair et $f^{(n)}(x_0) < 0$, alors $\forall x \in [a - \varepsilon, a + \varepsilon]$, $f(x) \leq f(x_0)$ et f a un maximum relatif en x_0.
c) Si n est impair, alors f n'a aucun extremum relatif en x_0. Si $f^{(n)}(x_0) > 0$, f est strictement croissante en x_0. Mais si $f^{(n)}(x_0) < 0$, f est strictement décroissante en x_0.

Proposition 1.5

Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction indéfiniment dérivable et $x_0 \in I$, et soit n le plus petit entier non nul tel que $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Alors on a :

*(a) Si n est pair et $f^{(n)}(x_0) < 0$, alors f admet un **maximum relatif** au point x_0.*

*(b) Si n est pair et $f^{(n)}(x_0) > 0$, alors f admet un **minimum relatif** au point x_0.*

(c) Si n est impair, alors f n'admet pas d'extremum relatif au point x_0.

Allure d'une courbe au voisinage d'un point

Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction indéfiniment dérivable et $x_0 \in I$. On se propose d'étudier la position de la courbe C_f par rapport à la tangente T_{x_0} à cette courbe au point x_0. l'équation de T_{x_0} est donné par :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Soit n le plus petit entier supérieur ou égal à 2 tel que $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. On a alors 4 cas :

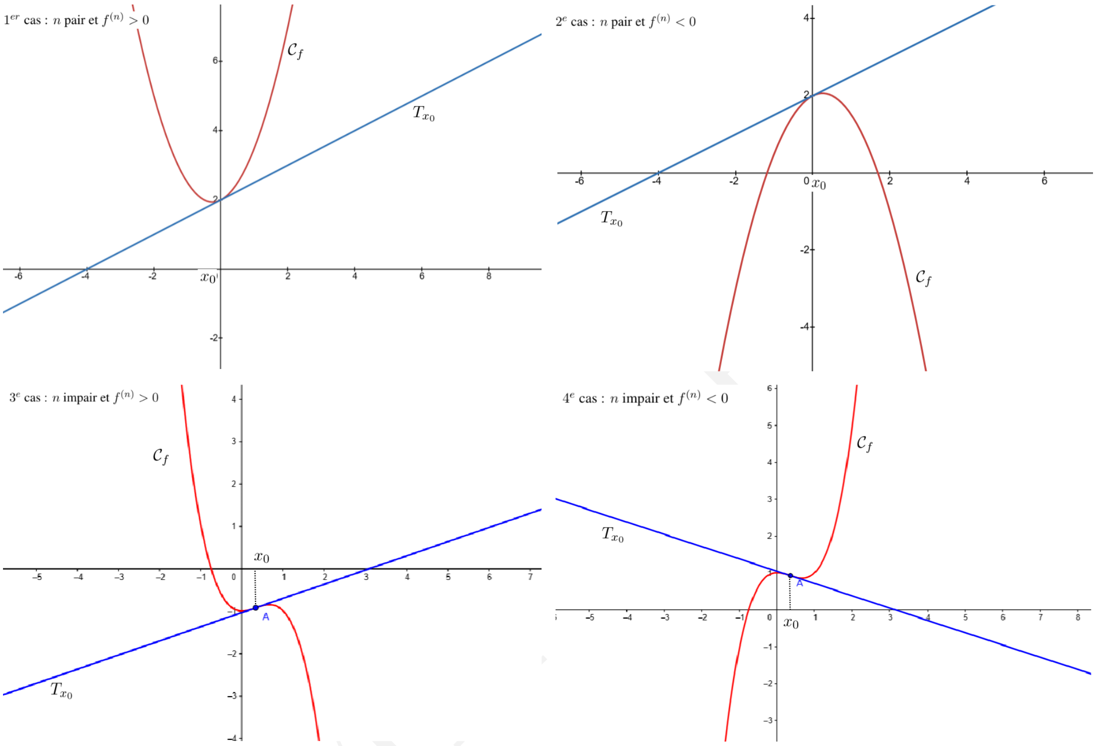

Figure 1.5

1.3 Développements limités d'une fonction

1.3.1 Développements limités

Un développement limité est une approximation polynomiale d'une fonction au voisinage d'un point x_0, (développement limité en x_0).

Définition 1.6 (Développement limité)

*Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I et soit $x_0 \in I$. On dit que f admet un **développement limité** au voisinage de x_0 à l'ordre n, (qu'on note $DL_n(x_0)$), s'il existe $n+1$ réels $a_0, a_1, \ldots, a_n$ et une fonction ε définie sur I tels que pour tout $x \in I$*

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$$

- *$P_n = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n$ est la **partie régulière** (ou **partie principale**) de f,*

- $o((x-x_0)^n) = (x-x_0)^n\varepsilon(x)$ *avec* $\lim\limits_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$ *est le* ***reste*** *à l'ordre* n.

Autre formulation : *en posant* $h = x - x_0$,

$$f(x_0 + h) = a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + \cdots + a_n h^n + o(h^n).$$

On peut également définir des développements limités à droite et à gauche en x_0.

Remarque

1. Si $x_0 = 0$ le DL au voisinage de 0 s'écrit : $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n) = P_n(x) + o(x^n)$.
2. La notion du DL en x_0 à l'ordre n permet d'approcher une fonction par un polynôme de degré au plus n.

Proposition 1.6

Si f admet un DL à l'ordre n au voisinage de x_0, *c-à-d,* $f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + \cdots + a_n(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)$, *alors les coefficients* a_i *sont uniques,*

Démonstration Par identification. □

Proposition 1.7

Si f *est une fonction paire (resp. impaire) qui possède un développement limité à l'ordre* n *en 0, alors la partie principale ne contient que des puissances paires (resp. impaires) de la variable* x. *C-à-d, si*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n),$$

alors

1. *si en plus* f *est paire, alors* $a_1 = a_3 = \cdots = a_{2k+1} = \cdots = 0$,
2. *si en plus* f *est impaire, alors* $a_0 = a_2 = \cdots = a_{2k} = \cdots = 0$.

Démonstration En effet, soit $f(x) = P(x) + x^n\varepsilon(x)$ le développement limité de f à l'ordre n en 0.

- Si f est paire : Posons $\phi(x) = f(x) - f(-x)$, on a : $\phi(x) = P(x) - P(-x) + x^n\varepsilon(x) - (-1)^n x^n \varepsilon(-x)$. Soit $Q(x) = P(x) - P(-x)$ et $\varepsilon_1(x) = \varepsilon(x) - (-1)^n\varepsilon(-x)$

$$\phi(x) = Q(x) + x^n\varepsilon_1(x), \quad \text{avec } \deg Q \le n \text{ et } \lim_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = 0, \tag{1.1}$$

(1.1) est donc le développement limité de ϕ à l'ordre n en 0, mais comme $\phi = 0$ on a aussi $\phi(x) = 0 + x^n \times 0$, on actionne le théorème d'unicité : $Q = 0$ et donc le polynôme P est pair, et par suite $a_1 = a_3 = \ldots = a_{2k+1} = 0$
- Si f est impaire : De la même façon que le premier cas.

□

Proposition 1.8

Si f *admet un développement limité à l'ordre* n *alors* f *admet un DL à l'ordre* m *pour tout* $m \le n$.

Démonstration Évident. □

Remarque Si f est un polynôme, f admet un DL à l'ordre n (pour tout $n \in \mathbb{N}$).

Exemple 1.11 Soit $f(x) = 1 + 2x + 7x^5$

1. DL à l'ordre 4 : $f(x) = 1 + 2x + o(x^4)$
2. DL à l'ordre 9 : $f(x) = 1 + 2x + 7x^5 + o(x^9)$

Théorème 1.3 (Taylor-Young)

Si f *est* n *fois dérivable au voisinage de* x_0, *alors :*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)$$

Autre formulation : *En posant $h = x - x_0$,*

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n + o(h^n)$$

♡

Théorème 1.4 (Maclaurin)

Si f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur $]-\alpha,\alpha[$ alors :

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + x^n\frac{f^{(n)}(0)}{n!} + o(x^n)$$

♡

Remarque La formule de Taylor (resp. la formule de Maclaurin) donne un procédé commode pour obtenir le DL en x_0 (respectivement en 0) des fonctions usuelles.

1.3.2 Développements limités des fonctions usuelles

DL de $f(x) = e^x$ au voisinage de 0

On sait que $f^{(n)}(x) = e^x$ ce qui donne $f^{(n)}(0) = 1$. D'où le DL de e^x à l'ordre n :

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + o(x^n)$$

DL de $\sin x$ et $\cos x$ au voisinage de 0

- DL de $f(x) = \sin x$:

$$f^{(n)}(x) = \sin(x + n\frac{\pi}{2}), \quad \text{donc} \quad f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 \text{ si } n = 2p \\ (-1)^p \text{ si } n = 2p+1 \end{cases}$$

d'où

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^p\frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(x^{2p+1})$$

- DL de $g(x) = \cos x$:
De la même manière que ci-dessus, on obtient

$$g^{(n)}(x) = \cos(x + n\frac{\pi}{2}), \quad \text{donc} \quad g^{(n)}(0) = \begin{cases} (-1)^p \text{ si } n = 2p \\ 0 \text{ si } n = 2p+1 \end{cases}$$

d'où

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^p\frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p})$$

DL de $(1+x)^\alpha$ au voisinage de 0

En prenant $f(x) = (1+x)^\alpha, \quad (\alpha \in \mathbb{Q})$ on a

$$\begin{array}{ll}
f(x) = (1+x)^\alpha, & f(0) = 1 \\
f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}, & f'(0) = \alpha \\
f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}, & f''(0) = \alpha(\alpha-1) \\
\vdots & \\
f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-(n-1))(1+x)^{\alpha-n}, & f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-(n-1))
\end{array}$$

d'où

$$
\begin{aligned}
(1+x)^{\alpha} &= 1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-(n-1))}{n!}x^n+o(x^n)\\
&= 1+\binom{\alpha}{1}x+\binom{\alpha}{2}x^2+\cdots+\binom{\alpha}{n}x^n+o(x^n)
\end{aligned}
$$

Cas particuliers

- Si $\alpha=-1$

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n+o(x^n)$$

- En remplaçant x par $-x$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+o(x^n)$$

- Si $\alpha=2$, $n\geq 2$:

$$(1+x)^2=1+2x+x^2+o(x^2)$$

Autres développements limités usuels Au voisinage de 0

$$
\begin{aligned}
\arctan x &= x-\tfrac{x^3}{3}+\tfrac{x^5}{5}+\cdots+(-1)^n\tfrac{x^{2n+1}}{2n+1}+o\left(x^{2n+2}\right)\\
\arcsin x &= x+\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{x^3}{3}+\tfrac{1.3}{2.4}\cdot\tfrac{x^5}{5}+\cdots+\tfrac{1.3.5\cdots(2n-1)}{2.4\cdot 6\ldots(2n)}\tfrac{x^{2n+1}}{2n+1}+o\left(x^{2n+2}\right)\\
\ln(1+x) &= x-\tfrac{x^2}{2}+\tfrac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\tfrac{x^n}{n}+o\left(x^n\right)\\
\sinh x &= x+\tfrac{x^3}{3!}+\tfrac{x^5}{5!}+\cdots+\tfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o\left(x^{2n+2}\right)\\
\cosh x &= 1+\tfrac{x^2}{2!}+\tfrac{x^4}{4!}+\cdots+\tfrac{x^{2n}}{(2n)!}+o\left(x^{2n+1}\right)\\
\arg\sinh x &= x-\tfrac{1}{2}\tfrac{x^3}{3}+\tfrac{1.3}{2.4}\tfrac{x^5}{5}+\cdots+(-1)^n\tfrac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)}\tfrac{x^{2n+1}}{2n+1}+o\left(x^{2n+2}\right)\\
\arg\tanh x &= x+\tfrac{x^3}{3}+\tfrac{x^5}{5}+\cdots+\tfrac{x^{2n+1}}{2n+1}+o\left(x^{2n+2}\right)\\
\tanh x & \; x-\tfrac{x^3}{3}+\tfrac{2x^5}{15}+o\left(x^6\right)
\end{aligned}
$$

1.3.3 Opérations sur les développements limités

Proposition 1.9 (Dérivation des développements limités)

Soit f une fonction indéfiniment dérivable sur un intervalle ouvert I contenant a. Alors, si f admet au voisinage de a un développement limité d'ordre n, $\forall n\in\mathbb{N}$, $f(a+h)=\sum_{k=0}^{n} b_k h^k+\underset{h\to 0}{o}(h^n)$, alors

$$f'(a+h)=\sum_{k=1}^{n} k b_k h^{k-1}+\underset{h\to 0}{o}\left(h^{n-1}\right).$$

Proposition 1.10 (Intégration des développements limités)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I contenant a, dont la dérivée admet un développement limité d'ordre n, soit :

$$f'(t)=b_0+b_1(t-a)+\cdots+b_n(t-a)^n+o\left((t-a)^n\right).$$

Alors f admet, au voisinage de a, le développement limité d'ordre $n+1$ suivant :

$$f(t)=f(a)+b_0(t-a)+b_1\frac{(t-a)^2}{2}+\cdots+b_n\frac{(t-a)^{n+1}}{n+1}+o\left((t-a)^{n+1}\right).$$

Exemple 1.12 Chercher le DL de $f(x)=\ln(1+x)$ au voisinage de 0 à l'ordre $(n+1)$.

Donnons d'abord le DL de $\frac{1}{1+x}$ à l'ordre n

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o\left(x^n\right)$$

en intégrant des deux côtés, on obtient

$$\ln(1+x) = f(0) + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o\left(x^{n+1}\right)$$

or $f(0) = \ln(1+0) = 0$ d'où

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o\left(x^{n+1}\right)$$

Exemple 1.13 DL de $\arcsin x$ à l'ordre n :

$$\begin{aligned}(1-u)^{-\frac{1}{2}} =&1 + \left(-\frac{1}{2}\right)(-u) + \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)(-u)^2 + \cdots \\ &+ \frac{1}{n!}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2n-1}{2}\right)(-u)^n + o\left(u^n\right) \\ =&1 + \frac{1}{2}u + \frac{1.3}{2.4}u^2 + \cdots + \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots(2n)}u^n + o\left(u^n\right)\end{aligned}$$

On remplace u par x^2 et on intègre pour obtenir le développement limité de $\arcsin x$ au voisinage de 0 .

Proposition 1.11 (Addition)

Si f et g admettent un développement limité au voisinage de 0, à l'ordre n, alors $(f+g)$ admet aussi un développement limité au voisinage de 0, à l'ordre n, et ce DL s'obtient en additionnant les deux polynômes, c-à-d, si

$$f(x) = p_n(x) + o\left(x^n\right) \quad \text{et} \quad g(x) = q_n(x) + o\left(x^n\right)$$

alors

$$(f+g)(x) = \left[p_n(x) + q_n(x)\right] + o\left(x^n\right)$$

♠

Exemple 1.14

- DL de $\cosh x$ au voisinage de 0. Notons que
$$2\cosh x = e^x + e^{-x} = f(x) + g(x)$$
$$\begin{aligned} e^x &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o\left(x^n\right) \\ e^{-x} &= 1 + \frac{-x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^n}{n!} + o\left(x^n\right)\end{aligned}$$
donc
$$2\cosh x = e^x + e^{-x} = 2 + 2\frac{x^2}{2!} + \cdots + 2\frac{x^{2p}}{(2p)!} + o\left(x^{2p}\right)$$
d'où
$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o\left(x^{2p}\right)$$
- DL de $\sinh x$ au voisinage de 0. De la même manière que ci-dessus, on obtient :

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o\left(x^{2p+1}\right)$$

Proposition 1.12 (Multiplication)

Si f et g admettent un développement limité au voisinage de 0, à l'ordre n, alors fg admet aussi un développement limité au voisinage de 0, à l'ordre n. Il s'obtient en multipliant les deux polynômes et en ne gardant que les termes de degré inférieur ou égal à n, c-à-d, si

$$f(x) = p_n(x) + o\left(x^n\right) \qquad \textit{et} \qquad g(x) = q_n(x) + o\left(x^n\right)$$

alors

$$(f \cdot g)(x) = [p_n(x) \cdot q_n(x)] + o\left(x^n\right).$$

Exemple 1.15 Cherchons le DL à d'ordre 4 au voisinage de 0 de $f(x) = \frac{e^x}{1+x}$.

On a $f(x) = e^x \cdot \frac{1}{1+x}$. Ainsi le DL de $f(x)$ s'obtient à partir des DL de e^x et de $\frac{1}{1+x}$.

On a

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + o\left(x^4\right) \\ \frac{1}{1+x} &= 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + o\left(x^4\right) \end{aligned}$$

donc

$$e^x \cdot \frac{1}{1+x} = \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}\right)\left(1 - x + x^2 - x^3 + x^4\right) + o\left(x^4\right)$$

On fait le produit des deux polynômes ci-dessus et on ne garde que les termes de puissance ≤ 4. D'où

$$\frac{e^x}{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{8}x^4 + o\left(x^4\right)$$

Proposition 1.13 (Division)

Soient f et g deux fonctions admettant des développements limités au voisinage de 0, à l'ordre n :

$$f(x) = P(x) + o\left(x^n\right) \qquad \textit{et} \qquad g(x) = Q(x) + o\left(x^n\right)$$

On suppose $Q(0) \neq 0$, $(g(0) \neq 0)$. Alors $\frac{f}{g}$ admet aussi un DL au voisinage de 0, à l'ordre n, et il s'obtient en effectuant la division selon les puissances croissantes, à l'ordre n, de P par Q.

Exemple 1.16

1. Calculons le développement limité d'ordre 6 de la fonction $x \longmapsto \tan(x)$ au voisinage de 0.
   Cette fonction étant impaire, donc il suffit de chercher son développement limité d'ordre 5. On a

$$\begin{aligned} \sin(x) &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o\left(x^5\right) \\ \cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o\left(x^5\right) \end{aligned}$$

   La division suivant les puissances croissantes jusqu'à l'ordre 5 de $x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$ par $1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$:

$$\begin{array}{r|l} x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} & 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \\ \hline x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{24} & x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} \\ \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30} & \\ \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{6} & \\ \frac{2x^5}{15} & \end{array}$$

ce qui donne

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^2}{15} + o\left(x^5\right)$$

2. De la même façon on trouve le DL de $f(x) = \frac{e^x}{\cos x}$ à l'ordre 2 au voisinage de 0. On a

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + o\left(x^2\right)$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)$$

En utilisant la division suivant les puissance croissantes on trouve :

$$\frac{e^x}{\cos x} = 1 + x + x^2 + o\left(x^2\right)$$

Exemple 1.17 DL de $f(x) = (1+x)^{-1} = \frac{1}{1+x}$ à l'ordre n au voisinage de 0.

La division suivant les puissance croissantes du DL de 1 par celui de $1+x$ à l'ordre n donne

$$(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o\left(x^n\right)$$

Proposition 1.14 (Composée de fonctions)

Soient f et g deux fonctions admettant des développements limités au voisinage de 0 à l'ordre n :

$$f(x) = P(x) + o\left(x^n\right), \quad \text{et} \quad g(x) = Q(x) + o\left(x^n\right) \quad \text{avec } g(0) = Q(0) = 0$$

Alors, $f \circ g$ admet un DL à l'ordre n au voisinage de 0, obtenu en prenant les monômes de $P(Q(x))$ de degré inférieur ou égal à n.

Exemple 1.18

1. Cherchons le DL au voisinage de 0, à l'ordre 3, de $f(x) = e^{\sin x}$.

   On sait que

$$\sin x = \left(x - \frac{x^3}{6}\right) + o\left(x^3\right) \quad \text{et} \quad e^y = 1 + \frac{y}{1!} + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + o\left(y^3\right)$$

donc

$$e^{\sin x} = 1 + \underbrace{(x - \frac{x^3}{6})}_{y} + \frac{1}{2!}\underbrace{(x - \frac{x^3}{6})}_{y}^2 + \frac{1}{3!}\underbrace{(x - \frac{x^3}{6})}_{y}^3 + o\left(x^3\right)$$

On ne garde que les termes de degré ≤ 3, d'où

$$e^{\sin x} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o\left(x^3\right)$$

2. Déterminons le développement limité d'ordre 5 de la fonction $x \longmapsto \frac{1}{1-(\sinh(x))^2}$ au voisinage de 0, on a

$$\sinh(x) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o\left(x^5\right) \quad \text{et} \quad \frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + o\left(x^5\right),$$

et comme $\sinh(0) = 0$ donc $x \longmapsto \frac{1}{1-(\sinh(x))^2}$ possède un développement limité d'ordre 5 au voisinage de 0, et la partie principale de ce développement de cette fonction s'obtient en conservant que les termes d'ordre ≤ 5 de

$$1 + \left(x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right)^2 + \left(x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right)^4,$$

par conséquent,

$$\frac{1}{1-(\sinh(x))^2} = 1 + x^2 + \frac{7x^4}{6} + o\left(x^5\right).$$

1.3.4 Développements limités au voisinage de a

Exemple 1.19 Développement limité de $x \longmapsto \sin x$ au voisinage de $x = a$ à l'ordre 3.

Ce DL peut être obtenu de deux manières différentes :

Méthode 1 : En se ramène au voisinage de 0 , en écrivant

$$\sin x = \sin(x-a+a) = \sin a \cos(x-a) + \cos a \sin(x-a)$$

on s'est ramené donc à chercher le DL de $\cos y$ et $\sin y$, avec $y = x - a$, au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned} \sin y &= y - \frac{y^3}{3!} + o\left(y^3\right) = (x-a) - \frac{(x-a)^3}{3!} + o\left((x-a)^3\right) \\ \cos y &= 1 - \frac{y^2}{2!} + o\left(y^3\right) = 1 - \frac{(x-a)^2}{2!} + o\left((x-a)^3\right) \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \sin x &= \sin a \left[1 - \frac{(x-a)^2}{2!} + o\left((x-a)^3\right)\right] + \cos a \left[(x-a) - \frac{(x-a)^3}{3!}\right] \\ &= \sin a + \cos a \cdot (x-a) - \frac{\sin a}{2!}(x-a)^2 - \frac{\cos a}{3!}(x-a)^3 + o\left((x-a)^3\right) \end{aligned}$$

Méthode 2 : En appliquant la formule de Taylor

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + x^3\frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + o\left((x-a)^3\right)$$

on a donc

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x & f(a) &= \sin a \\ f'(x) &= \cos x & f'(a) &= \cos a \\ f''(x) &= -\sin x & f''(a) &= -\sin a \\ f^{(3)}(x) &= -\cos x & f^{(3)}(a) &= -\cos a \end{aligned}$$

et on obtient le même résultat qu'avec la méthode 1.

Exemple 1.20 Déterminons le développement limité de $x \longmapsto e^x$ au voisinage de $x = a$ à l'ordre 3.

Ce DL peut être obtenu donc de deux manières :

Méthode 1 : En se ramène au voisinage de 0 , en écrivant

$$e^x = e^{x-a+a} = e^{x-a} \cdot e^a$$

Noter que quand x est voisin a, le réel $y = x - a$ est voisin de 0 . On se ramène donc à chercher le DL de e^y, avec $y = x - a$, au voisinage de 0 :

$$e^y = 1 + \frac{y}{1!} + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + o\left(x^2\right)$$

donc

$$e^{x-a} = 1 + \frac{x-a}{1!} + \frac{(x-a)^2}{2!} + \frac{(x-a)^3}{3!} + o\left((x-a)^3\right)$$

d'où

$$\begin{aligned}e^x = e^a \cdot e^{x-a} &= e^a \left[1 + \frac{x-a}{1!} + \frac{(x-a)^2}{2!} + \frac{(x-a)^3}{3!} + o\left((x-a)^3\right)\right] \\ &= e^a + \frac{e^a}{1!}(x-a) + \frac{e^a}{2!}(x-a)^2 + \frac{e^a}{3!}(x-a)^3 + o\left((x-a)^3\right)\end{aligned}$$

Méthode 2 : En appliquant la formule de Taylor

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + x^3\frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + o\left((x-a)^3\right)$$

on a

$$\begin{array}{ll} f(x) = e^x & f(a) = e^a \\ f'(x) = e^x & f'(a) = e^a \\ f^{(2)}(x) = e^x & f^{(2)}(a) = e^a \\ f^{(3)}(x) = e^x & f^{(3)}(a) = e^a \end{array}$$

D'où

$$e^x = e^a + \frac{e^a}{1!}(x-a) + \frac{e^a}{2!}(x-a)^2 + \frac{e^a}{3!}(x-a)^3 + o\left((x-a)^3\right)$$

1.3.5 Développement au voisinage de l' ∞

Définition 1.7

Soit f une fonction définie sur $[a, +\infty[$ ou $]-\infty, a]$. On dit que la fonction f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de l'∞ si $g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ admet un développement limité d'ordre n à droite (resp. à gauche) en 0. Dans ce cas :

$$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \cdots + \frac{a_n}{x^n} + \frac{1}{x^n}\varepsilon(\frac{1}{x})$$

avec $\lim\limits_{x\to+\infty} \varepsilon(\frac{1}{x}) = 0$ (resp. $\lim\limits_{x\to-\infty} \varepsilon(\frac{1}{x}) = 0$). ♣

Exemple 1.21 Cherchons le DL à l'ordre 4 de $f(x) = \frac{x}{1+x}$ au voisinage de l'infini.

Effectuons le changement de variable : $X = \frac{1}{x}$ (quant x est voisin de l'∞ X est voisin de 0)

$$f(x) = f\left(\frac{1}{X}\right) = \frac{\frac{1}{X}}{1+\frac{1}{X}} = \frac{1}{1+X} = 1 - X + X^2 - X^3 + X^4 + o\left(X^4\right)$$

d'où

$$f(x) = 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to\infty} \varepsilon\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

1.3.6 Développement limité généralisé ou asymptotique

Définition 1.8

Soit $f : \mathcal{D}_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction réelle.

1. *On dit que f admet un **développement limité généralisé** (ou **développement asymptotique**) en un point $x_0 \in \mathbb{R}$ à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ si :*

$$f(x) = \frac{b_p}{(x-x_0)^p} + \frac{b_{p-1}}{(x-x_0)^{p-1}} + \cdots + \frac{b_1}{x-x_0} + a_0 + a_1(x-x_0) + \cdots + a_n(x-x_0)^n + o\left((x-x_0)^n\right)$$

au voisinage de x_0. On parle aussi de développements limités généralisés à droite et à gauche de x_0.

2. *Si $\mathcal{D}_f$ contient un intervalle $]a, +\infty[$, on dit que f admet un développement généralisé en $+\infty$ à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ si*

$$f(x) = b_p x^p + b_{p-1} x^{p-1} + \cdots + b_1 x + a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots + \frac{a_n}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right)$$

au voisinage de $+\infty$ (c'est à dire pour x assez grand). On a la définition analogue au voisinage de $-\infty$. ♣

Remarque

1. Pour obtenir un développement limité (généralisé ou non), on pose $x = x_0 + h$, en utilisant les développements limités classiques quand h tend vers 0.
2. Pour obtenir un développement limité généralisé au voisinage de l'infini, on pose $X = \frac{1}{x}$, et on utilise les développements limités classiques quand X tend vers 0.
3. Dans les deux cas, le résultat final doit être exprimé en la variable x (c'est à dire à l'aide de puissances positives ou négatives de $(x - x_0)$ dans le premier cas, et à l'aide de puissances positives ou négatives de x dans le deuxième cas).

1.3.7 Applications des développements limités

A. Recherche d'équivalent à l'aide du DL :

Proposition 1.15

Si f admet un DL au voisinage de 0 tel que :

$$f(x) = a_k x^k + o\left(x^k\right) \quad \text{et} \quad a_k \neq 0$$

alors

$$f(x) \underset{0}{\sim} a_k x^k$$

♠

Exemple 1.22

(a). La fonction $e^x - 1 - x \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2}$ car $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)$ et donc $e^x - 1 - x = \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)$ d'où

$$e^x - 1 - x \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2}$$

(b). La fonction $\sin x - x \underset{0}{\sim} -\frac{x^3}{6}$. En effet, $\sin x = \left(x - \frac{x^3}{6}\right) + o\left(x^3\right)$, donc $\sin x - x = -\frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)$ d'où le résultat.

B. Recherche des limites à l'aide du DL :

Exemple 1.23 Calculons $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos(x^2) - \cosh(x^2)}{x^4}$:

Cette forme est indéterminée $0/0$. Utilisons les DL :

$$\cos(u) = 1 - \frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{24} - \frac{u^6}{720} + o(u^8)$$

et

$$\cosh(u) = 1 + \frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{24} + \frac{u^6}{720} + o(u^8).$$

Pour $u = x^2$: on trouve

$$\cos(x^2) = 1 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^8}{24} - \frac{x^{12}}{720} + o(x^{16})$$

et

$$\cosh(x^2) = 1 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^8}{24} + \frac{x^{12}}{720} + o(x^{16})$$

donc

$$\cos(x^2)-\cosh(x^2)=\left(1-\frac{x^4}{2}+\frac{x^8}{24}-\frac{x^{12}}{720}+o(x^{16})\right)-\left(1+\frac{x^4}{2}+\frac{x^8}{24}+\frac{x^{12}}{720}+o(x^{16})\right)$$

$$\cos(x^2)-\cosh(x^2)=-x^4-\frac{x^{12}}{360}+o(x^{16})$$

$$\frac{\cos(x^2)-\cosh(x^2)}{x^4}=\frac{-x^4-\frac{x^{12}}{360}+o(x^{16})}{x^4}=-1-\frac{x^8}{360}+o(x^{12})$$

D'où

$$\lim_{x\to 0}\left(-1-\frac{x^8}{360}+o(x^{12})\right)=-1$$

car $\frac{x^8}{360}\to 0$ et $o(x^{12})\to 0$.

Exemple 1.24 Calculons $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan(x)-x-\frac{x^3}{3}}{x^5}$:
Le développement limité d'ordre 5 de la fonction tan au voisinage de 0 donne

$$\tan(x)=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+x^5\varepsilon(x,)\quad \text{avec } \lim_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$$

donc

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(x)-x-\frac{x^3}{3}}{x^5}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{15}+\varepsilon(x)\right)=\frac{2}{15}.$$

Exemple 1.25 Calculons $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{\arctan x-x}$ (Forme indéterminée)
On commence par la recherche d'équivalents

$$\sin x=x-\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)\quad \text{et}\quad \arctan x=x-\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right)$$

d'où

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{\arctan x-x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^3}{6}}{-\frac{x^3}{3}}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

Remarquez qu'on a fait un DL à l'ordre 3 car si on le fait à l'ordre 1 ou 2 on aura une forme indéterminée.

Exemple 1.26 Calculons $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\sin x-1}{2\cos x-3}$:
Remarquons qu'on est pas au voisinage de 0. On se ramène au voisinage de 0 en faisant le changement de variable : $X=x-\frac{\pi}{6}$, ainsi quand $x\to\frac{\pi}{6}$ on a $X\to 0$. En tenant compte du changement de variable, on a

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\sin x-1}{2\cos x-3}=\lim_{X\to 0}\frac{2\sin\left(X+\frac{\pi}{6}\right)-1}{2\cos\left(X+\frac{\pi}{6}\right)-3}=\lim_{X\to 0}\frac{\sin\left(X+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{1}{2}}{\cos\left(X+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{3}{2}}$$

or

$$\sin\left(X+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin X+\frac{1}{2}\cos X-\frac{1}{2}$$
$$\cos\left(X+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{3}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos X-\frac{1}{2}\sin X-\frac{3}{2}$$

En considérant les DL à l'ordre 1 au voisinage de 0 de $\sin X$ et $\cos X$, on a :

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin X+\frac{1}{2}\cos X-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}X+o(X)$$
$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos X-\frac{1}{2}\sin X-\frac{3}{2}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}\right)-\frac{1}{2}X+o(X)$$

d'où

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{2\sin x - 1}{2\cos x - 3} = \lim_{X\to 0} \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\sin X + \frac{1}{2}\cos X - \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos X - \frac{1}{2}\sin X - \frac{3}{2}} = \lim_{X\to 0} \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}X}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}\right) - \frac{1}{2}X} = 0$$

Exemple 1.27 Calculons $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right)$
Notons d'abord qu'on a :

$$\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right) = \frac{\sin x - x}{x^2 \sin x}$$

or, au voisinage de 0, on a

$$\sin x - x = x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right) - x = -\frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)$$
$$x^2 \sin x = x^2(x + o(x)) = x^3 + o\left(x^3\right)$$

d'où

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^3}{6}}{x^3} = -\frac{1}{6}$$

Exemple 1.28
Calculons $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$.
En utilisant le DL de e^x à l'ordre 2 :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

On obtient :

$$\frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - 1 - x}{x^2} = \frac{\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2} \to \frac{1}{2}.$$

C. Équation de la tangente à l'aide du DL :

Proposition 1.16

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur un intervalle $[a, b]$ et $x_0 \in]a, b[$. Si

$$f(x) = f(x_0) + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + o\left((x - x_0)^2\right) \qquad \text{avec } a_2 \neq 0$$

alors

$$y = f(x_0) + a_1(x - x_0)$$

est l'équation de la tangente à la courbe au point $(x_0, f(x_0))$;

Exemple 1.29 On a $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)$, donc l'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction sin au point d'abscisse 0 est donnée par $y = x$.
Exemple 1.30 Déterminons la tangente à la courbe de $f(x) = \ln(1 + x)$ en $x = 0$.
Le DL de $\ln(1 + x)$ à l'ordre 1 est :

$$\ln(1 + x) = x + o(x).$$

La tangente en $x = 0$ est donc $y = x$.

D. Étude de la concavité et point d'inflexion à l'aide du DL :

Rappelons que si f est une fonction continûment dérivable deux fois sur un intervalle $[a, b]$, alors

- si $f'' < 0$ la courbe tourne sa concavité vers les $y < 0$ (vers le bas),
- si $f'' > 0$ la courbe tourne sa concavité vers les $y > 0$ (vers le haut).
- Si f'' s'annule en changeant de signe en $x_0 \in [a, b]$. Alors, le point $(x_0, f(x_0))$ est un point d'inflexion.

Proposition 1.17

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur un intervalle $[a,b]$ et $x_0 \in]a,b[$. Si

$$f(x) = f(x_0) + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + o\left((x-x_0)^2\right) \qquad \text{avec } a_2 \neq 0$$

alors

- *si $a_2 > 0, C_f$ tourne sa concavité vers les $y > 0$ au point $(x_0, f(x_0))$;*
- *si $a_2 < 0, C_f$ tourne sa concavité vers les $y < 0$ au point $(x_0, f(x_0))$;*

Proposition 1.18

Soient f une fonction de classe $\mathscr{C}^3$ sur un intervalle $[a,b]$ et $x_0 \in]a,b[$. Si

$$f(x) = f(x_0) + a_1(x-x_0) + a_3(x-x_0)^3 + o\left((x-x_0)^3\right) \qquad \text{avec } a_3 \neq 0$$

alors, le point $(x_0, f(x_0))$ est un point d'inflexion.

Plus généralement, soit une fonction f définie au voisinage de x_0 et admet un DL tel que :

$$f(x) = f(x_0) + a_1(x-x_0) + a_p(x-x_0)^p + (x-x_0)^p\varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to x_0}\varepsilon(x) = 0$$

avec $a_p \neq 0$ (on s'arrête au premier terme non nul de degré ≥ 2). Rappelons que l'équation de la tangente au point $(x_0, f(x_0))$ est :

$$y = f(x_0) + a_1(x-x_0)$$

donc

$$f(x) - y = a_p(x-x_0)^p + o\left((x-x_0)^p\right)$$

et

$$f(x) - y \underset{x_0}{\sim} a_p(x-x_0)^p$$

Suivant le signe de a_p et la parité de p, on peut en déduire la position de la tangente par rapport à la courbe au point $(x_0, f(x_0))$. Deux cas se présentent :

(a). Si p est paire

I. si $a_p > 0$, $(x_0, f(x_0))$ est un point où la concavité est tournée vers $y > 0$.

II. si $a_p < 0$, $(x_0, f(x_0))$ est un point où la concavité est tournée vers $y < 0$.

(b). Si p est impaire $(x_0, f(x_0))$ est un point d'inflexion et la courbe traverse la tangente.

Exemple 1.31 Étudions $f(x) = \frac{e^x}{1+x}$ au voisinage du point $(0,1)$.
Déterminons le DL de $f(x)$ à l'ordre 2,
on a

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right) \text{ et } \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + o\left(x^2\right)$$

en effectuant la multiplication on trouve

$$f(x) = e^x\frac{1}{1+x} = \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)\left(1 - x + x^2\right) + o\left(x^2\right) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + o\left(x^2\right),$$

donc on est dans le cas où p pair et $a_p > 0$. D'où $(0,1)$ est un point où la concavité est tournée vers $y > 0$.

Exemple 1.32 Étudions $f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ au voisinage de 0.

On a

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln(1+x) - \ln(1-x)$$

et

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + o\left(x^3\right) \text{ et } \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + o\left(x^3\right)$$

en intégrant des deux cotés les deux DL ci-dessus et en tenant compte du fait que $\ln(1+0) = 0$ et $\ln(1-0) = 0$, on obtient :

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o\left(x^3\right) \text{ et } \ln(1-x) = -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + o\left(x^3\right)$$

En faisant la différence entre les deux DL ci-dessus, on obtient

$$f(x) = 2x + \frac{2}{3}x^3 + o\left(x^3\right)$$

le terme x^2 n'apparaît pas dans le DL, donc $(0,0)$ est un point d'inflexion. La courbe traverse la tangente.

E. Étude des branches infinies à l'aide du DL :

Définition 1.9

On considère un intervalle I et une fonction $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f possède une branche infinie en un élément a si $\lim_{x\to a} f(x) = l$ et si l'un au moins des deux éléments a ou l est égal à $+\infty$ ou $-\infty$. ♣

Proposition 1.19

Soit f une fonction.

(a). Si $\lim_{x\to\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$ la branche infinie est asymptote horizontale, d'équation $y = l$.

(b). Si $\lim_{x\to a\in\mathbb{R}} f(x) = \infty$ La branche infinie est une asymptote verticale d'équation $x = a$. ♠

Proposition 1.20

Soit f une fonction telle que $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$

(a). Si $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, la branche infinie est une branche parabolique horizontale. (exp. $\ln x$)

(b). Si $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$, la branche infinie est une branche parabolique verticale. (exp. $\exp(x)$)

(c). Si $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}^*$, on dit que la courbe représentative de f présente une branche infinie dans la direction " $y = ax$ ".

i) Si en plus $\lim_{x\to+\infty} (f(x) - ax) = b$, alors on a une asymptote d'équation $y = ax + b$.

ii) Si $\lim_{x\to+\infty} (f(x) - ax) = \pm\infty$, alors on a une branche parabolique. ♠

Exemple 1.33 On considère la fonction $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$. Déterminons les asymptotes à sa courbe.
Commençons par la recherche de la limite suivantes

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x}{2} + \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{2}$$

par ailleurs $\lim_{x\to+\infty} \left(f(x) - \frac{1}{2}\cdot x\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2}\cdot x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$. Donc la droite d'équation $y = \frac{1}{2}\cdot x$ est une asymptote à la courbe.

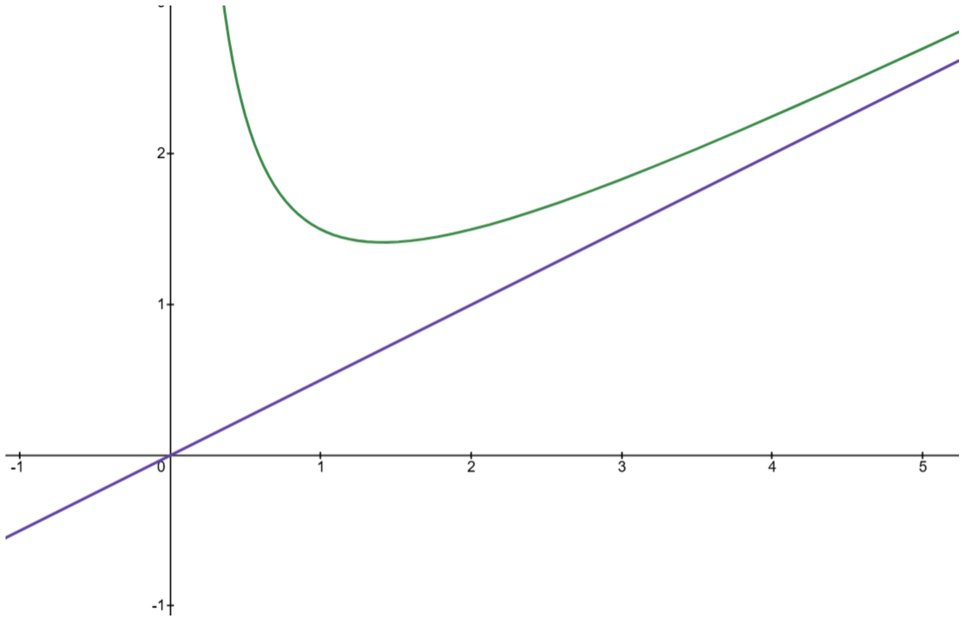

Figure 1.6

Exemple 1.34 On considère la fonction $f(x) = \ln x$. Déterminons les asymptotes à sa courbe. Commençons par la recherche de la limite suivantes

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

par ailleurs $\lim_{x\to+\infty} (f(x) - 0.x) = +\infty$. Donc on a une branche parabolique dans la direction Ox

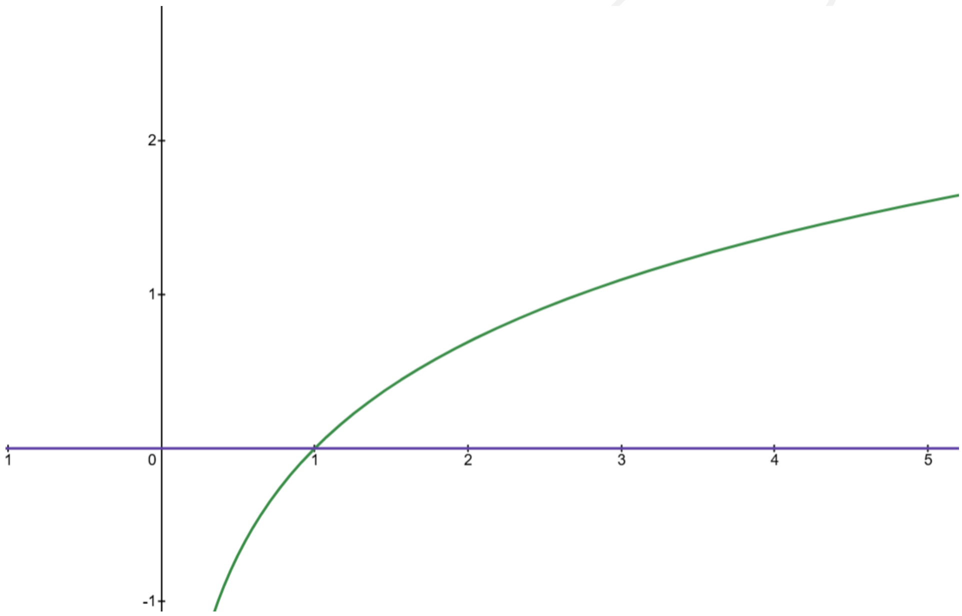

Figure 1.7

Proposition 1.21

Supposons que f admet un développement généralisé au voisinage de $+\infty$ de la forme :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x^\alpha} + o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right) \qquad \text{avec } \alpha > 0$$

Alors, la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à la courbe représentative de f. De plus, suivant le signe de $\frac{c}{x^\alpha}$, la courbe est au-dessus ou en-dessous l'asymptote.

Exemple 1.35 Considérons la fonction $y = \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$. En utilisant son DL au voisinage de l'infini, déterminons ces asymptotes si elles existent.

On pose $u = \frac{1}{x}$:

$$(1+e^u)^{-1} = \left(2+u+\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{6}+o\left(u^3\right)\right)^{-1} = 2^{-1}\left[1+\left(\frac{u}{2}+\frac{u^2}{4}+\frac{u^3}{12}\right)+o\left(u^3\right)\right]^{-1}$$

donc

$$(1+e^u)^{-1} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{u}{2}+\frac{u^3}{24}+o\left(u^3\right)\right)$$

d'où

$$\frac{1}{u}(1+e^u)^{-1} = \frac{1}{2}\frac{1}{u}-\frac{1}{4}+\frac{1}{48}u^2+o\left(u^2\right)$$

par suite

$$f(x) = \frac{x}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{48}\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

ainsi, la droite d'équation $y=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}$ est une asymptote à la courbe de f.

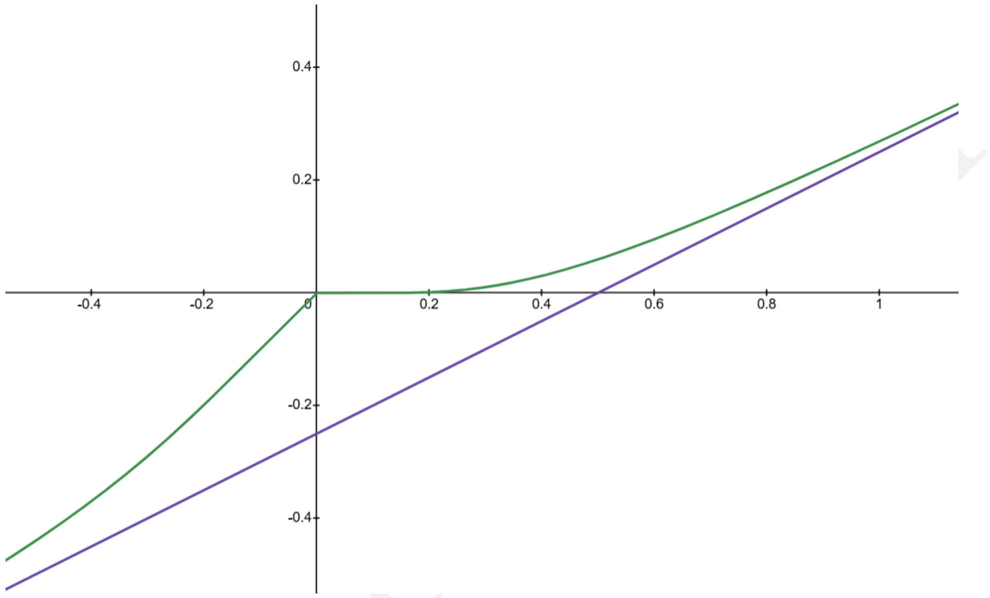

Figure 1.8

Exemple 1.36 Étudions la fonction suivante au voisinage de $+\infty$: $f(x)=\sqrt[3]{x^3+x^2}=\left(x^3+x^2\right)^{1/3}$.
Notons qu'on a

$$f(x) = x\left(1+\frac{1}{x}\right)^{1/3}$$

Quand x est voisin de l' ∞ $\frac{1}{x}$ est voisin de 0. On cherche le DL de $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{1/3}$ en posant $X=\frac{1}{x}$

$$(1+X)^{1/3} = 1+\frac{1}{3}X-\frac{1}{9}X^2+o\left(X^2\right)$$

soit

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{1/3} = 1+\frac{1}{3}\frac{1}{x}-\frac{1}{9}\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

d'où

$$f(x) = x+\frac{1}{3}-\frac{1}{9x}+o\left(\frac{1}{x}\right)$$

Donc la droite d'équation $y=x+\frac{1}{3}$ est une asymptote la courbe de f.

$$f(x) - y \sim -\frac{1}{9x}$$

- Au voisinage de $+\infty$ la fonction $-\frac{1}{9x} < 0$ donc la courbe est au dessous de l'asymptote.
- Au voisinage de $-\infty$ la fonction $-\frac{1}{9x} > 0$ donc la courbe est au dessus de l'asymptote.

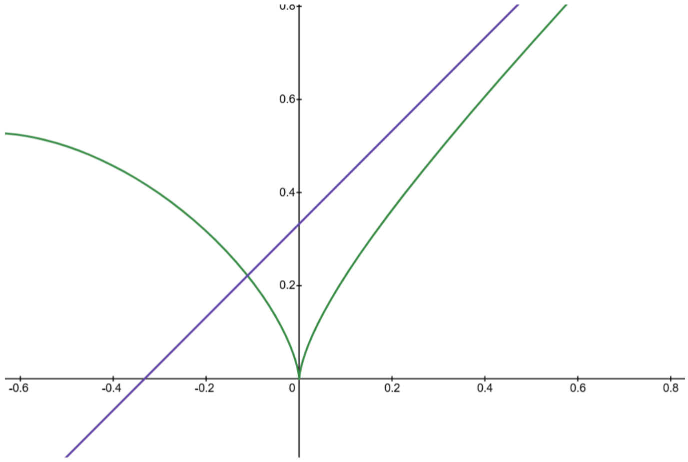

Figure 1.9

F. Résolution d'équations différentielles à l'aide du DL :

Les développements limités sont utilisés aussi pour trouver des solutions approchées d'équations différentielles (Voir Chapitre 5).

Exemple 1.37

Résoudre $y' = y$ avec $y(0) = 1$ en utilisant un DL.

On suppose $y(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$. En substituant dans l'équation, on retrouve le DL de e^x.

Chapitre 2 Intégrale de Riemann

Motivation

La notion d'intégrale a été bien formalisée au 19e siècle grâce à Riemann qui s'est intéressé à une fonction f donnée sur un segment $[a, b]$ et a essayé d'approcher l'aire $\mathscr{A}$ sous le graphe de f par les aires $\mathscr{A}^-$ et $\mathscr{A}^+$ de deux familles de rectangles qui approche par défaut et par excès l'aire $\mathscr{A}$,

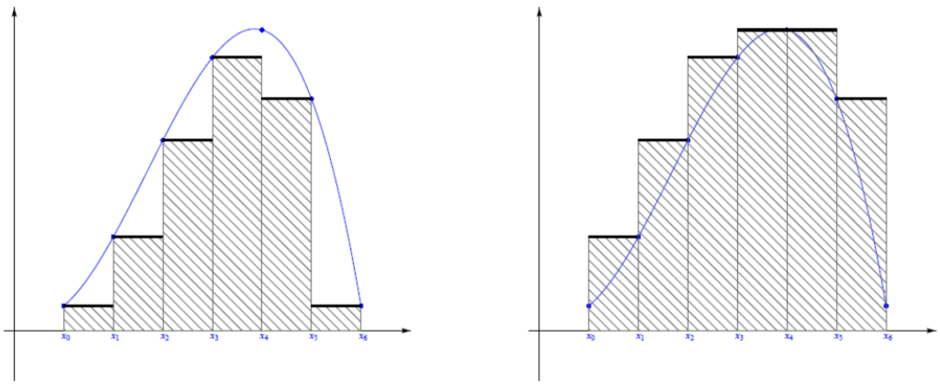

Figure 2.1 – à gauche les aires inférieurs $\mathscr{A}^-$, et à droite les aires supérieurs $\mathscr{A}^+$

Une fonction est intégrable au sens de Riemann si la différence des aires $\mathscr{A}^-$ et $\mathscr{A}^+$ tend vers 0 quand le pas de subdivision (la largeur des rectangles considérés) tend vers 0.

Exemple 2.1 Considérons la fonction exponentielle $f(x) = e^x$. On souhaite calculer l'aire $\mathscr{A}$ en-dessous du graphe de f et entre les droites d'équation $x = 0$, $x = 1$ et l'axe (Ox).

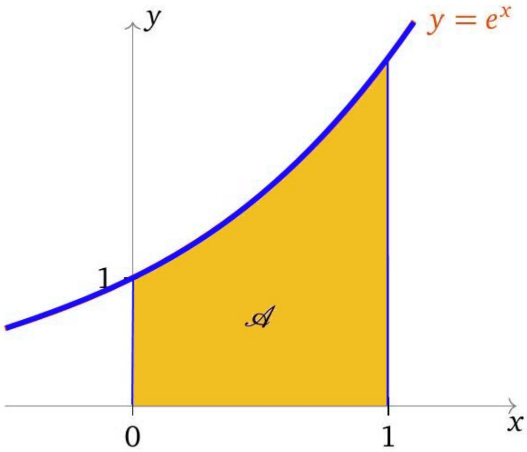

Figure 2.2

Nous approchons cette aire par des sommes d'aires des rectangles situés sous la courbe. Plus précisément, soit $n \geqslant 1$ un entier, découpons notre intervalle $[0, 1]$ à l'aide de la subdivision $\left(0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{i}{n}, \cdots, \frac{n-1}{n}, 1\right)$. On considère les «rectangles inférieurs» $\mathscr{R}_i^-$, chacun ayant pour base l'intervalle $\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$ et pour hauteur $f\left(\frac{i-1}{n}\right) = e^{(i-1)/n}$. L'entier i varie de 1 à n.

L'aire $\mathscr{A}_i^-$ de $\mathscr{R}_i^-$ est égal à $\mathscr{A}_i^- = \left(\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n}\right) \times e^{(i-1)/n} = \frac{1}{n} e^{\frac{i-1}{n}}$.

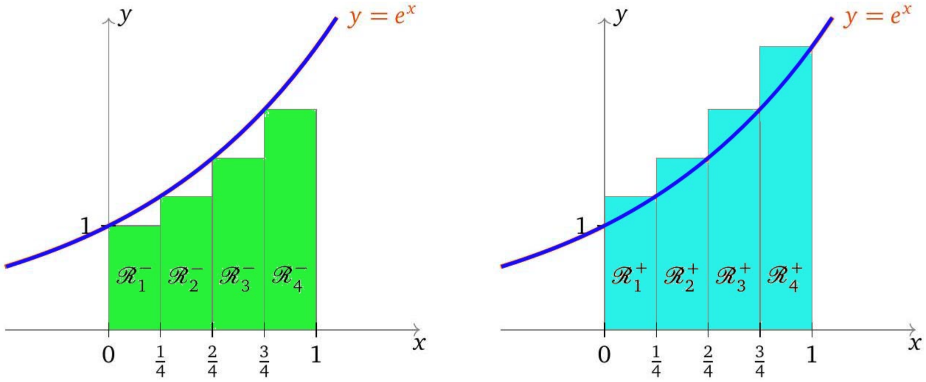

Figure 2.3

La somme des aires des $\mathscr{R}_i^-$ se calcule alors comme somme d'une suite géométrique :

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{e^{\frac{i-1}{n}}}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^{i-1} = \frac{1}{n}\frac{1-\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^{n}}{1-e^{\frac{1}{n}}} = \frac{\frac{1}{n}}{e^{\frac{1}{n}}-1}(e-1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} e-1$$

Pour la limite on a reconnu l'expression du type $\frac{e^x-1}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$ (avec ici $x = \frac{1}{n}$).

Soit maintenant les «rectangles supérieurs» $\mathscr{R}_i^+$, ayant la même base $\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$ mais la hauteur $f\left(\frac{i}{n}\right) = e^{i/n}$. Un calcul similaire montre que $\sum_{i=1}^{n} \frac{e^{\frac{i}{n}}}{n} \to e-1$ lorsque $n \to +\infty$.

L'aire $\mathscr{A}$ de notre région est supérieure à la somme des aires des rectangles inférieurs ; et elle est inférieure à la somme des aires des rectangles supérieurs. Lorsque l'on considère des subdivisions de plus en plus petites (c'est-à-dire lorsque l'on fait tendre n vers $+\infty$) alors on obtient à la limite que l'aire $\mathscr{A}$ de notre région est encadrée par deux aires qui tendent vers $e-1$. Donc l'aire de notre région est $\mathscr{A} = e-1$.

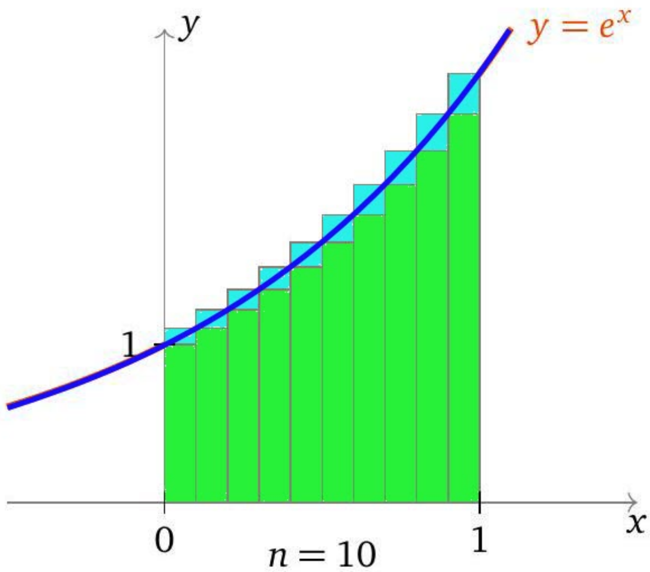

Figure 2.4

2.1 Fonctions en escalier

2.1.1 Subdivision d'un intervalle

Définition 2.1

Soit $I = [a, b]$ un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ $(-\infty < a < b < +\infty)$.

- *On appelle une **subdivision** de $[a, b]$ toute suite finie, strictement croissante, de nombres $S = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ telle que $x_0 = a$ et $x_n = b$. Autrement dit $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$.*

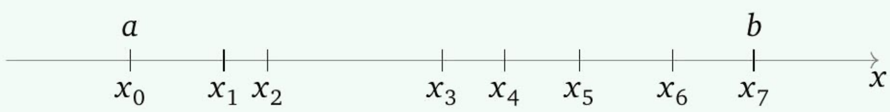

Figure 2.5

- *On appelle* ***pas*** *ou* ***diamètre*** *de la subdivision S la quantité :*

$$\delta = \max_{0 \leq i \leq n-1} \{x_{i+1} - x_i\}$$

- *Une subdivision S_1 de $[a,b]$ est dite plus fine qu'une subdivision S_0 de $[a,b]$ si $S_0 \subset S_1$. Cela veut dire que S_1 découpe $[a,b]$ en plus de morceaux. En particulier dans ce cas, on a évidemment $\delta(S_0) \geqslant \delta(S_1)$.*
- *Une subdivision de $[a,b]$ est* ***régulière*** *si tous les $x_{i+1} - x_i$ sont égaux.*

Exemple 2.2

- $I = [0,2]$; $S_1 : x_0 = 0 < x_1 = \frac{1}{2} < x_2 = 1 < x_3 = \frac{3}{2} < x_4 = 2$ est une subdivision régulière de pas $\frac{1}{2}$.
- $I = [0,2]$; $S_2 : x_0 = 0 < x_1 = \frac{1}{4} < x_2 = \frac{1}{2} < x_3 = 1 < x_4 = \frac{3}{2} < x_5 = 2$ est une subdivision de pas $\frac{1}{2}$, mais S_1 n'est pas régulière.

Remarque Si $\sigma : a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ est une subdivision régulière d'un intervalle $I = [a,b]$, alors $x_i = x_0 + ih$; $i = 1, 2, 3, \cdots, n$, ce qui donne que $x_n = x_0 + nh$ donc $b - a = nh$ et $h = \frac{b-a}{n}$.

2.1.2 Fonctions en escalier

Définition 2.2

Une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une ***fonction en escalier*** *sur le segment $[a,b]$ s'il existe une subdivision $S : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ et des nombres réels $c_1, \ldots, c_n$ tels que pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ on ait*

$$\forall x \in]x_{i-1}, x_i[\quad f(x) = c_i$$

Autrement dit, f est une fonction constante sur chacun des sous-intervalles de la subdivision.
La subdivision S est dite ***subordonnée*** *à la fonction f.*

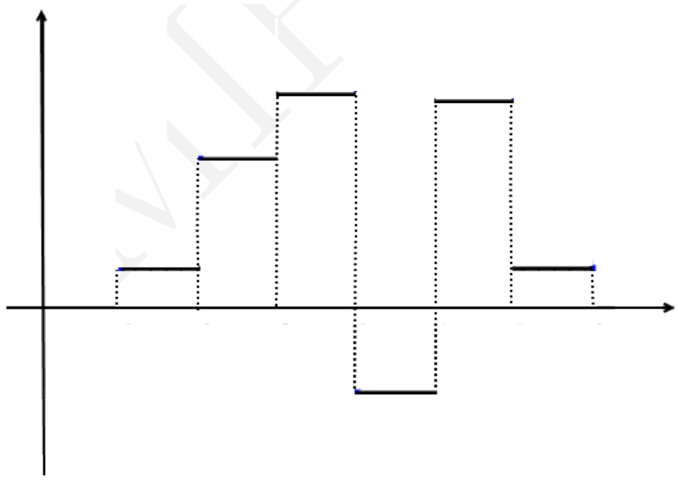

Figure 2.6 – Fonction en escalier

Proposition 2.1

Soient f et g deux fonctions en escalier sur $[a,b]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ Alors $|f|$, $f+g$, λf et fg sont des fonctions en escalier sur $[a,b]$.

Démonstration Si S_0 et S_1 sont des subdivisions associées respectivement à f et g alors $S = S_0 \cup S_1$ est associée à f et à g. On peut donc supposer que f et g sont en escalier sur la même subdivision $S = (x_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$.

Ainsi f et g sont constantes, égales respectivement à c_i et d_i sur chaque intervalle $]x_i, x_{i+1}[$. Donc $|f|$, λf, $f+g$ et fg sont égales à $|c_i|$, λc_i, $c_i + d_i$ et $c_i d_i$ sur $]x_i, x_{i+1}[$. D'où la proposition. □

2.2 L'intégrale de Riemann

2.2.1 Intégrale d'une fonction en escalier

Définition 2.3

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction en escalier, c-à-d il existe une subdivision $\sigma : a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ de $[a,b]$, et des constantes c_i tel que $f(x) = c_i$ pour tout $i = 1, 2, \cdots, n$ et $x \in]x_{i-1}, x_i[$. On appelle intégrale de Riemann de f le réel $\int_a^b f(x)dx$ défini par

$$\int_a^b f(x)dx = I_S(f) = \sum_{i=1}^{n} c_i (x_i - x_{i-1})$$

♣

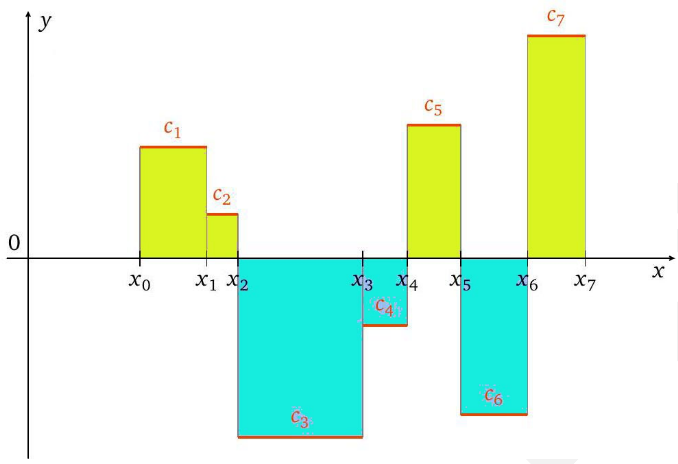

Figure 2.7

Remarque

- Remarquons que chaque terme $c_i (x_i - x_{i-1})$ est l'aire du rectangle compris entre les abscisses x_{i-1} et x_i et de hauteur c_i. Il faut juste prendre garde que l'on compte l'aire avec un signe « + » si $c_i > 0$ et un signe « - » si $c_i < 0$.
- L'intégrale d'une fonction en escalier est l'aire de la partie située au-dessus de l'axe des abscisses moins l'aire de la partie située en-dessous. L'intégrale d'une fonction en escalier est bien un nombre réel qui mesure l'aire algébrique (c'est-à-dire avec signe) entre la courbe de f et l'axe des abscisses.

Exemple 2.3 Soit la fonction f définie par $f(x) = E(x)$ sur $[-1, 2]$, où $E(x)$ désigne la partie entière de x. Donc

$$\int_{-1}^{2} f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} c_i (x_i - x_{i-1}) = -1(0+1) + 0(1-0) + 1(2-1) = 0.$$

Proposition 2.2

La quantité $I_S(f)$ ne dépend pas du choix de la subdivision S associée à f, elle ne dépend que de f et de $[a,b]$. ♠

Démonstration Considérons deux subdivisions $S = (x_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ et $S' = (y_j)_{0 \leqslant j \leqslant m}$ associées à f.

- 1^{er} cas $S \subset S'$: sur chaque intervalle $]x_i, x_{i+1}[$ la fonction f est constante égale à c_i. Mais cet intervalle se découpe en union de certains intervalles $]y_k, y_{k+1}[$, $k = l_0, l_0+1, l_0+2, \ldots, l_1$ oú f prend des valeurs d_l qui sont forcément toutes égales à c_i. Donc $\sum_{l=l_0}^{l_1-1} d_l (y_{l+1} - y_l) = \sum_{l=l_0}^{l=l_1-1} c_i (y_{l+1} - y_l) = c_i \sum_{l=l_0}^{l=l_1-1} (y_{l+1} - y_l) = c_i (x_{i+1} - x_i)$ En faisant la somme sur tous les $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ on aura

$$\sum_{l=0}^{l=m-1} d_l (y_{l+1} - y_l) = \sum_{i=0}^{i=n-1} c_i (x_{i+1} - x_i)$$

Ainsi, dans ce cas, $I_{S'}(f) = I_S(f)$

- 2ème cas : si S et S' sont quelconques, associées à f alors $S'' = S \cup S'$ est une subdivision associée à f vérifiant $S \subset S''$ et $S' \subset S''$, et d'après le cas premier, on a :

$$I_S(f) = I_{S''}(f) = I_{S'}(f)$$

□

2.2.2 Propriétés

Proposition 2.3 (Linéarité)

Soient f et g deux fonctions en escalier sur $[a, b]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

1. $\int_a^b \lambda f(t)dt = \lambda \int_a^b f(t)dt$.
2. $\int_a^b (f+g)(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt$.

En d'autre termes :

$$\chi : f \mapsto \chi(f) = \int_a^b f(t)dt$$

est une forme linéaire sur l'espace vectorielle des fonctions en escalier sur $[a, b]$. ♠

Démonstration

1. Si $S = (x_j)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ est une subdivision associée à f alors elle est aussi associé à λf. Si f prend les valeurs c_i sur les intervalles $]x_i, x_{i+1}[$ alors λf prend les valeurs λc_i sur ces mêmes intervalles. On obtient donc

$$\int_a^b \lambda f(t)dt = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda c_i \left(x_{i+1} - x_i\right) = \lambda \sum_{i=0}^{n-1} c_i \left(x_{i+1} - x_i\right) = \lambda \int_a^b f(t)dt$$

2. Soit $S = (x_j)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ une subdivision associée à f et à g. Chacune de ces fonctions vaut c_i et d_i respectivement sur les intervalles $]x_i, x_{i+1}[$. Ainsi $f + g$ vaut $c_i + d_i$ sur ces intervalles et on aura :

$$\begin{aligned}
\int_a^b (f+g)(t)dt &= \sum_{i=0}^{n-1} \left(c_i + d_i\right)\left(x_{i+1} - x_i\right) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} c_i \left(x_{i+1} - x_i\right) + \sum_{i=0}^{n-1} d_i \left(x_{i+1} - x_i\right) \\
&= \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt
\end{aligned}$$

□

Proposition 2.4 (Croissance)

Soient f et g deux fonctions en escalier sur un intervalle $[a, b]$, alors

1. *Si f est positive sur $[a, b]$, alors :* $\int_a^b f(t)dt \geqslant 0$.
2. *Si $f \geqslant g$ sur $[a, b]$, alors :* $\int_a^b f(t)dt \geqslant \int_a^b g(t)dt$.
3. *On a* $\int_a^b |f(t)|dt \geqslant \left|\int_a^b f(t)dt\right|$.
4. *Si pour tout $a \leq x \leq b$ on a : $m \leq f(x) \leq M$ alors*

$$\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b M dx.$$ ♠

Démonstration

1. Soit $S = (x_j)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ une subdivision associée à f alors toutes les valeurs c_i de f sur les intervalles $]x_i, x_{i+1}[$ sont positives. Comme les $(x_{i+1} - x_i)$ sont tous positifs, alors :

$$\int_a^b f(t)dt = \sum_{i=0}^{n-1} c_i\left(x_{i+1} - x_i\right) \geqslant 0$$

2. Il suffit d'appliquer 1) à $f - g$.
3. Pour tout $x \in [a, b]$ on a, $|f(x)| \geqslant f(x) \geqslant -|f(x)|$, l'assertion 2) implique :

$$\int_a^b |f(x)|dt \geqslant \int_a^b f(t)dt \geqslant -\int_a^b |f(x)|dt$$

d'où

$$\int_a^b |f(t)|dt \geqslant \left|\int_a^b f(t)dt\right|$$

4. Il suffit d'utiliser 2).

$\square$

Proposition 2.5 (Relation de Chasles)

Soit f est une fonction en escalier sur $[a, b]$, alors pour tout $c \in]a, b[$ on a :

$$\int_a^c f(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt.$$

2.2.3 Fonctions continues par morceaux

Définition 2.4

Soit $[a, b]$ un segment. On dit qu'une fonction $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ lorsqu'il existe une subdivision $\sigma : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ du segment $[a, b]$ telle que

1. *Pour tout $k \in [0, n-1]$, la restriction de f à $]x_k, x_{k+1}[$ est continue.*
2. *Pour tout $k \in [0, n-1]$, la restriction de f à $]x_k, x_{k+1}[$ est prolongeable par continuité sur $]x_k, x_{k+1}[$, autrement dit, f restreinte à $]x_k, x_{k+1}[$ admet une limite finie à droite en x_k et à gauche en x_{k+1}.*

Une telle subdivision est dite adaptée ou subordonnée à f

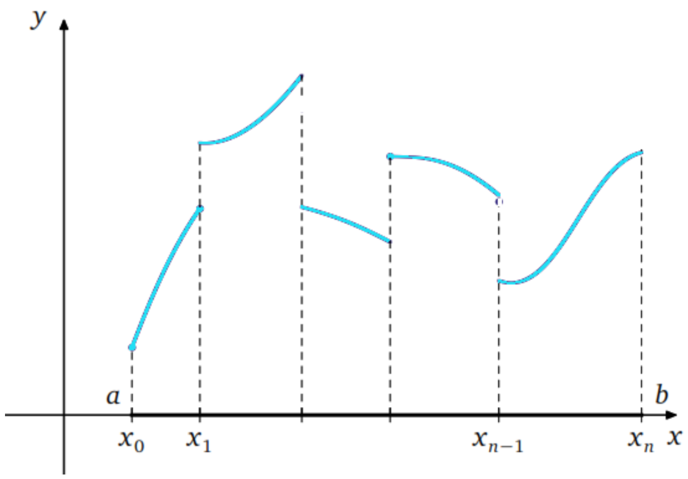

Figure 2.8 – Fonction continue par morceaux sur un segment

Remarque Si $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$, alors f n'a qu'un nombre fini de points de discontinuité, en chacun desquels elle présente une limite à droite, et une limite à gauche finies. Autrement dit il existe une subdivision $\sigma : a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ de $[a, b]$, tel que la restriction de f à chaque intervalle $]x_i, x_{i+1}[$ soit continue sur cet intervalle et prolongeable par continuité à l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$.

Remarque

- Toute fonction en escalier sur $[a, b]$ est continue par morceaux sur $[a, b]$.

- Comme pour les fonctions en escaliers, si σ est une subdivision de $[a,b]$ subordonnée à f continue par morceaux sur $[a,b]$ et si σ' est une autre subdivision de $[a,b]$ plus fine que σ alors σ' est aussi subordonnée à f.

Théorème 2.1 (Théorème d'approximation uniforme (admis))

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction φ en escalier sur $[a,b]$ telle que : $|f(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$. ♡

Corollaire 2.1

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux fonctions φ et ψ en escalier sur $[a,b]$ telles que pou tout $x \in [a,b]$ on a : $\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$ et $\psi(x) - \varphi(x) \leq \varepsilon$. ♡

Démonstration D'après le théorème d'approximation uniforme on a pour tout $\varepsilon > 0$ il existe g une fonction en escalier sur $[a,b]$ telle que $|f(x) - g(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, donc pour tout $x \in [a,b]$ on a $g(x) - \frac{\varepsilon}{2} \leq f(x) \leq g(x) + \frac{\varepsilon}{2}$. Si on pose $\varphi(x) = g(x) - \frac{\varepsilon}{2}$ et $\psi(x) = g(x) + \frac{\varepsilon}{2}$ on aura φ et ψ deux fonctions en escalier sur $[a,b]$ et vérifient $\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$ et $\psi(x) - \varphi(x) \leq \varepsilon$. □

2.2.4 Fonction intégrable

Notations

Soit f une fonction définie et bornée sur $[a,b] \subset \mathbb{R}$. On note :

$$E_-(f) = \{\varphi : [a,b] \to \mathbb{R} \ / \ \varphi \text{ en escalier et } \varphi \leqslant f\}, \quad \text{et} \quad I_-(f) = \left\{\int_a^b \varphi(t)dt : \varphi \in E_-(f)\right\},$$

$$E_+(f) = \{\psi : [a,b] \to \mathbb{R} \ / \ \psi \text{ en escalier et } f \leqslant \psi\}, \quad \text{et} \quad I_+(f) = \left\{\int_a^b \psi(t)dt : \psi \in E_+(f)\right\}.$$

Comme f est bornée, alors il existent $m, n \in \mathbb{R}$ tels que $m = \min\{f(x) : x \in [a,b]\}$ et $M = \sup\{f(x) : x \in [a,b]\}$, et les fonctions constantes $m : [a,b] \to \mathbb{R}$ et $M : [a,b] \to \mathbb{R}$ définies par $m(x) = m$ et $M(x) = M$ vérifiant $m \leqslant f \leqslant M$. Donc $m \in E_-(f)$ et $M \in E_+(f)$, ainsi :

$$m(b-a) = \int_a^b m\, dt \in I_-(f) \Rightarrow I_-(f) \neq \emptyset$$

et

$$M(b-a) = \int_a^b M\, dt \in I_+(f) \Rightarrow I_+(f) \neq \emptyset$$

Clairement $M(b-a)$ est un majorant de $I_-(f)$ et $m(b-a)$ est un minorant de $I_+(f)$. Donc

$$i_a^b(f) = \sup(I_-(f)) \text{ et } I_a^b(f) = \inf(I_+(f))$$

existent dans $\mathbb{R}$ et vérifient évidemment :

$$i_a^b(f) \leqslant I_a^b(f)$$

Définition 2.5

*On dit qu'une fonction bornée f sur $[a,b]$ est **intégrable au sens de Riemann** si $i_a^b(f) = I_a^b(f)$. Cette valeur commune est notée :*

$$\int_a^b f(t)dt$$

*et appelée **intégrale** de f entre a et b.* ♣

Théorème 2.2

Une fonction f définie et bornée sur $[a,b]$ est intégrable sur $[a,b]$ si et seulement si il existe deux suites de fonctions $(\varphi_n)_n$ et $(\psi_n)_n$ en escaliers telles que :

- $\varphi_n \leqslant f \leqslant \psi_n$ *pour tout* n,
- *Les deux suites* $(\int_a^b \psi_n dt)_n$ *et* $(\int_a^b \varphi_n dt)_n$ *convergent et ont la même limite.*

Dans ce cas on a

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \psi_n(t)dt = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \varphi_n(t)dt.$$

♡

Démonstration

- Supposons que $i_a^b(f) = I_a^b(f) = \int_a^b f(t)dt$.
  Par définition de la borne inférieure et supérieure on a :

$$\begin{cases} \forall \varphi \in E_-(f) & \int_a^b \varphi(t)dt \leqslant i_a^b(f) \\ \forall \varepsilon > 0, \exists \varphi_\varepsilon \in E_-(f) & i_a^b(f) - \varepsilon < \int_a^b \varphi_\varepsilon(t)dt \end{cases}$$

  et

$$\begin{cases} \forall \psi \in E_+(f) & \int_a^b \psi(t)dt \geqslant I_a^b(f) \\ \forall \varepsilon > 0, \exists \psi_\varepsilon \in E_+(f) & I_a^b(f) + \varepsilon > \int_a^b \psi_\varepsilon(t)dt \end{cases}$$

  Ainsi pour $\varepsilon = \frac{1}{n}, n \geqslant 1$ il existe alors deux fonctions $\varphi_n \in E_-(f)$ et $\psi_n \in E_+(f)$ telles que

$$i_a^b(f) - \frac{1}{n} < \int_a^b \varphi_n(t)dt \leqslant i_a^b(f)$$

  et

$$I_a^b(f) \leqslant \int_a^b \psi_n(t)dt < I_a^b(f) + \frac{1}{n}$$

  Si on fait tendre n vers l'infini, on aura

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b \varphi_n(t)dt = i_a^b(f) = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \psi_n(t)dt = I_a^b(f)$$

  Par construction, les fonctions φ_n et ψ_n sont bien en escalier et satisfont $\varphi_n \leqslant f \leqslant \omega_n$. Ainsi la preuve dans un sens est faite.
- Réciproquement, si il existe deux suites $(\varphi_n)_n$ et $(\psi_n)_n$ telles que :

$$\varphi_n \leqslant f \leqslant \psi_n \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \int_a^b (\psi_n - \varphi_n)(t)dt = 0$$

  alors on a l'implication suivante :

$$\int_a^b \varphi_n(t)dt \leqslant i_a^b(f) \leqslant I_a^b(f) \leqslant \int_a^b \psi_n(t)dt \Rightarrow 0 \leqslant I_a^b(f) - i_a^b(f) \leqslant \int_a^b (\psi_n(t) - \varphi_n(t))\, dt$$

  Ce qui montre que $I_a^b(f) = i_a^b(f)$.
  De plus on a :

$$0 \leqslant i_a^b(f) - \int_a^b \varphi_n(t)dt \leqslant \int_a^b (\psi_n(t) - \varphi_n(t))\, dt$$

  et

$$0 \leqslant \int_a^b \psi_n(t) - I_a^b(f) \leqslant \int_a^b (\psi_n(t) - \varphi_n(t))\, dt$$

  Il suffit alors de faire tendre n vers l'infini pour conclure.

$\square$

Exemple 2.4

- Les fonctions en escalier sont intégrables ! En effet si f est une fonction en escalier alors la borne inférieure $I_a^b(f)$ et supérieure $i_a^b(f)$ sont atteintes avec la fonction $\phi = f$. Bien sûr l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ coïncide avec l'intégrale de la fonction en escalier.
- Nous verrons dans la suite que les fonctions continues et les fonctions monotones sont intégrables.
- Soit la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ est rationnel} \\ 0 & \text{si sinon} \end{cases}$$

On a $i_0^1(f) \leqslant 0 < 1 \leqslant I_0^1(f) \Rightarrow i_0^1(f) \neq I_0^1(f)$, (Les bornes inférieure et supérieure ne coïncident pas) donc f n'est pas Riemann intégrable sur $[0,1]$.

Exemple 2.5 Soit la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$. Montrons qu'elle est intégrable et calculons $\int_0^1 f(x)dx$.

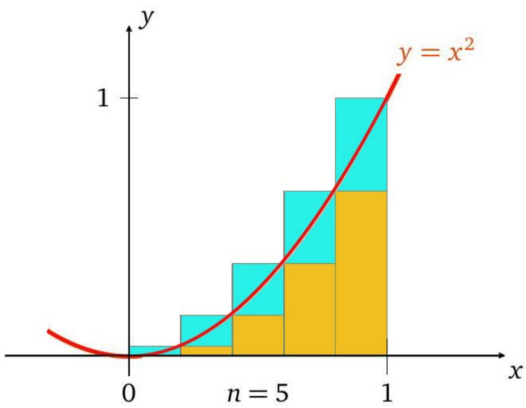

Figure 2.9

En effet, soit $n \geqslant 1$ et considérons la subdivision régulière de $[0,1]$, $S = \left(0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \cdots, \frac{i}{n}, \cdots, \frac{n-1}{n}, 1\right)$. Sur l'intervalle $\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$ on a

$$\forall x \in \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right], \quad \left(\frac{i-1}{n}\right)^2 \leqslant x^2 \leqslant \left(\frac{i}{n}\right)^2.$$

On définit une fonction en escalier ϕ^- au-dessous de f par $\phi^-(x) = \frac{(i-1)^2}{n^2}$ si $x \in \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right[$ (pour chaque $i = 1, \dots, n$) et $\phi^-(1) = 1$. De même on construit une fonction en escalier ϕ^+ au-dessus de f définie par $\phi^+(x) = \frac{i^2}{n^2}$ si $x \in \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right[$ (pour chaque $i = 1, \dots, n$) et $\phi^+(1) = 1$. ϕ^- et ϕ^+ sont des fonctions en escalier et l'on a $\phi^- \leqslant f \leqslant \phi^+$.
L'intégrale de la fonction en escalier ϕ^+ est par définition

$$\int_0^1 \phi^+(x)dx = \sum_{i=1}^n \frac{i^2}{n^2}\left(\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n}\right) = \sum_{i=1}^n \frac{i^2}{n^2}\frac{1}{n} = \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^n i^2.$$

On a $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (on peut vérifier cette formule par récurrence), donc

$$\int_0^1 \phi^+(x)dx = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}.$$

De même pour la fonction ϕ^- :

$$\int_0^1 \phi^-(x)dx = \sum_{i=1}^n \frac{(i-1)^2}{n^2}\frac{1}{n} = \frac{1}{n^3}\sum_{j=1}^{n-1} j^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3} = \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}.$$

Maintenant $i_0^1(f)$ est la borne supérieure sur toutes les fonctions en escalier inférieures à f donc en particulier

$i_0^1(f) \geqslant \int_0^1 \phi^-(x)dx$. De même $I_0^1(f) \leqslant \int_0^1 \phi^+(x)dx$. En résumé :

$$\frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2} = \int_0^1 \phi^-(x)dx \leqslant i_0^1(f) \leqslant I_0^1(f) \leqslant \int_0^1 \phi^+(x)dx = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}.$$

Lorsque l'on fait tendre n vers $+\infty$ alors les deux extrémités tendent vers $\frac{1}{3}$. On en déduit que $i_0^1(f) = I_0^1(f) = \frac{1}{3}$. Ainsi f est intégrable et $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$.

2.2.5 Opérations sur les fonctions intégrables

Proposition 2.6

Si f et g sont deux fonctions bornées et intégrables sur $[a,b]$ et si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors λf et $f+g$ sont intégrables sur $[a,b]$ et on a :

- $\int_a^b \lambda f(t)dt = \lambda \int_a^b f(t)dt$,
- $\int_a^b (f+g)(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt$.

Démonstration Comme f et g sont intégrables alors il existe des suites $(\varphi_n)_{n\geqslant 1}$, $(\psi_n)_{n\geqslant 1}$, $(\varphi'_n)_{n\geqslant 1}$ et $(\psi'_n)_{n\geqslant 1}$ de fonctions en escalier telles que pour tout $n \geqslant 1$:

$$\varphi_n \leqslant f \leqslant \psi_n \text{ et } \varphi'_n \leqslant g \leqslant \psi'_n$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b (\psi_n - \varphi_n)(t) = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b (\psi'_n - \varphi'_n)(t) = 0$$

Il s'en suit que :

- Si $\lambda > 0$, alors : $\lambda\varphi_n \leqslant \lambda f \leqslant \lambda\psi_n$ et $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b (\lambda\psi_n - \lambda\varphi_n)(t)dt = 0$.
- si $\lambda < 0$, alors : $\lambda\psi_n \leqslant \lambda f \leqslant \lambda\varphi_n$ et $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b (\lambda\varphi_n - \lambda\psi_n)(t) = 0$.
- Pour $\lambda = 0$ c'est trivial.

Donc λf est intégrable sur $[a,b]$.

On a déjà vu que, pour les fonctions en escalier, l'intégrale est linéaire et de la linéarité de la limite on déduit que :

$$\begin{aligned}
\int_a^b \lambda f(t)dt &= \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \lambda\varphi_n(t)dt \\
&= \lim_{n\to+\infty} \left(\lambda \int_a^b \varphi_n(t)dt\right) \\
&= \lambda \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \varphi_n(t)dt \\
&= \lambda \int_a^b f(t)dt
\end{aligned}$$

Par ailleurs on a $\varphi_n + \varphi'_n \leqslant f + g \leqslant \psi_n + \psi'_n$, et

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \int_a^b (\psi_n + \psi'_n)(t)dt &= \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \psi_n dt + \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \psi'_n dt \\
&= \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \varphi_n dt + \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \varphi'_n dt \\
&= \lim_{n\to+\infty} \int_a^b (\varphi_n + \varphi'_n)(t)dt \\
&= \int_a^b (f+g)(t)dt.
\end{aligned}$$

C'est ce qu'il fallait démontrer. □

2.2.6 Intégrales et inégalités

Les inégalités liées aux intégrales de fonctions en escalier vont s'étendre sans difficulté aux fonctions Riemann intégrables.

Proposition 2.7

Soient f et g deux fonctions bornées et intégrables sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$.

1. *Si $f \geqslant 0$ sur $[a, b]$ alors $\int_a^b f(t)dt \geqslant 0$.*
2. *Si $f \geqslant g$ sur $[a, b]$ alors $\int_a^b f(t)dt \geqslant \int_a^b g(t)dt$.*

♠

Démonstration

1. Comme f est intégrable, on sait qu'il existe une suite $(\psi_n)_n$ de fonctions en escalier telles que $f \leqslant \psi_n$ pour tout n et
$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{n \to +\infty} \int_a^b \psi_n(t)dt$$
Comme f est positive, toutes les fonctions ψ_n le sont aussi, donc les intégrales $\int_a^b \psi_n(t)dt$ sont positives et leur limite aussi.
2. Il suffit d'appliquer 1) à $f - g \geqslant 0$

□

Considérons une fonction f bornée sur un intervalle $[a, b]$ et posons
$$f_-(x) = \max\{-f(x), 0\} \text{ et } f_+(x) = \max\{f(x), 0\} \quad \text{pour tout } x \in [a, b]$$
Il est clair que ces deux fonctions sont positives et que
$$f = f_+ - f_- \text{ et } |f| = f_+ + f_-$$

Proposition 2.8

Soit f une fonction bornée intégrable sur $[a, b]$, alors f_+, f_- et $|f|$ sont aussi intégrables et
$$\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|dt$$

♠

Démonstration Comme f est intégrable alors il existe des fonctions en escalier $(\varphi_n)_n$ et $(\psi_n)_n$ vérifiant $\varphi_n \leqslant f \leqslant \psi_n$ et dont les intégrales convergent vers celle de f. On vérifie alors facilement que
$$(\varphi_n)_+ \leqslant f_+ \leqslant (\psi_n)_+$$
et que $(\psi_n)_+ - (\varphi_n)_+ \leqslant \psi_n - \varphi_n$. Donc f_+ est intégrable sur $[a, b]$. Par la même méthode, f_- est intégrable sur $[a, b]$, d'où $|f| = f_+ + f_-$ est intégrable sur $[a, b]$.

L'inégalité des intégrales découle de 2) de la proposition (2.7) appliquée à $-|f| \leqslant f \leqslant |f|$ □

Théorème 2.3 (Première Formule de la moyenne)

Soit f une fonction bornée et intégrable sur un intervalle $[a, b]$ avec $a < b$. Si pour tout $x \in [a, b]$ on a $m \leq f(x) \leq M$, alors
$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt \leq M.$$

♡

Démonstration Comme on a $m \leqslant f \leqslant M$ on en déduit $m(b-a) \leqslant \int_a^b f(t)dt \leqslant M(b-a)$, d'où

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \leq M.$$

□

Application

Calculer la limite suivante : $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\int_0^x \frac{e^{t^2}}{2+\cos(t)}dt\right)$

Solution

Pour calculer cette limite, il suffit d'appliquer la formule de la moyenne à $[a,b]=[0,x]$ *et à la fonction* $t \mapsto f(t) = \frac{e^{t^2}}{2+\cos(t)}$ *qui est continue sur* $\mathbb{R}$*. Pour* x *au voisinage de* 0^+ *on a* $[0,x]\subset[0,1]$*. Soient alors* $m = \min\{f(t), t\in[0,1]\}$ *et* $M = \max\{f(t), t\in[0,1]\}$*. La formule de la moyenne nous mène à*

$$m \leqslant \frac{1}{x-0}\int_0^x \frac{e^{t^2}}{2+\cos(t)} \leqslant M$$

Par suite

$$xm \leqslant \int_0^x \frac{e^{t^2}}{2+\cos(t)}dt \leqslant xM$$

D'où

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\int_0^x \frac{e^{t^2}}{2+\cos(t)}dt\right) = 0$$

Théorème 2.4 (Formule de la moyenne (Généralisation))

Soient f *une fonction réelle continue sur* $[a,b]$ *et* g *intégrable sur* $[a,b]$ *avec* g *de signe constant. Alors il existe* $c\in[a,b]$ *tel que*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx.$$

♡

Démonstration On peut supposer que g est positive (sinon on peut considérer $-g$). La fonction f est continue sur $[a,b]$, donc elle est bornée et atteint ses bornes :

$$m = \min\{f(x) : a\leqslant x\leqslant b\}, \quad M = \max\{f(x) : a\leqslant x\leqslant b\}$$

Par ailleurs on a ;

$$m\int_a^b g(x)dx \leqslant \int_a^b f(x)g(x)dx \leqslant M\int_a^b g(x)dx$$

- Si $\int_a^b g(x)dx = 0$, d'après la dernière inégalité, $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$ et le théorème devient trivial.
- Si $\int_a^b g(x)dx \neq 0$ alors $\int_a^b g(x)dx > 0$ et les inégalités précédentes nous donnent

$$m \leqslant \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \leqslant M$$

Le théorème des valeurs intermédiaires nous assure l'existence d'un $c\in[a,b]$ tel que $f(c) = \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$.
Ce qu'il fallait démontrer. □

Théorème 2.5 (Deuxième Formule de la moyenne)

Soient f et g deux fonctions numériques continues sur $[a,b]$ telles que f est positive et décroissante et g est de signe constant sur $[a,b]$, alors

$$\text{il existe } c \in [a,b] \text{ tel que } \int_a^b f(x)g(x)dx = f(a)\int_a^c g(x)dx.$$

Démonstration Considérons le cas où g est continue et négative sur $[a,b]$. Comme f est positive et décroissante, on a : $0 \leq f(x) \leq f(a)$ pour tout $x \in [a,b]$ et par suite : $0 \geq f(x)g(x) \geq f(a)g(x)$.

Par conséquent on a : $f(a)\int_a^b g(x)dx = \int_a^b f(a)g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq 0$

En posant $F(x) = f(a)\int_a^x g(x)dx$ on vérifie facilement que :

- La fonction F est continue sur $[a,b]$
- $F(a) = 0$ et $F(b) = f(a)\int_a^b g(x)dx \leq 0$

donc

$$F(b) \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq F(a) = 0$$

Alors d'après le TVI , il existe $c \in [a,b]$ tel que :

$$F(c) = \int_a^b f(x)g(x)dx = f(a)\int_a^c g(x)dx.$$

□

2.2.7 Intégrales et produits

Proposition 2.9

Si f et g sont deux fonctions bornées et intégrables sur $[a,b]$ alors fg est bornée et intégrable sur $[a,b]$.
En général $\int_a^b (fg)(t)dt \neq \left(\int_a^b f(t)dt\right)\left(\int_a^b g(t)dt\right)$.

Démonstration

- Cas où f et g sont toutes les deux positives. On pose

$$M = \max\{f(x), a \leqslant x \leqslant b\} \text{ et } N = \max\{g(x), a \leqslant x \leqslant b\}$$

Par définition, il existe des fonctions en escalier $(\varphi_n)_n, (\psi_n)_n, (u_n)_n$ et $(v_n)_n$ telles que

$$\varphi_n \leqslant f \leqslant \psi_n \text{ et } u_n \leqslant g \leqslant v_n$$

Posons

$$\varphi_n'(x) = \max\{\varphi_n(x), 0\}, \psi_n'(x) = \min\{\psi_n(x), M\}$$
$$u_n'(x) = \max\{u_n(x), 0\}, v_n'(x) = \min\{v_n(x), N\}$$

Ce sont toutes des fonctions en escaliers qui vérifient bien :

$$\varphi_n \leqslant \varphi_n' \text{ et } 0 \leqslant \varphi_n' \leqslant f \leqslant \psi_n' \leqslant \psi_n$$
$$u_n \leqslant u_n' \text{ et } 0 \leqslant u_n' \leqslant g \leqslant v_n' \leqslant v_n$$

A cause de la positivité, on aura donc

$$\varphi_n' u_n' \leqslant fg \leqslant \psi_n' v_n'$$

les fonctions qui encadrent fg sont en escalier. Montrons la convergence

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b (\psi_n' v_n' - \varphi_n' u_n')(t)dt = 0$$

Pour cela on va utiliser les assertion satisfaites suivantes

$$\begin{aligned} v_n' &\leqslant N, \quad \varphi_n' \leqslant \psi_n' \leqslant M \\ 0 &\leqslant \psi_n' - \varphi_n' \leqslant \psi_n - \varphi_n \\ 0 &\leqslant v_n' - u_n' \leqslant v_n - u_n \\ \lim_{n \to +\infty} \int_a^b &\left(\psi_n - \varphi_n\right)(t) dt = 0 \\ \lim_{n \to +\infty} \int_a^b &\left(v_n - u_n\right)(t) dt = 0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

donc :

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \int_a^b \left(\psi_n' v_n' - \varphi_n' u_n'\right)(t) dt = \int_a^b \left(\psi_n' v_n' - \varphi_n' v_n' + \varphi_n' v_n' - \varphi_n' u_n'\right)(t) dt \\ &= \int_a^b \left(\psi_n' v_n' - \varphi_n' v_n'\right)(t) dt + \int_a^b \left(\varphi_n' v_n' - \varphi_n' u_n'\right)(t) dt \\ &= \int_a^b v_n'(t) \left(\psi_n' - \varphi_n'\right)(t) dt + \int_a^b \varphi_n'(t) \left(v_n' - u_n'\right)(t) dt \\ &\leqslant \int_a^b v_n'(t) \left(\psi_n' - \varphi_n'\right)(t) dt + \int_a^b \psi_n'(t) \left(v_n' - u_n'\right)(t) dt \\ &\leqslant N \int_a^b \left(\psi_n' - \varphi_n'\right)(t) dt + M \int_a^b \left(v_n' - u_n'\right)(t) dt \\ &\leqslant N \int_a^b \left(\psi_n - \varphi_n\right)(t) dt + M \int_a^b \left(v_n - u_n\right)(t) dt \end{aligned}$$

(2.1) montre que

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b \left(\psi_n' v_n' - \varphi_n' u_n'\right)(t) dt = 0$$

Donc fg est intégrable.

- Cas où f et g bornées intégrables non nécessairement positives. Posons

$$m = \min\{f(x), a \leqslant x \leqslant b\} \text{ et } m' = \min\{g(x), a \leqslant x \leqslant b\}$$

Les fonctions $f - m$ et $g - m'$ qui sont bornées et intégrables sont positives. D'après le cas précédent, $(f - m)\left(g - m'\right)$, est intégrable. Puisque

$$fg = (f - m)\left(g - m'\right) + mg + m'f - mm'$$

on en déduit que fg est bornée Riemann intégrable.
Pour voir qu'on n'a pas toujours l'égalité, il suffit de prendre l'exemple où $[a, b] = [0, 2]$ et $f = g = 1$

$$\int_0^2 (fg)(t) dt = \int_0^2 dt = 2 \neq 4 = \left(\int_0^2 dt\right)^2 = \int_0^2 (f)(t) dt \times \int_0^2 (g)(t) dt$$

□

Théorème 2.6 (Inégalité de Cauchy-Schwartz)

Soient f et g deux fonctions bornées et intégrables sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, alors

$$\left(\int_a^b f(x) g(x) dx\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b f(x)^2 dx\right)\left(\int_a^b g(x)^2 dx\right)$$

♡

Démonstration Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. La fonction $f + \lambda g$ est intégrable, donc $(f + \lambda g)^2$ l'est aussi. Comme c'est une fonction positive, alors

$$\int_a^b (f(x) + \lambda g(x))^2 dx \geqslant 0$$

Ainsi

$$\lambda^2 \int_a^b (g(x))^2 dx + 2\lambda \int_a^b f(x)g(x)dx + \int_a^b (f(x))^2 dx \geqslant 0$$

est un polynôme de degré deux en λ et qui est toujours du signe du coefficient $\int_a^b (g(x))^2 dx$ de λ^2, donc son discriminant est négatif, c'est-à-dire :

$$4\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 - 4\left(\int_a^b (f(x))^2 dx\right)\left(\int_a^b (g(x))^2 dx\right) \leqslant 0$$

d'où

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b f(x)^2 dx\right)\left(\int_a^b g(x)^2 dx\right)$$

□

2.3 Familles de fonctions intégrables

2.3.1 Manipulation de fonctions intégrables

Proposition 2.10

Soient f une fonction bornée et intégrable et g une fonction définie sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ et égale à f sauf sur un nombre finis de points, alors g est intégrable et

$$\int_a^b g(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

♠

Démonstration Par hypothèse il existe une subdivision $S = (x_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ de $[a, b]$ telle que $f = g$ sur chacun des intervalles $]x_i, x_{i+1}[$. La fonction $f - g$ est donc nulle sur chacun des intervalles $]x_i, x_{i+1}[$. En d'autres termes, la fonction $f - g$ est en escalier. Elle est donc intégrable et son intégrale est clairement nulle. La fonction $g = f - (f - g)$ est donc intégrable et son intégrale est égale à celle de f. □

Remarque Cette proposition signifie que si on change les valeurs d'une fonction intégrable sur $[a, b]$ en un nombre fini de points de $[a, b]$ alors elle reste encore intégrable et garde la même intégrale.

2.3.2 Monotonie

Théorème 2.7

Toute fonction monotone sur un compact $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ est intégrable.

♡

Démonstration Supposons que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est croissante (sinon il suffit de considérer $-f$ qui sera croissante).

Pour tout $n \geqslant 1$ considérons la subdivision : $S_n = \left\{x_0 = a, x_1 = a + \frac{b-a}{n}, \ldots, x_i = a + i\frac{b-a}{n}, \ldots, x_n = b\right\}$, qui permet de construire les fonctions en escalier :

$$\varphi_n(t) = f(x_i), \forall t \in]x_i, x_{i+1}[, i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

et

$$\psi_n(t) = f(x_{i+1}), \forall t \in]x_i, x_{i+1}[, i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

On a évidemment $\varphi_n \leqslant f \leqslant \psi_n$ et :

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \int_a^b (\psi_n - \varphi_n)(t)dt &= \sum_{i=0}^{i=n-1} (f(x_{i+1}) - f(x_i))(x_{i+1} - x_i) \\ &= \sum_{i=0}^{i=n-1} (f(x_{i+1}) - f(x_i)) \frac{b-a}{n} \\ &= \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{i=n-1} (f(x_{i+1}) - f(x_i)) \\ &= \frac{b-a}{n}(f(b) - f(a)) \end{aligned}$$

ce qui implique que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b (\psi_n - \varphi_n)(t)dt = 0$, par suite f est intégrable sur $[a, b]$. □

2.3.3 Continuité

Définition 2.6

Une fonction f est continue en un point a d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta_{a,\varepsilon} > 0, |x - a| < \eta_{a,\varepsilon} \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

f est dite continue sur I si f est continue en tout point a de I. ♣

Remarque Dans cette définition, il faut noter que le $\eta_{a,\varepsilon} > 0$ dépend de ε et de a.

Définition 2.7

Une fonction f est dite uniformément continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta_\varepsilon > 0, \quad |x - y| < \eta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

♣

Théorème 2.8 (Heine)

Toute fonction continue sur un intervalle fermé borné $[a, b]$ est uniformément continue sur $[a, b]$ ♡

Démonstration Si f est continue, montrons qu'elle est uniformément continue, c'est-à-dire :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta_\varepsilon > 0, \quad |x - y| < \eta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Raisonnons par absurde, et supposons que $\exists \varepsilon_0 > 0$ tel que $\forall \eta > 0$ on peut trouver x_η, y_η dans $[a, b]$ tels que $|x_\eta - y_\eta| < \eta$ et $|f(x_\eta) - f(y_\eta)| \geqslant \varepsilon_0$, ceci étant vrai pour tout $\eta > 0$ en particulier pour les $\frac{1}{n}$, $n \geqslant 1$. Il existe donc des suites $(x_n)_{n\geqslant1}$ et $(y_n)_{n\geqslant1}$ dans $[a, b]$ telles que

$$|x_n - y_n| < 1/n \quad \text{et} \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geqslant \varepsilon_0 \qquad (\star)$$

D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une sous-suite extraite $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\geqslant1}$ qui converge dans $[a, b]$ vers c.

Alors $\left(y_{\varphi(n)}\right)_{n\geqslant1}$ converge aussi vers c si $n \to +\infty$, puisque

$$\left|y_{\varphi(n)} - c\right| \leqslant \left|y_{\varphi(n)} - x_{\varphi(n)}\right| \leqslant \left|x_{\varphi(n)} - c\right| < \frac{1}{\varphi(n)} + \left|x_{\varphi(n)} - c\right| \to 0$$

écrivons $(\star)$ pour $\varphi(n)$, on aura : $\left|f\left(x_{\varphi(n)}\right) - f\left(y_{\varphi(n)}\right)\right| \geq \varepsilon$, ce qui mène à la contradiction avec la continuité de f en c si on fait tendre n vers l'infini. □

Théorème 2.9

Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue alors f est intégrable. ♡

Démonstration Par hypothèse, f est continue, d'après le théorème de Heine, f est aussi uniformément continue, donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ telle que

$$|x-y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

On considère une subdivision $(x_i)_{0 \leqslant i \leqslant m-1}$ telles que $\max(x_{i+1} - x_i) < \eta$, puisque $\frac{b-a}{m}$ converge vers zéro, soit $m \geqslant 1$ tel que $\frac{b-a}{m} < \eta$, Il suffit de prendre $S = \left\{x_i = a + i\frac{b-a}{m}\right\}_{0 \leqslant i \leqslant m-1}$, on définit les fonctions en escalier :

$$\varphi_\varepsilon(t) = f(x_i) - \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \quad \text{et} \quad \psi_\varepsilon(t) = f(x_i) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}, \quad x_i < t < x_{i+1}, 0 < i < n-1$$

Pour tout $t \in]x_i, x_{i+1}[$ on a $0 < t - x_i < x_{i+1} - x_i < \eta$ donc $|f(x_i) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ ce qui signifie que

$$f(x_i) - \frac{\varepsilon}{2(b-a)} < f(t) < f(x_i) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

c'est-à-dire

$$\varphi_\varepsilon(t) < f(t) < \psi_\varepsilon(t)$$

par ailleurs

$$\begin{aligned}
\int_a^b (\psi_\varepsilon(t) - \varphi_\varepsilon(t))\, dt &= \sum_{i=0}^{n-1} \left(f(x_i) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} - f(x_i) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \right)(x_{i+1} - x_i) \\
&= \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{\varepsilon}{(b-a)} \right) \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

Pour $\varepsilon = \frac{1}{n}$, on aura alors des fonctions en escalier $(\varphi_n)_n$, $(\psi_n)_n$ telles que :

$$\varphi_n \leqslant f \leqslant \psi_n \quad \text{et} \quad \lim_{n \to +\infty} \int_a^b (\psi_n - \varphi_n)(t) dt = 0$$

□

2.3.4 Relation de Chasles

Proposition 2.11 (Relation de Chasles)

Soit f une fonction bornée sur $[a, b]$ et $c \in [a, b]$.

(i) Si f est intégrable sur $[a, b]$ alors f est intégrable sur $[a, c]$ et sur $[c, b]$

(ii) Si f est intégrable sur $[a, c]$ et sur $[c, b]$ alors f est intégrable sur $[a, b]$

(iii) Si f est intégrable sur $[a, b]$ alors on a la ***relation de Chasles***

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

♠

Démonstration La relation de Chasles est valable pour les fonctions en escalier.

(i) Si pour $\varepsilon > 0$ il existe φ et ψ en escalier sur $[a, b]$ telles que

$$\varphi \leqslant f \leqslant \psi \quad \text{et} \quad \int_a^b (\psi - \varphi)(t)dt < \varepsilon$$

alors les restrictions ψ_1 et φ_1 (respectivement ψ_2 et φ_2 de φ et ψ à $[a,c]$ (respectivement à $[c,b]$) sont en escalier et encadrent f avec

$$0 \leqslant \int_a^b (\psi_1 - \varphi_1)(t)dt < \varepsilon \text{ et } 0 \leqslant \int_a^b (\psi_2 - \varphi_2)(t)dt < \varepsilon$$

alors f est intégrable sur $[a,c]$ et sur $[c,b]$.

(ii) Si f est intégrable sur $[a,c]$ et sur $[c,b]$ alors pour $\varepsilon > 0$ il existe ψ_1, φ_1 et ψ_2, φ_2 respectivement sur $[a,c]$ et $[c,b]$ telles que $\varphi_1 \leqslant f \leqslant \psi_1$ et $\varphi_2 \leqslant f \leqslant \psi_2$ avec $0 \leqslant \int_a^c (\psi_1 - \varphi_1)(t)dt < \varepsilon/2$ et $0 \leqslant \int_c^b (\psi_2 - \varphi_2)(t)dt < \varepsilon/2$.

Considérons les fonctions φ et ψ données sur $[a,b]$ par

$$\varphi(x) = \begin{cases} \varphi_1(x) & \text{si } a \leqslant x < c \\ \varphi_2(x) & \text{si } c \leqslant x \leqslant b \end{cases}$$

et

$$\psi(x) = \begin{cases} \psi_1(x) & \text{si } a \leqslant x < c \\ \psi_2(x) & \text{si } c \leqslant x \leqslant b \end{cases}$$

Il est claire que φ et ψ sont en escalier sur $[a,b]$ avec

$$0 \leqslant \int_a^b (\psi - \varphi)(t)dt = \int_a^c (\psi_1 - \varphi_1)(t)dt + \int_c^b (\psi_2 - \varphi_2)(t)dt < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

ainsi f est intégrable sur $[a,b]$

(iii) Pour les fonctions en escalier on a si

$$\varphi_{1,n} \leqslant f \leqslant \psi_{1,n} \text{ sur } [a,c] \text{ avec } \lim_{n\to+\infty} \int_a^c (\psi_{1,n} - \varphi_{1,n})(t)dt = 0$$

et

$$\varphi_{2,n} \leqslant f \leqslant \psi_{2,n} \text{ sur } [c,b] \text{ avec } \lim_{n\to+\infty} \int_c^b (\psi_{2,n} - \varphi_{2,n})(t)dt = 0$$

alors φ_n et ψ_n définie comme φ et ψ ci-dessus satisfont

$$\varphi_n \leqslant f \leqslant \psi_n \text{ sur } [c,b] \text{ avec } \lim_{n\to+\infty} \int_c^b (\psi_n - \varphi_n)(t)dt = 0$$

d'où

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t)dt &= \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \psi_n(t)dt \\ &= \lim_{n\to+\infty} \left(\int_a^c \psi_n(t)dt + \int_c^b \psi_n(t)dt \right) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \int_a^c \psi_n(t)dt + \lim_{n\to+\infty} \int_c^b \psi_n(t)dt \\ &= \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt \end{aligned}$$

□

Corollaire 2.2

Si f est intégrable sur $[a,b]$ alors

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

En particulier, la relation

$$\int_e^d f(x)dx = \int_e^c f(x)dx + \int_c^d f(x)dx$$

est vraie quelques que soient les relations d'ordre entre e, c *et* d *dans* $[a, b]$.

Démonstration Puisque $0 = \int_a^a f(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_b^a f(t)dt$ alors $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ □

Théorème 2.10

Si f *est continue (respectivement monotone) par morceaux sur* $[a, b]$ *alors* f *est intégrable sur* $[a, b]$.

Démonstration Se déduit d'après la relation de Chasles et la propriété de la continuité et de la monotonie. □

Proposition 2.12

Soient f *une fonction continue de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *et* a *un réel.*

- *Si* f *est impaire, alors* $\int_{-a}^a f(t)dt = 0$.
- *Si* f *est paire, alors* $\int_{-a}^a f(t)dt = 2\int_0^a f(t)dt$.
- *Si* f *est périodique de période* $T > 0$, *alors* $\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt$.

Démonstration

- Une fonction f est impaire donc $f(-t) = -f(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
$$\int_{-a}^a f(t)\,dt = \int_{-a}^0 f(t)\,dt + \int_0^a f(t)\,dt.$$
Effectuons un changement de variable dans la première intégrale : posons $u = -t$, donc $du = -dt$, et les bornes passent de $t = -a$ à $t = 0$ à $u = a$ à $u = 0$:
$$\int_{-a}^0 f(t)\,dt = \int_a^0 f(-u)(-du).$$
Puisque f est impaire, $f(-u) = -f(u)$, donc :
$$\int_{-a}^0 f(t)\,dt = \int_a^0 -f(u)(-du) = \int_a^0 f(u)\,du = -\int_0^a f(u)\,du.$$
D'où :
$$\int_{-a}^a f(t)dt = -\int_0^a f(u)du + \int_0^a f(t)dt = -\int_0^a f(t)dt + \int_0^a f(t)dt = 0.$$
- Si f est paire alors $f(-t) = f(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
$$\int_{-a}^a f(t)dt = \int_{-a}^0 f(t)dt + \int_0^a f(t)dt.$$
Effectuons le même changement de variable $u = -t$ dans la première intégrale :
$$\int_{-a}^0 f(t)dt = \int_a^0 f(-u)(-du).$$
Puisque f est paire, $f(-u) = f(u)$, donc :
$$\int_{-a}^0 f(t)\,dt = \int_a^0 f(u)(-du) = \int_a^0 -f(u)\,du = -\int_a^0 f(u)\,du = \int_0^a f(u)\,du.$$
Donc :
$$\int_{-a}^a f(t)\,dt = \int_0^a f(u)\,du + \int_0^a f(t)\,dt = \int_0^a f(t)\,dt + \int_0^a f(t)\,dt = 2\int_0^a f(t)\,dt.$$
- Si f est périodique de période T alors $f(t+T) = f(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. montrons que :
$$\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt.$$
Effectuons un changement de variable dans lintégrale $\int_a^{a+T} f(t)\,dt$: posons $u = t - a$, donc $du = dt$, et

les bornes passent de $t = a$ à $t = a + T$ à $u = 0$ à $u = T$:

$$\int_a^{a+T} f(t)\,dt = \int_0^T f(u+a)\,du.$$

Posons $g(u) = f(u + a)$. Puisque f est périodique de période T,

$$g(u+T) = f(u+a+T) = f(u+a) = g(u),$$

Ainsi, g est aussi périodique de période T. L'intégrale devient :

$$\int_0^T f(u+a)du = \int_0^T g(u)du.$$

Pour une fonction périodique continue, l'intégrale sur un intervalle de longueur T est indépendante du point de départ. Considérons la différence :

$$\int_a^{a+T} f(t)dt - \int_0^T f(t)dt = \int_0^T f(u+a)du - \int_0^T f(u)du = \int_0^T [f(u+a) - f(u)]du.$$

Puisque $f(u+T) = f(u)$, l'intégrale d'une différence sur une période complète dépend de la translation a. Cependant, posons $F(x) = \int_0^x f(t)dt$:

$$\int_a^{a+T} f(t)dt = F(a+T) - F(a), \qquad \int_0^T f(t)dt = F(T) - F(0).$$

Comme $f(t+T) = f(t)$, $F'(t+T) = F'(t)$, et $F(t+T) = F(t)+C$ (où C est constant sur une période). Puisque $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ et f est continue :

$$F(T) = \int_0^T f(t)\,dt, \quad F(a+T) = F(a) + \int_a^{a+T} f(t)\,dt,$$

mais $\int_a^{a+T} f(t)\,dt$ doit être invariant.

$$\int_a^{a+T} f(t)\,dt = \int_0^T f(u+a)\,du = \int_0^T f(u)\,du,$$

car les valeurs de f se répètent sur une période T. Donc :

$$\int_a^{a+T} f(t)\,dt = \int_0^T f(t)\,dt.$$

□

Chapitre 3 Calcul des primitives

Dans ce chapitre, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction bornée intégrable sur $[a,b]$.

3.1 Théorème fondamental

Définition 3.1

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Une fonction $F : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite primitive de f si F est dérivable sur $[a,b]$ et $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in [a,b]$ ♣

Remarque Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

1. Si F est une primitive de f, alors $F + \alpha$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ est aussi primitive de f.
2. Si F et G deux primitives de f, alors $F - G = C^{te}$.
3. Si f est continue et F une primitive de f, alors F est de classe $\mathscr{C}^1$.

Notation

Une primitive de f est appelée intégrale indéfinie de f et on la note par $\int f(x)dx$, c-à-d si F est une primitive de F on aura

$$\int f(x)dx = F(x) + C^{te}.$$

Exemple 3.1

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$. Alors $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $F(x) = \frac{x^3}{3}$ est une primitive de f. La fonction définie par $F(x) = \frac{x^3}{3} + 1$ est aussi une primitive de f.
2. Soit $g : I = [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \sqrt{x}$. Alors $G : I \to \mathbb{R}$ définie par $G(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ est une primitive de g sur I. Pour tout $c \in \mathbb{R}$, la fonction $G + c$ est aussi une primitive de g.

Remarque Une fonction intégrable n'admet pas forcément une primitive. Considérons par exemple la fonction

$$f : [0,1] \to \mathbb{R} \text{ définie par } f(x) = 0 \text{ si } x \in [0, \frac{1}{2}[\text{ et } f(x) = 1 \text{ si } x \in [\frac{1}{2}, 1].$$

f est intégrable sur $[0,1]$ mais elle n'admet pas de primitive sur $[0,1]$. En effet, par l'absurde si on suppose que F était une primitive de f, par exemple la primitive qui vérifie $F(0) = 0$, alors $F(x) = 0$ pour $x \in [0, \frac{1}{2}[$ et $F(x) = x - \frac{1}{2}$ pour $x \in [\frac{1}{2}, 1]$. Mais alors on obtient une contradiction car F n'est pas dérivable en $\frac{1}{2}$ alors que par définition une primitive doit être dérivable.

Théorème 3.1

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. La fonction définie sur $[a,b]$ par : $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est dérivable sur $]a,b[$ et $F'(x) = f(x)$ $\forall x \in]a,b[$, (F est une primitive de f). ♡

Démonstration Soit $x \in [a,b]$ et $h \in \mathbb{R}$ tel que $x + h \in [a,b]$. On a

$$F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+h} f(t)dt.$$

f étant continue sur $[x, x+h]$, donc il existe $c_x \in [x, x+h]$ tel que

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt = f(c_x).$$

Quand $h \to 0$, $c_x \to x$, donc $f(c_x) \to f(x)$, d'où $F'(x) = f(x)$ $\forall x \in [a,b]$. □

Remarque Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

1. La fonction $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est la primitive de f qui s'annule en a.
2. Si F est une primitive de f, alors $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$, et on écrit

$$\int_a^b f(t)dt = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a) \text{ (Formule de Newton-Leibniz).}$$

En effet, $\int_a^x f(t)dt$ est une primitive de f, donc $F(x) - \int_a^x f(t)dt = C^{te}$. Or $\int_a^a f(t)dt = 0$, donc $F(a) = C^{te}$, d'où $F(x) = \int_a^x f(t)dt + F(a)$ et $F(b) = \int_a^b f(t)dt + F(a)$ ce qui prouve que $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$.

Proposition 3.1

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Si $|f| \leqslant M$ sur $[a,b]$ et $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ une primitive de f alors pour tous x et y dans $[a,b]$, on a $|F(x) - F(y)| \leqslant M|x-y|$.

Démonstration Supposons que $x \geqslant y$

$$\begin{aligned}
|F(x) - F(y)| &= \left| \int_a^x f(t)dt - \int_a^y f(t)dt \right| \\
&= \left| \int_a^x f(t)dt + \int_y^a f(t)dt \right| \\
&= \left| \int_y^x f(t)dt \right| \\
&\leq \int_y^x M dt = M(x-y)
\end{aligned}$$

□

Théorème 3.2

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $x_0 \in [a,b]$.

(a) Si f admet une limite réelle l à droite au point x_0 alors F admet une dérivée à droite en x_0 égale à l :

$$\lim_{x \to x_0^+} f(t) = l \in \mathbb{R} \Rightarrow F'_d(x_0) = l$$

(b) Si f admet une limite réelle l à gauche au point x_0 alors F admet une dérivée à gauche en x_0 égale à l :

$$\lim_{x \to x_0^-} f(t) = l \in \mathbb{R} \Rightarrow F'_g(x_0) = l$$

(c) Si f admet une limite réelle l au point x_0 alors F admet une dérivée en x_0 égale à l :

$$\lim_{x \to x_0} f(t) = l \in \mathbb{R} \Rightarrow F'(x_0) = l$$

(d) Si f est continue au point x_0 alors F a une dérivée en x_0 égale à $f(x_0)$:

$$\lim_{x \to x_0} f(t) = f(x_0) \in \mathbb{R} \Rightarrow F'(x_0) = f(x_0)$$

Démonstration

(a) Si f admet une limite réelle l à droite au point x_0 c'est-à-dire :

$$\forall \varepsilon, \exists \eta > 0 : 0 < h < \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon, \forall t \in]x_0, x_0 + h[$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}-l\right| &= \left|\frac{F(x_0+h)-F(x_0)-lh}{h}\right| \\ &= \frac{1}{h}\left|\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt - lh\right| \\ &\leqslant \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} |(f(t)-l)|dt \\ &\leqslant \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} \varepsilon dt \\ &= \varepsilon\end{aligned}$$

d'où $F_d'(x_0) = l$.

(b) De la même façon que (a).

(c) En utilisant (a) et (b).

(d) En utilisant (c) pour $l = f(x_0)$.

□

Proposition 3.2

Soient F une primitive de f et G une primitive de g. Alors $F+G$ est une primitive de $f+g$. Et si $\lambda \in \mathbb{R}$ alors λF est une primitive de λf. ♠

Démonstration Par dérivation on prouve facilement ce résultat. □

Théorème 3.3

Soient f une fonction continue sur $[a,b]$, et g et h deux fonctions dérivables sur I à valeurs dans $[a,b]$. Alors la fonction $F(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(t)dt$ est dérivable sur I, et on a :

$$F'(x) = h'(x)f(h(x)) - g'(x)f(g(x)).$$

♡

Démonstration Posons $G(x) = \int_a^x f(t)dt$, alors $G'(x) = f(x)$, or

$$F(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(t)dt = \int_{g(x)}^{h(x)} G'(t)dt = G(h(x)) - G(g(x)),$$

d'où

$$F'(x) = h'(x)G'(h(x)) - g'(x)G'(g(x)) = h'(x)f(h(x)) - g'(x)f(g(x)).$$

□

Exemple 3.2 Cherchons la dérivée de $g(x) = \int_{-x^2}^{2x^5} e^{\sin t}dt$.

Les deux fonctions : $x \mapsto -x^2$ et $x \mapsto 2x^5$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$, et $x \mapsto e^{\sin(x)}$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc g est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a :

$$g'(x) = \left(2x^5\right)' e^{\sin\left(2x^5\right)} - \left(-x^2\right)' e^{\sin\left(-x^2\right)} = 10x^4 e^{\sin\left(2x^5\right)} + 2xe^{\sin\left(-x^2\right)}.$$

✍ **Exercice 3.1** Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ on pose : $f(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^3+t}}$.

1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que pour tout $x > 0$ on a : $0 < f(x) \leq \sqrt{x}$. En déduire $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$.
3. Montrer que pour tout $x > 0$, on a : $0 < f(x) \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
4. Dresser le tableau de variation de f.
5. Représenter f.

Solution

1. *On a : $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t^3+t}}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$, donc elle est continue sur tout intervalle $[x, 2x]$ pour tout $x > 0$, d'où l'existence de f sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus $x \mapsto x$ et $x \mapsto 2x$ sont de classe $\mathscr{C}^1$, alors f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.*

2. *Pour tout $x>0$, on a : $f(x)>0$. D'autre part pour tout $t\in[x,2x]$ on a $\frac{1}{\sqrt{t^3+t}}\leq\frac{1}{\sqrt{x^3+x}}$. Ainsi*
$$\int_x^{2x}\frac{1}{\sqrt{t^3+t}}dt\leq\int_x^{2x}\frac{1}{\sqrt{x^3+x}}dt=\frac{2x-x}{\sqrt{x^3+x}}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+1}}\leq\sqrt{x},$$
donc $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0.$
3. *On a : Pour tout $x>0$, $0<f(x)\leq\frac{x}{\sqrt{x^3+x}}<\frac{x}{\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x}}$, donc :* $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0.$
4. *Pour tout $x>0$ on a : $f'(x)=\frac{2}{\sqrt{8x^3+2x}}-\frac{1}{\sqrt{x^3+x}}=\frac{1}{\sqrt{x}}.\frac{1}{\sqrt{x^2+1}\sqrt{8x^2+2}}.\frac{-2\left(2x^2-1\right)}{2\sqrt{x^2+1}+\sqrt{8x^2+2}}$. Donc le signe de f' est le signe de $-\left(2x^2-1\right)$*

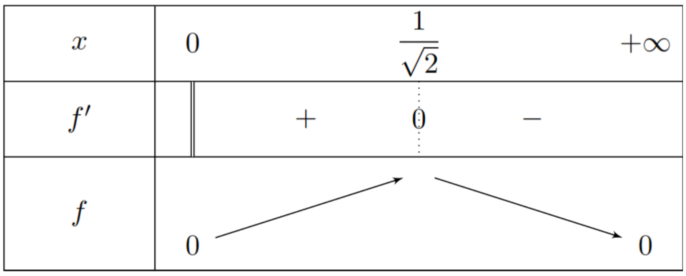

Figure 3.1

5. *Le graphe de f :*

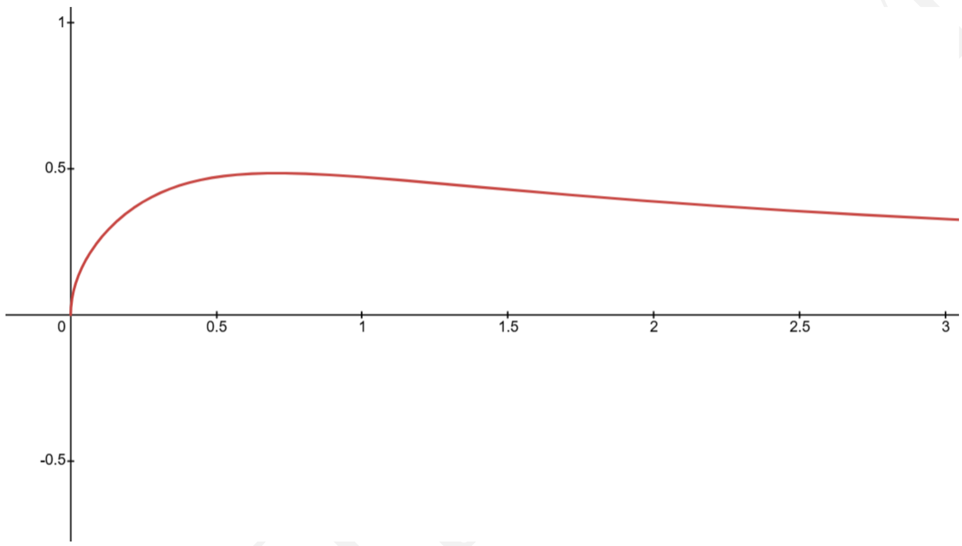

Figure 3.2 – Le graphe de f

3.1.1 Primitives de quelques fonctions usuelles

Ci-dessous quelques primitives usuelles à connaître par cœur,

$\int kdx=kx+c$ sur $\mathbb{R}$	$\int\frac{1}{\cos^2x}dx=\tan x+c, k\in\mathbb{Z}$ sur $]\frac{-\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi[$
$\int e^xdx=e^x+c$ sur $\mathbb{R}$	$\int\frac{1}{x}dx=\ln\lvert x\rvert+c$ sur $]0,+\infty[$ ou $]-\infty,0[$
$\int\cos xdx=\sin x+c$ sur $\mathbb{R}$	$\int\sinh xdx=\cosh x+c$ sur $\mathbb{R}$
$\int\sin xdx=-\cos x+c$ sur $\mathbb{R}$	$\int\cosh xdx=\sinh x+c$ sur $\mathbb{R}$
$\int x^ndx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+c$ sur $\mathbb{R}$	$\int x^\alpha dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+c,(\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{-1\})$ sur $]0,+\infty[$
$\int\ln(x)dx=x\ln(x)-x+c$ sur $]0,+\infty[$	$\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\begin{cases}\arcsin x+c\\ \frac{\pi}{2}-\arccos x+c\end{cases}$ sur $]-1,1[$
$\int\frac{1}{1+x^2}dx=\arctan x+c$ sur $\mathbb{R}$	$\int\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx=\begin{cases}argsinhx+c\\ \ln(x+\sqrt{x^2+1})+c\end{cases}$ sur $\mathbb{R}$
$\int\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx=\begin{cases}argcoshx+c\\ \ln(x+\sqrt{x^2-1})+c\end{cases}$ sur $]1,+\infty[$	

3.2 Méthodes d'intégration

3.2.1 Intégration par parties

Théorème 3.4

Soient u et v deux fonctions de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$, alors on a

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [uv]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

Démonstration On a $(uv)' = u'v + uv'$, donc $\int_a^b (u'v+uv') = \int_a^b (uv)' = [uv]_a^b$, d'où $\int uv' = [uv] - \int u'vdx$.
□

Exemple 3.3

1. Calcul de $\int_0^1 xe^x dx$.
   On pose $u(x) = x$ et $v'(x) = e^x$. Alors on a $u'(x) = 1$ et une primitive de v' est simplement $v(x) = e^x$. La formule d'intégration par parties donne :
$$\begin{aligned}\int_0^1 xe^x dx &= \int_0^1 u(x)v'(x)dx \\ &= [u(x)v(x)]_0^1 - \int_0^1 u'(x)v(x)dx \\ &= [xe^x]_0^1 - \int_0^1 1\cdot e^x dx \\ &= \left(1\cdot e^1 - 0\cdot e^0\right) - [e^x]_0^1 \\ &= e - \left(e^1 - e^0\right) = 1\end{aligned}$$
2. Calcul de $\int_1^e x\ln x dx$.
   On pose cette fois $u = \ln x$ et $v' = x$. Ainsi $u' = \frac{1}{x}$ et $v = \frac{x^2}{2}$. Alors
$$\int_1^e \ln x\cdot xdx = \int_1^e uv' = [uv]_1^e - \int_1^e u'v = \left[\ln x\cdot\frac{x^2}{2}\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x}\frac{x^2}{2}dx$$
$$= \left(\ln e\frac{e^2}{2} - \ln 1\frac{1^2}{2}\right) - \frac{1}{2}\int_1^e xdx = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2+1}{4}$$
3. Calcul de $\int \arcsin xdx$.
   Pour déterminer une primitive de $\arcsin x$, nous faisons artificiellement apparaître un produit en écrivant $\arcsin x = 1\cdot\arcsin x$ pour appliquer la formule d'intégration par parties. On pose $u = \arcsin x$, $v' = 1$ (et donc $u' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et $v = x$) alors
$$\begin{aligned}\int 1\cdot\arcsin xdx &= [x\arcsin x] - \int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx \\ &= [x\arcsin x] - \left[-\sqrt{1-x^2}\right] \\ &= x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c\end{aligned}$$
4. Calcul de $\int x^2e^x dx$. On pose $u = x^2$ et $v' = e^x$ pour obtenir :
$$\int x^2e^xdx = \left[x^2e^x\right] - 2\int xe^xdx$$
   On refait une deuxième intégration par parties pour calculer
$$\int xe^xdx = [xe^x] - \int e^xdx = (x-1)e^x + c$$
   D'où

$$\int x^2 e^x dx = \left(x^2 - 2x + 2\right) e^x + c$$

5. $\int (x+2)e^{3x}\, dx$

   On pose :

$$u'(x) = e^{3x} \quad \Rightarrow \quad u(x) = \frac{1}{3}e^{3x}$$
$$v(x) = x + 2 \quad \Rightarrow \quad v'(x) = 1$$

   En appliquant la formule d'intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int (x+2)e^{3x}\, dx &= \frac{1}{3}(x+2)e^{3x} - \frac{1}{3}\int e^{3x}\, dx \\ &= \frac{1}{3}(x+2)e^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x} + C\end{aligned}$$

6. $\int (2x+1)\sin(x)\, dx$

   On pose :

$$u'(x) = \sin(x) \quad \Rightarrow \quad u(x) = -\cos(x)$$
$$v(x) = 2x + 1 \quad \Rightarrow \quad v'(x) = 2$$

   En appliquant la formule d'intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int (2x+1)\sin(x)\, dx &= -(2x+1)\cos(x) + 2\int \cos(x)\, dx \\ &= -(2x+1)\cos(x) + 2\sin(x) + C\end{aligned}$$

7. $\int \arcsin(x)\, dx$

   On pose :

$$u'(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad u(x) = x$$
$$v(x) = \arcsin(x) \quad \Rightarrow \quad v'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

   En appliquant la formule d'intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int \arcsin(x)\, dx &= x\arcsin(x) - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx \\ &= x\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + C\end{aligned}$$

8. $\int \arctan(x)\, dx$

   On pose :

$$u'(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad u(x) = x$$
$$v(x) = \arctan(x) \quad \Rightarrow \quad v'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

   En appliquant la formule d'intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int \arctan(x)\, dx &= x\arctan(x) - \int \frac{x}{1+x^2}\, dx \\ &= x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C\end{aligned}$$

3.2.2 Intégration par changement de variable

Théorème 3.5

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $\varphi : J \to I$ une bijection de classe $\mathscr{C}^1$. Pour tout $a, b \in J$

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx = \int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt$$

Si F est une primitive de f alors $F \circ \varphi$ est une primitive de $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$.

Démonstration Comme F est une primitive de f alors $F'(x) = f(x)$ et par la formule de la dérivation de la composition $F \circ \varphi$ on a

$$(F \circ \varphi)'(t) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

Donc $F \circ \varphi$ est une primitive de $f(\varphi(t))\varphi'(t)$.

Pour les intégrales : $\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = [F \circ \varphi]_a^b = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = [F]_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx.$ □

Remarque Comme φ est une bijection de J sur $\varphi(J)$, sa réciproque φ^{-1} existe et est dérivable sauf quand φ s'annule. Si φ ne s'annule pas, on peut écrire $t = \varphi^{-1}(x)$ et faire un changement de variable en sens inverse.

Exemple 3.4 Calculons la primitive $F = \int \tan t dt$.

$$F = \int \tan t dt = \int \frac{\sin t}{\cos t} dt$$

On reconnaît ici une forme $\frac{u'}{u}$ (avec $u = \cos t$ et $u' = -\sin t$) dont une primitive est $\ln|u|$. Donc $F = \int -\frac{u'}{u} = -[\ln|u|] = -\ln|u| + c = -\ln|\cos t| + c$.

Nous allons reformuler tout cela en terme de changement de variable. Notons $\varphi(t) = \cos t$ alors $\varphi'(t) = -\sin t$ donc

$$F = \int -\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} dt$$

Si f désigne la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{x}$, qui est bijective tant que $x \neq 0$, alors $F = -\int \varphi'(t) f(\varphi(t))dt$. En posant $x = \varphi(t)$ et donc $dx = \varphi'(t)dt$, on reconnait la formule du changement de variable, par conséquent

$$F \circ \varphi^{-1} = -\int f(x)dx = -\int \frac{1}{x}dx = -\ln|x| + c$$

Comme $x = \varphi(t) = \cos t$, on retrouve bien $F(t) = -\ln|\cos t| + c$.

Exemple 3.5 Calcul de $\int_0^{1/2} \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}dx$.

Soit le changement de variable $u = \varphi(x) = 1 - x^2$. Alors $du = \varphi'(x)dx = -2xdx$. Pour $x = 0$ on a $u = \varphi(0) = 1$ et pour $x = \frac{1}{2}$ on a $u = \varphi\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$. Comme $\varphi'(x) = -2x$, φ est une bijection de $[0, \frac{1}{2}]$ sur $[1, \frac{3}{4}]$. Alors

$$\begin{aligned} \int_0^{1/2} \frac{xdx}{(1-x^2)^{3/2}} &= \int_1^{3/4} \frac{\frac{-du}{2}}{u^{3/2}} = -\frac{1}{2}\int_1^{3/4} u^{-3/2}du \\ &= -\frac{1}{2}\left[-2u^{-1/2}\right]_1^{3/4} = \left[\frac{1}{\sqrt{u}}\right]_1^{3/4} = \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}} - 1 = \frac{2}{\sqrt{3}} - 1 \end{aligned}$$

Exemple 3.6

1. Pour chercher $\int (at+b)^m\, dt$, avec $m \neq -1$, on fait le changement de variable $x = at+b$. On a alors : $dx = a\, dt$ et l'intégrale indéfinie devient :

$$\int (at+b)^m\, dt = \frac{1}{a}\int x^m\, dx = \frac{1}{a}\frac{x^{m+1}}{m+1} + C = \frac{1}{a}\frac{(at+b)^{m+1}}{m+1} + C$$

2. $\int \frac{1}{a^2+x^2}\, dx = \int \frac{1}{a^2(1+\frac{x^2}{a^2})}\, dx = \frac{1}{a}\int \frac{1}{(1+\frac{x^2}{a^2})}\, d\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{1}{a}\int \frac{1}{(1+u^2)}\, du = \frac{1}{a}\arctan(u) + C$

   D'où :

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}\, dx = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

3. Pour tout réel a strictement positif, $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\, dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}\, d\left(\frac{x}{a}\right) = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C$

Si a est quelconque, on aboutit à $\arcsin\left(\frac{x}{|a|}\right) + C$.

4. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}}\,d\left(\frac{x}{a}\right) = \operatorname{arg\,sinh}\left(\frac{x}{|a|}\right) + C$
5. Pour calculer $\int t\sin(t^2)\,dt$, on pose $x = t^2$ et par suite $dx = 2t\,dt$, et l'intégrale devient :

$$\int t\sin(t^2)\,dt = \frac{1}{2}\int \sin(t^2)\,2t\,dt = \frac{1}{2}\int \sin(x)\,dx = -\frac{1}{2}\cos(x) + C = -\frac{1}{2}\cos(t^2) + C$$

3.3 Intégration des fractions rationnelles

On sait que toute fraction rationnelle peut être décomposer comme somme d'un polynôme, et d'une partie polaire d'élément simples.

Soit $\frac{P(x)}{Q(x)}$ une fraction rationnelle, où $P(x)$ et $Q(x)$ sont des polynômes à coefficients réels. Alors la fraction $\frac{P(x)}{Q(x)}$ s'écrit comme somme d'un polynôme $E(x) \in \mathbb{R}[x]$ (la partie entière) et d'éléments simples d'une des formes suivantes :

$$\frac{\gamma}{(x-x_0)^k} \quad \text{ou} \quad \frac{\alpha x+\beta}{(ax^2+bx+c)^k} \text{ avec } b^2-4ac<0$$

où $\alpha, \beta, \gamma, a, b, c \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$.

1. On sait intégrer le polynôme $E(x)$.
2. Intégration de l'élément simple $\frac{\gamma}{(x-x_0)^k}$.
   (a). Si $k = 1$ alors $\int \frac{\gamma}{x-x_0}dx = \gamma\ln|x-x_0| + c_0$ (sur $]-\infty, x_0[$ ou $]x_0, +\infty[$.
   (b). Si $k \geqslant 2$ alors $\int \frac{\gamma}{(x-x_0)^k}dx = \gamma\int (x-x_0)^{-k}\,dx = \frac{\gamma}{-k+1}(x-x_0)^{-k+1} + c_0$ (sur $]-\infty, x_0[$ ou $]x_0, +\infty[$).
3. Intégration de l'élément simple $\frac{\alpha x+\beta}{(ax^2+bx+c)^k}$. On écrit cette fraction sous la forme

$$\frac{\alpha x+\beta}{(ax^2+bx+c)^k} = \gamma\frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^k} + \delta\frac{1}{(ax^2+bx+c)^k}$$

   (a). Si $k = 1$, calcul de $\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx$:
   $\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx = \int \frac{u'(x)}{u(x)}dx = \ln|u(x)| + c_0 = \ln\left|ax^2+bx+c\right| + c_0$.
   (b). Si $k \geqslant 2$, calcul de $\int \frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^k}dx$:
   $\int \frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^k}dx = \int \frac{u'(x)}{u(x)^k}dx = \frac{1}{-k+1}u(x)^{-k+1} + c_0 = \frac{1}{-k+1}\left(ax^2+bx+c\right)^{-k+1} + c_0$.
   (c). Si $k = 1$, calcul de $\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx$:
   Par un changement de variable $u = px+q$ on se ramène à calculer une primitive de type $\int \frac{du}{u^2+1} = \arctan u + c_0$.
   (d). Si $k \geqslant 2$, calcul de $\int \frac{1}{(ax^2+bx+c)^k}dx$:
   On effectue le changement de variable $u = px+q$ pour se ramener au calcul de $I_k = \int \frac{du}{(u^2+1)^k}$. Une intégration par parties permet de passer de I_k à I_{k-1}.
   Par exemple calculons I_2. Partant de $I_1 = \int \frac{du}{u^2+1}$ on pose $f = \frac{1}{u^2+1}$ et $g' = 1$. La formule d'intégration par parties $\int fg' = [fg] - \int f'g$ donne (avec $f' = -\frac{2u}{(u^2+1)^2}$ et $g = u$)

$$\begin{aligned} I_1 = \int \frac{du}{u^2+1} &= \left[\frac{u}{u^2+1}\right] + \int \frac{2u^2du}{(u^2+1)^2} = \left[\frac{u}{u^2+1}\right] + 2\int \frac{u^2+1-1}{(u^2+1)^2}du \\ &= \left[\frac{u}{u^2+1}\right] + 2\int \frac{du}{u^2+1} - 2\int \frac{du}{(u^2+1)^2} = \left[\frac{u}{u^2+1}\right] + 2I_1 - 2I_2 \end{aligned}$$

   On en déduit $I_2 = \frac{1}{2}I_1 + \frac{1}{2}\frac{u}{u^2+1} + c_0$. Mais comme $I_1 = \arctan u$, alors

$$I_2 = \int \frac{du}{(u^2+1)^2} = \frac{1}{2}\arctan u + \frac{1}{2}\frac{u}{u^2+1} + c_0$$

Rappel : On a $x^2+ax+b = (x+\lambda)^2 + w^2$ avec $\lambda = \frac{a}{2}$ et $w = \sqrt{b-\frac{a^2}{4}}$. D'où :

$$\begin{aligned}\int \frac{\alpha x+\beta}{(x^2+ax+b)^l}dx &= \int \frac{\alpha x+\beta}{[(x+\lambda)^2+w^2]^l}dx\\ &= \int \frac{\alpha x+\beta}{w^{2l}\left[\left(\frac{x+\lambda}{w}\right)^2+1\right]^l}dx\\ &= \frac{1}{w^{2l}}\int \frac{\alpha x+\beta}{\left[\left(\frac{x+\lambda}{w}\right)^2+1\right]^l}dx\end{aligned}$$

On effectue le changement de variable $t=\frac{x+\lambda}{w}$, $dt=\frac{dx}{w}$ et $x=tw-\lambda$, d'où :

$$\begin{aligned}\int \frac{\alpha x+\beta}{(x^2+ax+b)^l}dx &= \frac{1}{w^{2l}}\int \frac{\alpha(tw-\lambda)+\beta}{(t^2+1)^l}wdt\\ &= \frac{1}{w^{2l-1}}\int \frac{\alpha tw-\alpha\lambda+\beta}{(1+t^2)^l}dt\\ &= \frac{\alpha w}{w^{2l-1}}\int \frac{tdt}{(1+t^2)^l}-\frac{\alpha\lambda-\beta}{w^{2l-1}}\int \frac{dt}{(1+t^2)^l}\end{aligned}$$

Donc pour trouver le résultat il faut savoir intégrer : $\int \frac{tdt}{(1+t^2)^l}$ et $\int \frac{dt}{(1+t^2)^l}$

- Pour le calcul de l'intégrale : $\int \frac{tdt}{(1+t^2)^l}$, il suffit d'effectuer le changement de variable $y=1+t^2$, donc $dy=2tdt$.

$\int \frac{tdt}{(1+t^2)^l}=\frac{1}{2}\int \frac{2tdt}{(1+t^2)^l}=\frac{1}{2}\int \frac{dy}{y^l}=\begin{cases}\frac{1}{2}\ln|y|+c; \text{ si } l=1\\ \frac{1}{2(1-l)}y^{1-l}+c; \text{ si } l>1\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{2}\ln\left(1+t^2\right)+c; \text{ si } l=1\\ \frac{1}{2(1-l)}\left(1+t^2\right)^{1-l}+c; \text{ si } l>1\end{cases}$

- Pour le calcul de l'intégrale : $\int \frac{dt}{(1+t^2)^l}$, on effectue une intégration par partie :

On pose $u=\frac{1}{(1+t^2)^l}$ et $v'=1$, alors on a : $u'=\frac{-2tl}{(1+t^2)^{l+1}}$, et $v=t$:

$$\begin{aligned}\int \frac{dt}{(1+t^2)^l} &= \frac{t}{(1+t^2)^l}+2l\int \frac{t^2}{(1+t^2)^{l+1}}dt\\ &= \frac{t}{(1+t^2)^l}+2l\int \frac{1+t^2-1}{(1+t^2)^{l+1}}dt\\ &= \frac{t}{(1+t^2)^l}+2l\int \frac{dt}{(1+t^2)^l}-2l\int \frac{dt}{(1+t^2)^{l+1}}.\end{aligned}$$

Si on pose $I_l=\int \frac{dt}{(1+t^2)^l}$, on trouve : $I_l=\frac{1}{(1+t^2)^l}+2lI_l-2lI_{l+1}$ $\forall l>0$, ce qui donne $2lI_{l+1}=\frac{1}{(1+t^2)}$, avec $I_1=\int \frac{dt}{1+t^2}=\arctan(t)+c$, avec $c\in\mathbb{R}$.

Exemple 3.7 Calculons $I=\int \frac{x^4}{1+x^3}dx$.

On a :

$$\frac{x^4}{1+x^3}=x-\frac{x}{(x+1)\left(x^2-x+1\right)}=x+\frac{1}{3(x+1)}+\frac{\frac{-1}{3}x-\frac{1}{3}}{x^2-x+1},$$

donc :

$$I=\int xdx+\frac{1}{3}\int \frac{dx}{x+1}-\frac{1}{3}\int \frac{x+1}{x^2-x+1}dx\ldots$$

3.3.1 Fractions rationnelles contenant des radicaux

Pour calculer $I=\int F\left(x,x^{\frac{m}{n}},\ldots,x^{\frac{r}{s}}\right)$, où F est une fraction rationnelle on effectue le changement de variable $t=x^{\frac{1}{k}}$, avec k dénominateur commun de $\frac{m}{n},\ldots,\frac{r}{s}$.

Exemple 3.8 Calculons $I=\int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{1+x^{\frac{3}{4}}}dx$.

on pose : $t=x^{\frac{1}{4}}$ c-à-d $x=t^4$ et $dx=4t^3dt$.

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{t^2}{1+t^3} 4t^3 dt \\
&= 4 \int \frac{t^5}{1+t^3} dt \\
&= 4 \int t^2 dt - 4 \int \frac{t^2}{1+t^3}
\end{aligned}
$$

3.3.2 Primitives des fonctions circulaires (trigonométriques) :

On va donner le changement de variable convenable qui permet de passer d'une intégration d'une fonction circulaire à une intégration d'une fraction rationnelle.

Primitive de $\int P(\cos x, \sin x)dx$ où $P(\cos x, \sin x)$ est un polynôme en $\sin x$ et $\cos x$

Le calcul de cette primitive revient à calculer l'intégrale de la forme : $I = \int \sin^m x \cos^n x dx$.

- Si n est impair c-à-d : $n = 2p+1$.

$$
\begin{aligned}
I &= \int \cos^n x \sin^m x dx = \int \cos^{2p} \cos x \sin^m x dx \\
&= \int \left(\cos^2\right)^p \cos x \sin^m x dx = \int \left(1 - \sin^2 x\right)^p \sin^m x \cos x dx.
\end{aligned}
$$

On pose $t = \sin x$, $dt = \cos x dx$, ce qui donne $I = \int \left(1-t^2\right)^p t^m dt$.

- Si m est impair $m = 2p+1$.

$$
\begin{aligned}
I &= \int \sin^m x \cos^n x dx = \int \sin^{2p+1} x \cos^n x dx \\
&= \int \left(\sin^2 x\right)^p \sin x \cos^n x dx = \int \left(1 - \cos^2 x\right)^p \cos^n x \sin x dx.
\end{aligned}
$$

On pose $t = \cos x$, $dt = -\sin x dx$, donc $I = -\int \left(1-t^2\right)^p t^n dt$.

- Si n et m sont pairs, donc $n = 2p$, $m = 2q$.

$$
I = \int \cos^n x \sin^m x dx = \int \cos^{2p} x \sin^{2q} x dx.
$$

On linéarise puis on intègre :

Utilisons les identités trigonométriques pour les puissances paires :

  - $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$, donc $\cos^{2p} x = \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^p = \frac{1}{2^p}(1+\cos 2x)^p$,
  - $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$, donc $\sin^{2q} x = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^q = \frac{1}{2^q}(1-\cos 2x)^q$.

L'intégrale devient :

$$
\int \cos^{2p} x \sin^{2q} x \, dx = \frac{1}{2^{p+q}} \int (1+\cos 2x)^p (1-\cos 2x)^q \, dx.
$$

Développons les termes avec la formule du binôme :

$$
(1+\cos 2x)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \cos^k(2x), \quad (1-\cos 2x)^q = \sum_{m=0}^{q} \binom{q}{m} (-1)^m \cos^m(2x).
$$

Le produit s'écrit :

$$
(1+\cos 2x)^p (1-\cos 2x)^q = \sum_{k=0}^{p} \sum_{m=0}^{q} \binom{p}{k} \binom{q}{m} (-1)^m \cos^{k+m}(2x).
$$

L'intégrale devient alors :

$$
\frac{1}{2^{p+q}} \sum_{k=0}^{p} \sum_{m=0}^{q} \binom{p}{k} \binom{q}{m} (-1)^m \int \cos^{k+m}(2x) \, dx.
$$

Pour chaque terme $\int \cos^n(2x)\,dx$ avec $n = k+m$, posons $t = 2x$, donc $dt = 2\,dx$ et $dx = \frac{dt}{2}$. Alors :
$$\int \cos^n(2x)\,dx = \frac{1}{2}\int \cos^n t\,dt.$$
L'intégration dépend de la parité de n :

- Si $n = 2r$ (pair) :
$$\cos^{2r} t = \frac{1}{2^{2r}}\binom{2r}{r} + \frac{1}{2^{2r-1}}\sum_{j=0}^{r-1}\binom{2r}{j}\cos((2r-2j)t),$$
$$\int \cos^{2r}(2x)\,dx = \frac{1}{2^{2r+1}}\binom{2r}{r}x + \frac{1}{2^{2r}}\sum_{j=0}^{r-1}\binom{2r}{j}\frac{\sin((2r-2j)2x)}{2(2r-2j)} + C.$$
- Si $n = 2r+1$ (impair) :
$$\int \cos^{2r+1}(2x)\,dx = \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{r}\binom{2r+1}{j}\frac{(-1)^{r-j}}{2^{2r-j}}\frac{\sin((2r+1-2j)2x)}{2(2r+1-2j)} + C.$$

L'intégrale complète est :
$$\int \cos^{2p}x\sin^{2q}x\,dx = \frac{1}{2^{p+q}}\sum_{k=0}^{p}\sum_{m=0}^{q}\binom{p}{k}\binom{q}{m}(-1)^m\cdot\begin{cases}\frac{x}{2^{n+1}}\binom{n}{\frac{n}{2}} + \frac{1}{2^n}\sum_{j=0}^{\frac{n}{2}-1}\binom{n}{j}\frac{\sin((n-2j)2x)}{2(n-2j)}, & \text{si } n \text{ pair,}\\ \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{\frac{n-1}{2}}\binom{n}{j}\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}-j}}{2^{n-1-j}}\frac{\sin((n-2j)2x)}{2(n-2j)}, & \text{si } n \text{ impair,}\end{cases}$$
où $n = k+m$, plus une constante d'intégration C.

Primitive de $\int \frac{P(\cos x,\sin x)}{Q(\cos x,\sin x)}dx$ avec P et Q sont des polynômes en $\sin x$ et $\cos x$:

Soit $I = \int \frac{P(\sin x,\cos x)}{Q(\sin x,\cos x)}$, en général on peut toujours utiliser le changement de variable $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, donc : $dt = \frac{1}{2}\left(1+t^2\right)dx$, $\frac{x}{2} = \arctan t$, $x = 2\arctan t$ et $dx = \frac{2}{1+t^2}dt$.
On a : $\sin x = \frac{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{2t}{1+t^2}$, $\quad \cos x = \frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{2}{2}\right)} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ et $\tan x = \frac{2t}{1-t^2}$

Exemple 3.9 $I = \int \frac{dx}{\sin x}$.
On pose $t = \tan\frac{x}{2}$, $dt = \frac{1}{2}\left(1+t^2\right)dx$ et $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$. D'où :
$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1+t^2}{2t}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt \\ &= \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + c \\ &= \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + c \end{aligned}$$

Exemple 3.10 $J = \int \frac{dx}{\cos x}$.
Posons $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, donc $dt = \frac{1}{2}\left(1+t^2\right)dx$ et $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$
$$\begin{aligned} J &= \int \frac{1+t^2}{1-t^2}\cdot\frac{2dt}{1+t^2} \\ &= 2\int \frac{dt}{1-t^2} = 2\int \frac{dt}{(1-t)(1+t)} \\ &= \int \frac{1}{(1-t)} + \frac{1}{(1+t)}dt \\ &= \ln|1-t| + \ln|1+t| + c = \ln\left|1-\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| + \ln\left|1+\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| + c. \end{aligned}$$

Proposition 3.3 (Règles de Bioche)

Soit $I = \int F(\sin x,\cos x)dx$.
- *Si $F(-x) = -F(x)$, alors on effectue le changement de variable : $t = \cos x$.*
- *Si $F(\pi - x) = -F(x)$, alors on effectue le changement de variable : $t = \sin x$.*
- *Si $F(\pi - x) = F(x)$, alors on effectue le changement de variable : $t = \tan x$.*

Remarque

- les règles de Bioche sont assez efficaces mais ne fonctionnent pas toujours.
- le changement de variable $t = \tan \frac{x}{2}$ fonctionne tout le temps mais conduit à davantage de calculs. En effet si on pose $t = \tan \frac{x}{2}$ alors

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \tan x = \frac{2t}{1-t^2} \text{ et } \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Primitive des Fractions rationnelles en $e^{\alpha x}$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$

Pour calculer $\int F\left(e^{\alpha x}\right) dx$, où F est une fraction rationnelle, et $\alpha \in \mathbb{R}^*$ on effectue le changement de variable $t = e^{\alpha x}$, $dt = \alpha t dx$. On a donc

$$\int F\left(e^{\alpha x}\right) dx = \int F(t) \frac{dt}{\alpha t}.$$

Exemple 3.11 Calculons $I = \int \frac{e^x}{1+e^{2x}}$.

$I = \int \frac{e^x}{1+(e^x)^2} dx$, on pose $t = e^x$, $dt = tdx$. Alors

$$I = \int \frac{t}{1+t^2} \frac{dt}{t} = \int \frac{dt}{1+t^2} = \arctan(t) + c = \arctan\left(e^x\right) + c.$$

Exemple 3.12 Calcul de l'intégrale $\int_{\frac{-\pi}{2}}^{0} \frac{dx}{1-\sin x}$.

Le changement de variable $t = \tan \frac{x}{2}$ définit une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ vers $[-1, 0]$ (pour $x = -\frac{\pi}{2}$, $t = -1$ et pour $x = 0$, $t = 0$). De plus on a $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ et $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$.

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{dx}{1-\sin x} &= \int_{-1}^{0} \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1-\frac{2t}{1+t^2}} = 2\int_{-1}^{0} \frac{dt}{1+t^2-2t} \\ &= 2\int_{-1}^{0} \frac{dt}{(1-t)^2} = 2\left[\frac{1}{1-t}\right]_{-1}^{0} = 2\left(1-\frac{1}{2}\right) = 1 \end{aligned}$$

Chapitre 4 Intégrales généralisées

4.1 Introduction

Jusqu'ici nous avions considéré l'intégrale de Riemann pour des fonctions bornées et sur un intervalle fermé borné $[a, b]$ (a et b étaient donc des réels finis). Dans le présent chapitre, nous allons généraliser la notion d'intégrale en considérant des fonctions non bornées sur des intervalles bornés du type $[a, b[$, $]a, b]$ ou $]a, b[$ ou des fonctions bornées sur des intervalles du type $[a, +\infty[$, $]-\infty, b]$ ou $]-\infty, +\infty[$.

L'étendu de la région sous la courbe peut être infinie. Néanmoins l'intégrale peut être "convergente".

Exemple 4.1 On considère les trois exemples où $b = +\infty$, $a = -\infty$ ou $\lim f(x) = \infty$.

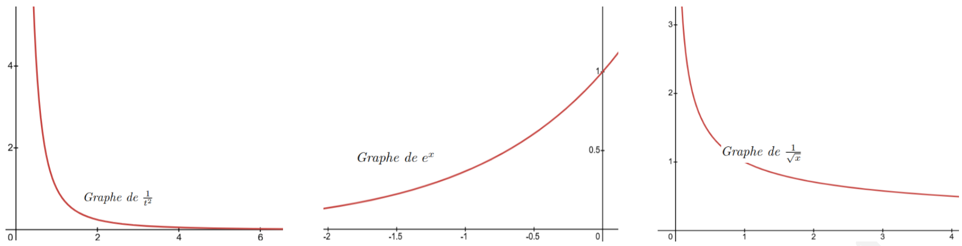

Figure 4.1 – $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^{+\infty} = 1$; $\int_{-\infty}^{0} e^x dx = [e^x]_{-\infty}^{0} = 1$; $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} = [2\sqrt{x}]_0^1 = 2$.

En pratique on remplace les "quantités infinies" par leurs limites et on regarde ce qui se passe. Ainsi

- quand la primitive est $-\frac{1}{x}$ en mettant $b = +\infty$ on obtient "$\frac{1}{+\infty} = 0$",
- quand la primitive est e^x en mettant $a = -\infty$ on obtient "$e^{-\infty} = 0$".

4.2 Intégrale généralisée (ou impropre)

4.2.1 Intégrale impropre sur un intervalle borné

Définition 4.1

Soit f une fonction définie sur un intervalle quelconque I. On dira que f est localement intégrable sur I si f est intégrable sur tout intervalle fermé borné $[c, d] \subset I$. ♣

Définition 4.2

- *Soient $a < b$ deux réels, et $f : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que pour tout $x \in [a, b[$, f est intégrable sur $[a, x]$. On dit que l'intégrale de f sur $[a, b[$, converge si $\lim\limits_{x \to b^-} \int_a^x f(t)dt$ existe, et on note dans ce cas*
$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t)dt.$$
Cette limite (quand elle existe) est appelée intégrale généralisée de f sur $[a, b[$.
- *Soient $a < b$ deux réels, et $f :]a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que pour tout $x \in]a, b]$, f est intégrable sur $[x, b]$. On dit que l'intégrale de f sur $]a, b]$, converge si $\lim\limits_{x \to a^+} \int_x^b f(t)dt$ existe, et on note dans ce cas*
$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{x \to a^+} \int_x^b f(t)dt.$$
Cette limite (quand elle existe) est appelée intégrale généralisée de f sur $]a, b]$.
- *On dit que $\int_a^b f(t)dt$ diverge si $\int_a^b f(t)dt$ n'est pas convergente.* ♣

Remarque Si $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue, alors $\int_a^b f(t)dt$ converge.

Exemple 4.2

1. $\int_0^1 \frac{1}{1-x}dx$:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{1-x}dx &= \lim_{t\to 1^-}\int_0^t \frac{1}{1-x}dx\\ &= \lim_{t\to 1^-}[-\ln|1-x|]_0^t\\ &= \lim_{t\to 1^-}[-\ln|1-t|]\\ &= +\infty\end{aligned}$$

   donc $\int_0^1 \frac{1}{1-x}dx$ diverge.

2. $\int_0^1 \ln(x)dx$:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \ln(x)dx &= \lim_{t\to 0^+}\int_t^1 \ln(x)dx\\ &= \lim_{t\to 0^+}[x\ln(x)-x]_t^1\\ &= \lim_{t\to 0^+}(-1-t\ln(t)+t)\\ &= -1\end{aligned}$$

   d'où $\int_0^1 \ln(x)dx$ converge et $\int_0^1 \ln(x)dx = -1$.

3. Soit f la fonction définie sur $[0,1[$ par : $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$, ($\lim\limits_{x\to 1^-} = +\infty$)
   On vérifie que f est continue sur $[0,1[$ et donc intégrable sur $[0,x]$ pour $0\leq x<1$. Soit alors

$$I(x) = \int_0^x f(x)dx = \int_0^x \frac{1}{(1-t)^2}dt = \left[\frac{1}{1-t}\right]_0^x = \frac{1}{1-x}-1,$$

   on a $\lim\limits_{x\to 1^-} I(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}[\frac{1}{1-t}]_0^x = \lim\limits_{x\to 1^-}(\frac{1}{1-x}-1) = +\infty$.
   Comme cette limite n'est pas finie on conclut que l'intégrale généralisée est divergente.

4. Soit g la fonction définie sur $]0,1]$ par : $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$
   On vérifie que g est continue sur $]0,1]$ et donc intégrable sur $[x,1]$ pour $0<x\leq 1$. Soit alors $I(x) = \int_x^1 g(t)dt = \int_x^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dt = [2\sqrt{t}]_x^1 = 2(\sqrt{1}-\sqrt{x})$.
   On a $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} I(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} 2[\sqrt{t}]_x^1 = \lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} 2(\sqrt{1}-\sqrt{x}) = 2\sqrt{1} = 2$.
   On dira donc que l'intégrale généralisée est convergente sur $]0,1]$ vers 2.

Définition 4.3

Soit f une fonction continue sur $]a,b[$ et sur $]b,d[$. On dit que $\int_a^d f(t)dt$ converge si les deux intégrales $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_b^d f(t)dt$ sont convergentes, et on a : $\int_a^d f(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_b^d f(t)dt$.

♣

Exemple 4.3 Soient $a=-1, b=1$ et $h(x) = \frac{1}{x^2-1}$, alors $I = \int_{-1}^1 h(t)dt = I_1 + I_2$ où $I_1 = \int_{-1}^0 \frac{1}{x^2-1}dt$ et $I_2 = \int_0^1 \frac{1}{x^2-1}dt$.

On sait que $\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{2}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{x+1}$, et par conséquent

$$I_2 = \frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\longrightarrow 1}\int_0^\varepsilon\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)dx = \frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\longrightarrow 1}\log\left|\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}\right|$$

I_2 est divergente et par suite I est divergente.

Exemple 4.4

1. $\int_0^4 \frac{\sin t}{t(t-3)}dt$ converge si et seulement si, $\int_0^3 \frac{\sin t}{t(t-3)}dt$ et $\int_3^4 \frac{\sin t}{t(t-3)}dt$ convergent

4.2.2 Intégrale impropre sur un intervalle non borné

Définition 4.4

On définit les intégrales impropres (ou généralisées) $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *et* $\int_{-\infty}^a f(x)dx$ *par*

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{x\to+\infty}\int_a^x f(x)dx \quad et \quad \int_{-\infty}^a f(x)dx = \lim_{x\to-\infty}\int_x^a f(x)dx$$

Cette limite (quand elle existe) est appelée intégrale généralisée de f*, et si cette limite est finie on dit que l'intégrale est convergente, sinon on dit qu'elle est divergente.* ♣

Remarque Pour que l'intégrale $\int_a^x f(x)dx$ existe il suffit que f soit continue sur $[a, x]$ (théorème fondamental).

Exemple 4.5 Calculons $I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1}dx$, $\quad I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x\exp^{-x^2} dx$, $\quad I_3 = \int_0^1 \frac{1}{x}dx$, $\quad I_4 = \int_0^2 \frac{dx}{x(x-2)}$,

- $I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1}dx$. On pose

$$I_1(\beta) = \int_0^\beta \frac{dx}{x^2+1}dx, \quad \beta \in \mathbb{R}_+^\star$$

$$\begin{aligned} I_1(\beta) &= \int_0^\beta \frac{dx}{x^2+1}dx \\ &= [\arctan(x)]_0^\beta \\ &= \arctan(\beta) \end{aligned}$$

$\lim_{\beta\to+\infty}(I_1(\beta)) = \lim_{\beta\to+\infty}(\arctan(\beta)) = \pi/2$, donc l'intégrale généralisée I_1 est convergente avec

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1}dx = \pi/2$$

- $I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x\exp^{-x^2} dx$ est une intégrale généralisée, d'après la relation de Chasles,

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x\exp^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{0} x\exp^{-x^2} dx + \int_0^{+\infty} x\exp^{-x^2} dx$$

On pose alors $J_1(\alpha) = \int_\alpha^0 x\exp^{-x^2} dx$ et $J_2(\beta) = \int_0^\beta x\exp^{-x^2} dx$ où $0 \in [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} J_1(\alpha) &= \int_\alpha^0 x\exp^{-x^2} dx \\ &= \left[-\frac{1}{2}\exp^{-x^2}\right]_\alpha^0 \end{aligned}$$

qui converge vers $-\frac{1}{2}$.

Identiquement on aura J_2 converge vers $\frac{1}{2}$ ainsi $\int_{-\infty}^{+\infty} x\exp^{-x^2} dx = 0$

- $I_3 = \int_0^1 \frac{1}{x}dx$ est une intégrale généralisée puisque :

$$\sup_{0<x<1}\left\{\left|\frac{1}{x}\right|\right\} = +\infty$$

$$\lim_{\alpha\to0^+}\int_\alpha^1 \frac{1}{x}dx = \lim_{\alpha\to0^+}[\ln(x)]_\alpha^1 = +\infty$$

Donc I_3 est divergente.

- $I_4 = \int_0^2 \frac{dx}{x(x-2)}$ est une intégrale impropre qui admet deux points de singularité : 0 et 2. On pose

$$J_1 = \int_0^1 \frac{dx}{x(x-2)} \text{ et } J_2 = \int_1^2 \frac{dx}{x(x-2)}$$

$$J_1(\alpha) = \int_\alpha^1 \frac{dx}{x(x-2)} \text{ et } J_2(\beta) = \int_1^\beta \frac{dx}{x(x-2)}$$

par réduction en élément simple on aura

$$\lim_{\alpha\to0^+}\int_\alpha^1 \frac{dx}{x(x-2)}dx = -\infty$$

donc $I_4 = \int_0^1 \frac{dx}{x(x-2)}$ diverge d'où l'intégrale impropre $I_4 = \int_0^2 \frac{dx}{x(x-2)}$ diverge.

4.3 Critères de convergence

4.3.1 Condition nécessaire et suffisante de convergence

Théorème 4.1

Soit f une fonction positive ou nulle localement intégrable sur un intervalle $[a, \alpha[$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$ ou $\alpha = +\infty$. L'intégrale $\int_a^\alpha f(t)dt$ est convergente si et seulement s'il existe un réel M tel que l'on ait : $\forall x \in [a, \alpha[$, $\int_a^x f(t)dt \leq M$.

♡

Démonstration La fonction f étant positive sur $[a, \alpha[$, donc la fonction $F : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est croissante sur $[a, \alpha[$.

- Si F est majorée alors $F(x)$ admet une limite quand x tend vers α^- donc $\int_a^\alpha f(t)dt$ converge.
- Si F n'est pas majorée alors $\lim\limits_{x \to \alpha^-} F(x) = +\infty$ et $\int_a^\alpha f(t)dt$ diverge.

□

Exemple 4.6 Montrons que $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t^2} dt$ est convergente.

Posant $F(x) = \int_1^x \frac{|\sin t|}{t^2} dt$, cette fonction est croissante, il suffit donc de montrer que F est majorée.

$F(x) = \int_1^x \frac{|\sin t|}{t^2} dt \leq \int_1^x \frac{1}{t^2} dt = 1 - \frac{1}{x} < 1$ du fait que $x > 1$.

4.3.2 Critère de Cauchy

On considère une fonction f, localement intégrable sur un intervalle $[a, \alpha[$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$ ou $\alpha = +\infty$. Nous avons vu que le problème de la convergence de l'intégrale $\int_a^\alpha f(t)dt$ revient au problème de l'existence de la limite $\lim\limits_{x \to \alpha} \int_a^x f(t)dt$. On se ramène à un problème de limite de suites, en utilisant le théorème qui lie l'existence de la limite d'une fonction en un point α à la convergence de toutes les suites images des suites convergentes de limite α. Cette convergence est montrée par le critère de Cauchy.

Théorème 4.2

Soit f une fonction localement intégrable sur un intervalle $[a, \alpha[$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$ ou $\alpha = +\infty$. Pour que l'intégrale $\int_a^\alpha f(t)dt$ soit convergente, il faut et il suffit que, pour toute suite (x_n) de limite α, la suite $(F(x_n))$ définie par $F(x_n) = \int_a^{x_n} f(t)dt$ soit convergente. On a alors :

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{n \to +\infty} F(x_n).$$

♡

On en déduit le critère de Cauchy pour les intégrales impropres.

Théorème 4.3 (Critère de Cauchy)

Soit f une fonction réelle, localement intégrable sur un intervalle $[a, \alpha[$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$ ou $\alpha = +\infty$. Pour que l'intégrale $\int_a^\alpha f(t)dt$ soit convergente, il faut et il suffit que,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists X \in [a, \alpha[, \quad \forall X_1, X_2 \in [a, \alpha[, \quad , X < X_1 < X_2 < \alpha \Rightarrow \left| \int_{X_1}^{X_2} f(t)dt \right| < \varepsilon$$

♡

Démonstration

- Condition nécessaire :

  On suppose que l'intégrale $\int_a^\alpha f(t)dt$ est convergente. Cela signifie que la fonction F définie par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ a une limite finie, qu'on note L, quand x tend vers α. Donc, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe X tel que les inégalités $X < x < \alpha$ entraînent que $|F(x) - L| < \varepsilon$.

  Soit $\varepsilon > 0$. Il existe donc $X \in [a, \alpha[$ tel que :

$$\forall X_1, X_2, \quad X < X_1 < X_2 < \alpha \Rightarrow (|F(X_1) - L|) < \varepsilon \text{ et } |F(X_2) - L| < \varepsilon)$$

Soient donc X_1 et X_2 tels que $X < X_1 < X_2 < \alpha$. On déduit, par inégalité triangulaire : $|F(X_2) - F(X_1)| < 2\varepsilon$ et donc $\left|\int_{X_1}^{X_2} f(t)dt\right| < 2\varepsilon$.

On a donc montré que :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists X \in [a, \alpha[, \quad \forall X_1, X_2, \quad X < X_1 < X_2 < \alpha \Rightarrow \left|\int_{X_1}^{X_2} f(t)dt\right| < 2\varepsilon.$$

- Condition suffisante :

  On suppose la condition réalisée. On considère une suite (x_n) de points de $[a, \alpha[$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \alpha$.

  Soit $\varepsilon > 0$, il existe N tel que, pour $n > N$, on ait $x_n > X$.

  Les inégalités $p > m > N$ entraînent alors que

$$|F(x_p) - F(x_n)| = \left|\int_{x_n}^{x_p} f(t)dt\right| < \varepsilon.$$

  On a donc montré que :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N, \quad \forall p, m, \quad N < m < p \Rightarrow \left|\int_{x_n}^{x_p} f(t)dt\right| < \varepsilon$$

  Ce qui signifie que la suite $(F(x_n))$ est une suite de Cauchy. Elle est donc convergente dans $\mathbb{R}$. D'après le théorème précédent, l'intégrale $\int_a^\alpha f(t)dt$ est convergente.

$\square$

Exemple 4.7 Cherchons $I = \int_0^1 f(t)$ où $f(x) = \frac{\log(x)}{x-1}$

$I = \int_0^1 f(t)dt = I_1 + I_2$ où $I_1 = \int_0^c \frac{\log(x)}{x-1}dx$ et $I_2 = \int_c^1 \frac{\log(x)}{x-1}dx$ avec $c \in]0,1[$

Au voisinage de 0 on a : $\frac{\log(x)}{x-1} \sim -\log(x)$, et comme $\int_0^c -\log(x)\,dx = \lim\limits_{\epsilon\to 0} \int_\epsilon^c -\log(x)\,dx = c - c\log(c)$ on conclut que I_1 converge.

Au voisinage de 1 on a : $\frac{\log(x)}{x-1} = \frac{\log(x)-\log(1)}{x-1} \simeq (\log'(x))(1) = 1$ donc I_2 converge.

En conclusion I_1 converge et I_2 converge donc $I = I_1 + I_2$ converge.

Exemple 4.8 Montrons que $I = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{x^2}dt$ diverge.

$I = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{x^2}dt = I_1 + I_2$ où $I_1 = \int_0^c \frac{\arctan(x)}{x^2}\,dx$ et $I_2 = \int_c^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{x^2}\,dx$ avec $c \in]0, +\infty[$

Prenons $c = 1$ et cherchons $I_1 = \int_0^1 \frac{\arctan(x)}{x^2}\,dx$

Le problème est donc au voisinage de 0 et on a : $\frac{\arctan(x)}{x^2} \sim_0 \frac{x}{x^2} \sim_0 \frac{1}{x}$

Comme $\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim\limits_{\epsilon\to 0} \int_\epsilon^1 \frac{dx}{x} = \lim\limits_{\epsilon\to 0} [\log(x)]_\epsilon^1 = +\infty$ on conclut que I_1 est divergente et par suite I est divergente.

✍ **Exercice 4.1**

Soient $I(x) = \int_{-x}^{+x} \frac{1}{t^2+1}\,dt$ et $J(x) = \int_{-x}^{+x} \frac{2t+1}{t^2+1}\,dt$

1. Calculer $I(x)$ et $J(x)$ puis chercher $\lim\limits_{x\to\infty} I(x)$ et $\lim\limits_{x\to\infty} J(x)$
2. Étudier la nature des intégrales généralisées $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2+1}\,dt$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2t+1}{t^2+1}\,dt$
3. Conclure

✍ **Exercice 4.2**

Soient $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}\exp(-x)\,dx$ et $I(\beta) = \int_0^{+\infty} x^{-\beta}\sin(x)\,dx$

1. Pour quelles valeurs de α et β a-t-on convergence de $I(\alpha)$ et $I(\beta)$?
2. Montrer que $I(\alpha+1) = \alpha I(\alpha)$
3. En déduire que pour $\alpha = n \in \mathbb{N}^*$ on a : $I(n+1) = n!$

✍ **Exercice 4.3**

Soit $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$?

1. Pour quelles valeurs de n a-t-on convergence de I_n ?
2. Calculer I_0 et I_1
3. Montrer que $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ pour $n \geq 2$
4. Déduire la valeur de I_n

4.3.3 Critère de comparaison

Théorème 4.4 (de comparaison)

Soient f et g deux fonctions localement intégrables sur un intervalle $[a, \alpha[$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$ ou $\alpha = +\infty$, et vérifiant sur cet intervalle $0 \leq f \leq g$, alors

- *si l'intégrale $\int_a^\alpha g(t)dt$ est convergente, l'intégrale $\int_a^\alpha f(t)dt$ est convergente,*
- *si l'intégrale $\int_a^\alpha f(t)dt$ est divergente, l'intégrale $\int_a^\alpha g(t)dt$ est divergente.*

♡

Démonstration On pose $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ et $G(x) = \int_a^x g(t)dt$ $\forall x \geq a$. Pour tout $x \geq a$ on a $\int_a^x f(t)dt \leq \int_a^x g(t)dt$, soit $F(x) \leq G(x)$. Les fonctions F et G sont croissantes. On en déduit que :

- si la fonction G a une limite quand x tend vers α, elle est majorée, la fonction F est alors majorée et a donc une limite.
- si la fonction F tend vers $+\infty$ quand x tend vers α, elle n'est pas majorée, donc la fonction G n'est pas majorée et tend vers $+\infty$ quand x tend vers α.

□

Exemple 4.9 Étude de l'intégrale $\int_0^1 \sin(t)\ln(t)dt$:

Pour tout x vérifiant $0 < x \leq 1$, la fonction $x \mapsto \sin x \ln x$ garde un signe constant négatif. On a alors $0 < -\sin x \ln x \leq -\ln x$. Or l'intégrale $\int_0^1 -\ln t dt$ est convergente, donc l'intégrale $\int_0^1 \sin t \ln t dt$ est convergente.

Exemple 4.10 Étude de l'intégrale $\int_e^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}\ln(t)}dt$:

On a, pour x assez grand, $0 < \ln x < \sqrt{x}$ d'où $\frac{1}{\ln x\sqrt{x}} \geq \frac{1}{x}$. L'intégrale $\int_e^{+\infty} \frac{1}{t}dt$ est divergente donc l'intégrale $\int_e^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}\ln t}dt$ est divergente.

Définition 4.5 (Équivalente à la définition (1.2) du chapitre (1))

Soient f et g deux fonctions définies sur $]a, b[$. On dit que f et g sont équivalentes au voisinage d'un point $x_0 \in]a, b[$ s'il existe une fonction ε définie au voisinage de x_0 vérifiant : $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$ et telle que : $f(x) = g(x)(1 + \varepsilon(x))$

♣

Remarque La définition reste valable si le point x_0 est $\pm\infty$.

Théorème 4.5 (Théorème des équivalents)

Soient f et g deux fonctions continues et strictement positives sur $[a, +\infty[$. Supposons qu'elles soient équivalentes au voisinage de $+\infty$, c'est-à-dire : $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{f(t)}{g(t)} = 1$. Alors l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge si et seulement si $\int_a^{+\infty} g(t)dt$ converge.

♡

Démonstration Dire que deux fonctions sont équivalentes au voisinage de $+\infty$, c'est dire que leur rapport tend vers 1, ou encore :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists A > a \quad \forall t > A \quad \left| \frac{f(t)}{g(t)} - 1 \right| < \varepsilon,$$

soit encore :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists A > a \quad \forall t > A \quad (1 - \varepsilon)g(t) < f(t) < (1 + \varepsilon)g(t).$$

Fixons $\varepsilon < 1$, et appliquons le théorème de comparaison sur l'intervalle $[A, +\infty[$. Si l'intégrale $\int_A^{+\infty} f(t)dt$ converge, alors l'intégrale $\int_A^{+\infty}(1-\varepsilon)g(t)dt$ converge, donc l'intégrale $\int_A^{+\infty} g(t)dt$ converge aussi par linéarité.

Inversement, si $\int_A^{+\infty} f(t)dt$ diverge, alors $\int_A^{+\infty}(1 + \varepsilon)g(t)dt$ diverge, donc $\int_A^{+\infty} g(t)dt$ diverge aussi. □

Exemple 4.11 Étude de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{x-1}{x+1}e^{-t}dt$:

On a pour tout $x > 1$, $\frac{x-1}{x+1} > 0$ et la fonction à intégrer est donc positive. Quand x tend vers $+\infty$, on a $\frac{x-1}{x+1}e^{-x} \sim e^{-x}$. L'intégrale est donc convergente.

Exemple 4.12 Étude de l'intégrale $\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t^2} dt$:

La fonction à intégrer est positive. Quand x tend vers 0, on a : $\frac{\sin(t)}{t^2} \sim \frac{1}{t}$. L'intégrale est donc divergente.

Théorème 4.6 (Intégrales de Riemann)

Soit $a > 0$, alors on a :

1. *$\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge si et seulement si, $\alpha < 1$.*
2. *$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.*

♡

Démonstration

1. Pour $\alpha \neq 1$ et $x > 0$, on a $\int_x^1 \frac{1}{t^\alpha} dt = \frac{1}{1-\alpha}(1 - x^{1-\alpha})$,
   - si $\alpha < 1$, $\lim\limits_{x \to 0} x^{1-\alpha} = 0$, donc l'intégrale est convergente ;
   - si $\alpha > 1$, $\lim\limits_{x \to 0} x^{1-\alpha} = +\infty$, donc l'intégrale est divergente ;
2. Pour $\alpha \neq 1$ et $x > 0$, on a $\int_1^x \frac{1}{t^\alpha} dt = \frac{1}{1-\alpha}(x^{1-\alpha} - 1)$,
   - si $\alpha > 1$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{1-\alpha} = 0$, donc l'intégrale est convergente ;
   - si $\alpha < 1$, $\lim\limits_{x \to 0} x^{1-\alpha} = +\infty$, donc l'intégrale est divergente ;

□

Exemple 4.13

- $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \int_0^1 \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} dt$ converge car $\alpha = \frac{1}{2} < 1$.
- $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge car $\alpha = 2 > 1$.
- $\int_0^1 \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}} dt$ diverge car $\alpha = \frac{3}{2} > 1$.

Remarque $\int_1^{+\infty} t^\alpha dt$ converge si et seulement si, $-\alpha > 1$ si et seulement si $\alpha < -1$. Dans ce cas, sa valeur est :

$$\int_1^{+\infty} t^\alpha dt = \left[\frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_1^{+\infty} = -\frac{1}{\alpha+1}, \quad \text{pour } \alpha < -1$$

Théorème 4.7 (Intégrales de Bertrand (convergence à l'infini))

Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, alors : pour tout $e > 1$,

1. *Si $\alpha > 1$, l'intégrale $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha (\ln x)^\beta}$ est convergente.*
2. *Si $\alpha < 1$, l'intégrale $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha (\ln x)^\beta}$ est divergente.*
3. *Si $\alpha = 1$, alors*
   - *(a). Si $\beta > 1$, alors $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^\beta} dx$ converge.*
   - *(b). Si $\beta \leq 1$ alors $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^\beta} dx$ diverge.*

♡

Démonstration

1. Soit $\gamma \in]1, \alpha[$. Alors, on a
$$\frac{t^\gamma}{t^\alpha (\ln t)^\beta} = \frac{1}{t^{\alpha-\gamma}(\ln t)^\beta} \to 0$$
donc, en notant f la fonction, on a
$$f(t) =_{+\infty} o\left(\frac{1}{t^\gamma}\right).$$
Puisque $\int_e^{+\infty} \frac{dt}{t^\gamma}$ converge, il en est de même de $\int_e^{+\infty} f$.
2. On remarque que
$$\frac{\frac{1}{t}}{f(t)} = t^{\alpha-1}(\ln t)^\beta \to 0,$$
c'est-à-dire
$$\frac{1}{t} =_{+\infty} o\big(f(t)\big).$$
Puisque $\int_e^{+\infty} \frac{dt}{t}$ diverge, il en est de même de $\int_e^{+\infty} f(t) dt$.
3. Si $\alpha = 1$, alors la fonction est de la forme $u'u^{-\beta}$. Elle admet donc une primitive de la forme $\frac{1}{-\beta+1} u^{-\beta+1}$

si $\beta \neq 1$, et de la forme $\ln|\ln u|$ si $\beta = 1$. Pour $\beta \neq 1$, on a

$$\begin{aligned}\int_e^X \frac{dt}{t(\ln t)^\beta} &= \left[\frac{1}{-\beta+1}(\ln t)^{-\beta+1}\right]_e^X \\ &= \frac{1}{-\beta+1}\left((\ln X)^{-\beta+1} - 1\right)\end{aligned}$$

Lorsque X tend vers $+\infty$, ceci admet une limite finie si et seulement si $\beta > 1$. Dans le cas où $\beta = 1$, la primitive se calcule un peu différemment :

$$\int_e^X \frac{dt}{t\ln t} = [\ln|\ln t|]_e^X = \ln|\ln X| - \ln|\ln e| = \ln\ln X.$$

Ceci tend vers $+\infty$, et donc l'intégrale n'est pas convergente.

$\square$

Exemple 4.14 Est-ce que l'intégrale $\int_2^{+\infty} \sqrt{t^2+3t}\,\ln\left(\cos\frac{1}{t}\right)\sin^2\left(\frac{1}{\ln t}\right)dt$ converge ?

Le point incertain est $+\infty$. Pour répondre à la question, calculons un équivalent de la fonction au voisinage de $+\infty$. On a :

$$\begin{aligned}&\sqrt{t^2+3t} = t\sqrt{1+\frac{3}{t}} \underset{+\infty}{\sim} t\\ &\ln\left(\cos\frac{1}{t}\right) = \ln\left(1 - \frac{1}{2t^2} + o\left(\frac{1}{t^2}\right)\right) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2t^2}\\ &\sin^2\left(\frac{1}{\ln t}\right) \underset{+\infty}{\sim} \left(\frac{1}{\ln t}\right)^2\end{aligned}$$

D'où un équivalent de la fonction au voisinage de $+\infty$:

$$\sqrt{t^2+3t}\,\ln\left(\cos\frac{1}{t}\right)\sin^2\left(\frac{1}{\ln t}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2t(\ln t)^2}$$

Remarquons que dans cette équivalence les deux fonctions sont négatives au voisinage de $+\infty$. Donc, les deux intégrales associées sont de même nature. Mais comme l'intégrale de Bertrand $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t(\ln t)^2}dt$ converge, alors notre intégrale initiale est aussi convergente.

Théorème 4.8 (Intégrales de Bertrand (convergence au point zéro))

Pour tout $0 < \varepsilon < 1$, l'intégrale $\int_0^\varepsilon \dfrac{1}{x^\alpha|\ln x|^\beta}dx$, est convergente si et seulement si $\alpha < 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$).

♡

Démonstration La fonction $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha|\ln x|^\beta}$ est définie, continue et positive sur $]0,\varepsilon[$. Ainsi f est intégrable sur chaque fermé de $]0,\varepsilon[$. Le changement de variable $t = \frac{1}{x}$ nous donne

$$\int_0^\varepsilon \frac{1}{x^\alpha|\ln x|^\beta}dx = \int_{\frac{1}{\varepsilon}}^{+\infty} \frac{1}{t^{2-\alpha}(\ln t)^\beta}dt.$$

D'après le théorème précédent, notre intégrale est convergente si et seulement si $2-\alpha > 1$ ou ($2-\alpha = 1$ et $\beta > 1$. Autrement dit, $\alpha < 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$). $\square$

4.3.4 Convergence absolue et semi convergence d'une intégrale impropre

Proposition 4.1

Soit $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue et admet un prolongement par continuité en b (i.e. $\lim\limits_{x\to b} f(x)$ existe et est finie), alors $\int_a^b f(t)dt$ converge.

♠

Définition 4.6

Soit f une fonction réelle, localement intégrable sur un intervalle $[a,\alpha[$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$ ou $\alpha = +\infty$. On dit que l'intégrale $\int_a^\alpha f(t)dt$ est absolument convergente si l'intégrale $\int_a^\alpha |f(t)|dt$ est convergente.

♣

Théorème 4.9

Une intégrale absolument convergente est convergente.

Démonstration On utilise deux fois la condition de Cauchy, une première sous forme de condition nécessaire, une deuxième sous forme de condition suffisante.

Soit $\varepsilon > 0$, l'intégrale $\int_a^\alpha |f(t)|dt$ étant convergente, elle satisfait à la condition de Cauchy. Il existe donc $X \in [a, \alpha[$ tel que : $\forall X_1, X_2,\ X < X_1 < X_2 < \alpha \Rightarrow \int_{X_1}^{X_2} |f(t)|dt < \varepsilon$. Soient donc X_1 et X_2 tels que $X < X_1 < X_2 < \alpha$. On a alors : $\left|\int_{X_1}^{X_2} f(t)dt\right| \leq \int_{X_1}^{X_2} |f(t)|dt < \varepsilon$. Donc on a montré que :

$$\forall \varepsilon >, \exists X, \forall X_1, \forall X_2, X < X_1 < X_2 < \alpha \Rightarrow \left|\int_{X_1}^{X_2} f(t)dt\right| < \varepsilon,$$

ce qui signifie que l'intégrale $\int_a^\alpha f(t)dt$ satisfait au critère de Cauchy, elle est convergente. □

Remarque La réciproque du théorème précédent n'est pas vrai, il existe des intégrales de fonctions qui convergent, mais qui ne sont pas absolument convergent.

Exemple 4.15

$\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2}dt$ est absolument convergente, donc convergente. En effet, pour tout t,

$$\frac{|\sin t|}{t^2} \leq \frac{1}{t^2}.$$

Or l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ est convergente. D'où le résultat par le théorème de comparaison.

Définition 4.7

*Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur I. On dit que l'intégrale de f sur I est **semi-convergente** si $\int_I f(t)dt$ converge et $\int_I |f(t)|dt$ diverge.*

Exemple 4.16 L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}dt$ converge, mais n'est pas absolument convergente, donc $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}dt$ est semi-convergente.

4.3.5 Règle d'Abel

Théorème 4.10 (Théorème d'Abel)

Soient f et g deux fonctions définies sur $[a, +\infty[$ telles que :

1. *f est positive, décroissante et vérifie $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 0$,*
2. *g une fonction localement intégrable sur $[a, +\infty[$, telle que il existe un réel $M > 0$ tel que $\forall x \in [a, +\infty[$, $|\int_a^x g(t)dt| \leq M$,*

alors $\int_a^{+\infty} f(t)g(t)dt$ est convergente.

Démonstration Pour tout $x \geqslant a$, posons $G(x) = \int_a^x g(t)dt$. Par hypothèse, on a pour tout x, $|G(x)| \leq M$. Par une intégration par parties on a :

$$\int_a^x f(t)g(t)dt = [f(t)G(t)]_a^x - \int_a^x f'(t)G(t)dt.$$

Comme G est bornée et f tend vers 0, le terme entre crochets converge. Montrons maintenant que $\int_a^x f'(t)G(t)dt$ converge aussi, en vérifiant que $\int_a^{+\infty} f'(t)G(t)dt$ est absolument convergente.

On a :

$$|f'(t)G(t)| = |f'(t)|\,|G(t)| \leq (-f'(t))\,M,$$

car f est décroissante (donc $f'(t) \leq 0$) et $|G|$ est bornée par M. Par le théorème de comparaison, il suffit donc de montrer que $\int_a^{+\infty} -f'(t)dt$ est convergente.

On a

$$\int_a^x -f'(t)dt = f(a) - f(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty}(f(a) - f(x)) = f(a).$$

□

Exemple 4.17 Si α est un réel strictement positif, et k un entier positif impair, alors l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin^k(t)}{t^\alpha} dt \quad \text{converge.}$$

Remarquons que cette intégrale n'est absolument convergente que pour $\alpha > 1$. On vérifie que les hypothèses du théorème d'Abel sont satisfaites pour $f(t) = \frac{1}{t^\alpha}$ et $g(t) = \sin^k(t)$. Pour s'assurer que la primitive de $\sin^k$ est bornée, il suffit de penser à une linéarisation, qui transformera $\sin^k(t)$ en une combinaison linéaire des $\sin(\ell t)$, $\ell = 1, \ldots, k$, dont la primitive sera toujours bornée.

Chapitre 5 Équations différentielles

L'objectif de ce chapitre est de donner les techniques nécessaires pour la résolution de certaines équations relativement simples. Tout d'abord, on précise ce qu'on entend par "équations différentielles" et par solutions d'une équation donnée vérifiant certaines conditions initiales. En particulier, on étudiera les équations homogènes, de Bernoulli et de Ricatti.

5.1 Définitions et vocabulaire

Définition 5.1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et f est une fonction définie sur une partie de $\mathbb{R}^{n+1}$.

- *On appelle **équation différentielle** d'ordre n et d'inconnue la fonction y toute relation de la forme*

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)), \tag{5.1}$$

avec les conditions initiales

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}, \tag{5.2}$$

où $(x_0, y_0, \ldots, y_{n-1})$ est un vecteur fixé dans $\mathbb{R}^{n+1}$ et l'inconnue est une fonction y de classe $\mathscr{C}^n$ définie sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant x_0.

- *On appelle solution de cette équation toute fonction y de classe $\mathscr{C}^n$ définie sur un intervalle ouvert contenant x_0 et vérifiant l'équation (5.1) ainsi que les conditions initiales (5.2).*
- *La solution est dite maximale si l'intervalle ouvert est maximal. Autrement dit, si on ne peut pas trouver une autre solution qui prolonge y.*

♣

Remarque On peut écrire l'équation différentielle (5.1) sous la forme

$$F(x, y, y', y^{(2)}, \ldots, y^{(n)}) = 0$$

où F est une fonction de $(n+2)$ variables.

Exemple 5.1

1. $y'(x) + ky(x) = \theta$ équation différentielle de premier ordre (température d'un corps).
2. $y''(x) + mgy(x) = 0$ équation différentielle de second ordre (équation du ressort).
3. $y^{(4)}(x) = r(x, y)$ équation différentielle d'ordre 4 (équation de la barre).
4. $y^{(12)}(x) = g(x, y)$ équation différentielle d'ordre 12 (Hydrodynamique-magnétique).

En ce qui nous concerne, nous nous limiterons aux équations différentielles de premier et second ordre.

Exemple 5.2

1. $y' = y + x$ avec $y(0) = 0$ est une équation différentielle du premier ordre. On peut vérifier que toute fonction de la forme
$$y(x) = ke^x - x - 1,$$
avec k constante arbitraire, est une solution de l'équation. La solution maximale qui vérifie la condition initiale donnée est
$$y(x) = e^x - x - 1.$$
2. $y'' - 3y' + 2y = 0$ avec $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$ est une équation différentielle du second ordre. La solution qui vérifie la condition initiale est
$$y(x) = -e^x + 2e^{2x}.$$
Si on remplace la condition initiale par $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, alors la fonction $y(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ est la solution maximale.
3. $y''(x) = \cos y(x) + y'(x)\frac{1}{1+x^2}$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$ est une équation différentielle du second ordre. Il n'est pas aisé de déterminer une solution de cette équation.

5.1.1 Équation différentielle linéaire

Définition 5.2

- *Une équation différentielle d'ordre n est* ***linéaire*** *si elle est de la forme*

$$a_0(x)y + a_1(x)y' + \cdots + a_n(x)y^{(n)} = g(x) \tag{5.3}$$

où les a_i et g sont des fonctions réelles continues sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Le terme linéaire signifie qu'il n'y a pas d'exposant pour les termes $y, y', y'', \ldots$.

- *Une équation différentielle linéaire est* ***homogène****, ou* ***sans second membre****, si la fonction g ci-dessus est la fonction nulle c-à-d :*

$$a_0(x)y + a_1(x)y' + \cdots + a_n(x)y^{(n)} = 0$$

- *Une équation différentielle linéaire est* ***à coefficients constants*** *si les fonctions a_i ci-dessus sont constantes :*

$$a_0y + a_1y' + \cdots + a_ny^{(n)} = g(x)$$

où les a_i sont des constantes réelles et g une fonction continue.

Exemple 5.3

1. $y' + 5xy = e^x$ est une équation différentielle linéaire du premier ordre avec second membre.
2. $y' + 5xy = 0$ est l'équation différentielle homogène associée à la précédente.
3. $2y'' - 3y' + 5y = 0$ est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants, sans second membre.
4. $y'^2 - y = x$ ou $y''.y' = 0$ ne sont pas des équations différentielles linéaires.

Proposition 5.1 (Principe de linéarité)

Si y_1 et y_2 sont solutions de l'équation différentielle linéaire homogène

$$a_0(x)y + a_1(x)y' + \cdots + a_n(x)y^{(n)} = 0 \tag{5.4}$$

alors, quels que soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda y_1 + \mu y_2$ est aussi solution de cette équation.

C'est une simple vérification. On peut reformuler la proposition en disant que l'ensemble des solutions forme un espace vectoriel.

5.1.2 Étapes de résolution d'une équation différentielle linéaire

Pour résoudre une équation différentielle linéaire avec second membre

$$a_0(x)y + a_1(x)y' + \cdots + a_n(x)y^{(n)} = g(x), \tag{5.5}$$

on décompose souvent la résolution en deux étapes :

- trouver une solution particulière y_0 de l'équation (5.5),
- trouver l'ensemble des solutions y de l'équation homogène associée

$$a_0(x)y + a_1(x)y' + \cdots + a_n(x)y(n) = 0, \tag{5.6}$$

ce qui permet de trouver toutes les solutions de (5.5) :

Proposition 5.2 (Principe de superposition)

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$a_0(x)y + a_1(x)y' + \cdots + a_n(x)y^{(n)} = g(x), \tag{5.7}$$

est formé des $y_0 + y$ avec y_0 est une solution particulière de cette équation et y est solution de l'équation homogène associée.

5.2 Équations différentielles du premier ordre

Définition 5.3

Une équation différentielle de premier ordre est une équation de type (5.1) avec $n = 1$. C'est une équation qui fait intervenir uniquement x, y et sa dérivée y'. Elle est donc de la forme :

$$y'(x) = f(x, y(x)), \tag{5.8}$$

♣

5.2.1 Équations à variables séparables

Définition 5.4

Une équation différentielle du premier ordre $y'(x) = f(x, y(x))$ est dite à variables séparables si elle peut être ramenée à la forme suivante $f(y)y' = g(x)$, où g et h sont deux fonctions continues et définies sur un intervalle ouvert et $y' = \frac{dy}{dx}$ (les y sont séparés des x).

♣

Conséquence

On obtient la solution d'une telle équation en intégrant membre à membre : Soit : $\int f(y)dy = \int g(x)dx + C$.

Si F et G désignent respectivement une primitive de f et de g, on aura $F(y(x)) = G(x) + C$, où C est une constante d'intégration.

Exemple 5.4

$$\frac{dy}{dx} = x^2\sqrt{y}$$

En séparant les variables, cette équation s'écrit :

$$\frac{dy}{\sqrt{y}} = x^2\, dx$$

et par intégration, on obtient :

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y}} = \int x^2\, dx + C$$

Soit :

$$2\sqrt{y(x)} = \frac{x^3}{3} + C$$

ou encore :

$$y(x) = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3} + C\right)\right]^2$$

Remarque La constante C est une constante arbitraire qu'on peut déterminer si, par exemple on a une condition initiale du type $y(0) = a$.

Exemple 5.5

$$y' = y$$

On remarque que $y(x) = 0$ est une solution triviale. Soit $y(x) \neq 0$ une solution de cette équation. Alors :

$$\int \frac{dy}{y} = \int dx + C$$

qui donne :

$$\ln|y(x)| = x + C$$

ou encore :

$$|y(x)| = e^{x+C} = \tilde{K}e^x$$

où $\tilde{K} = e^C$ et qu'on écrit simplement $y(x) = Ke^x$ mais avec $K = \pm\tilde{K}$. Si on impose de plus la condition initiale $y(0) = 1$, alors $K = 1$ et $y(x) = e^x$.

Exemple 5.6

1. $y'(x) = x^2y(x) + x^2$ avec $y(0) = 1$ est à variables séparables. En effet, on peut la ramener à la forme
$$\frac{y'(x)}{y(x)+1} = x^2.$$
En passant aux primitives, on a
$$\ln|y+1| = \frac{1}{3}x^3 + K,$$
ce qui conduit à
$$y(x) = K_1 e^{\frac{1}{3}x^3} - 1,$$
où K est une constante arbitraire non nulle. La condition initiale $y(0) = 1$ entraîne $K_1 = 2$.
2. $(x^2+1)y'(x) = y^2 - 1$ est à variables séparables. On a
$$\frac{y'}{y^2-1} = \frac{1}{x^2+1}.$$
En intégrant les deux membres, on trouve
$$\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right| = 2\arctan(x) + K.$$

5.2.2 Équation en $\frac{y}{x}$ se ramenant à une équation à variables séparées

Soit l'équation différentielle :
$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right)$$
On se ramène à une équation différentielle à variables séparées en posant $z = \frac{y}{x}$. En effet, $z = \frac{y}{x} \Rightarrow y = zx$ et $dy = x\,dz + z\,dx$ et par suite :
$$\frac{dy}{dx} = z + x\frac{dz}{dx} = F(z)$$
qui peut être résolue en séparant les variables :
$$x\frac{dz}{dx} = F(z) - z \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dz}{F(z)-z} = \int \frac{dx}{x}$$

Exemple 5.7

$$(x^2+y^2)\,dx + 2xy\,dy = 0, \quad x \neq 0$$

On voit bien que :
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x^2+y^2}{2xy} = -\frac{1+\frac{y^2}{x^2}}{2\frac{y}{x}} = F\left(\frac{y}{x}\right)$$
Donc en posant $z = \frac{y}{x}$, on a :
$$\frac{dz}{F(z)-z} = \frac{dx}{x}$$
avec $F(z) = -\frac{1+z^2}{2z}$, d'où :
$$F(z) - z = -\frac{1+z^2}{2z} - z = -\frac{1+3z^2}{2z}$$
et par suite :
$$\int -\frac{2z\,dz}{1+3z^2} = -\frac{1}{3}\int \frac{6z\,dz}{1+3z^2} = \int \frac{dx}{x}$$
conduisant à la solution en z vérifiant :
$$x^3(1+3z^2) = C$$
Soit encore :
$$x(x^2+3y^2) = C$$
et enfin :
$$y = \sqrt{\frac{1}{3}\left(\frac{C}{x} - x^2\right)}$$

5.2.3 Équations différentielles linéaires du premier ordre

Définition 5.5

Soit a et b deux fonctions continues sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. On appelle équation différentielle linéaire du premier ordre une équation différentielle de la forme :

$$y'(x) = a(x)y(x) + b(x), \tag{5.9}$$

♣

Définition 5.6

L'équation différentielle linéaire du premier ordre

$$y'(x) = a(x)y(x) \tag{5.10}$$

est dite équation homogène ou équation sans second membre associée à l'équation (5.9).

♣

Remarque L'équation homogène (5.10) est une équation à variables séparées : $\frac{y'}{y} = a(x)$

Par conséquent, la solution $y_H(x)$ de l'équation homogène s'obtient en intégrant membre à membre :

$$\int \frac{dy}{y} = \int a(x)\,dx$$

d'où :

$$y_H(x) = K\exp(F(x))$$

avec $K \in \mathbb{R}$ et $F(x) = \int a(x)\,dx$.

Exemple 5.8 $y'(x) + y(x) = \sin(x)$ est une équation linéaire du premier ordre où le second membre est la fonction $x \mapsto \sin(x)$, et $y'(x) + y(x) = 0$ est l'équation homogène associée.

Remarque Si y est une solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre homogène, alors ou bien y est la solution identiquement nulle ou bien y ne s'annule en aucun point.

Le théorème suivant permet de résoudre les équations différentielles linéaires du premier ordre avec second membre et à coefficients constants.

Théorème 5.1

Les solutions générales $y(x)$ de l'équation linéaire (5.9) s'obtiennent en ajoutant une solution particulière $y_P(x)$ aux solutions $y_H(x)$ de l'équation homogène (5.10) :

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x)$$

♡

Corollaire 5.1

Si y_0 une solution particulière de l'équation avec second membre, alors y est solution de l'équation avec second membre si et seulement si $(y - y_0)$ est solution de l'équation homogène associée.

♡

Démonstration D'une part, y_0 vérifie

$$y_0'(x) = a(x)y_0(x) + b(x),$$

d'autre part, si y est une solution quelconque de l'équation avec second membre, y vérifie

$$y'(x) = a(x)y_(x) + b(x),$$

En soustrayant membre à membre les deux équations on trouve

$$(y - y_0)(x) = a(x)[(y - y_0)(x).$$

Ce qui prouve le corollaire. □

Remarque En pratique, pour résoudre l'équation avec second membre, il suffit d'ajouter une solution particulière de l'équation avec second membre à la solution générale de l'équation homogène associée. L'équation homogène est une équation à variables séparables qu'on peut résoudre en utilisant la méthode exposée au paragraphe précédent.

Pour avoir une solution particulière de l'équation avec second membre, la méthode suivante est d'une grande utilité

5.2.4 Recherche des solutions particulières de l'équation différentielle linéaire

5.2.4.1 Méthode de la variation de la constante

À partir de la solution générale de l'équation homogène $y(x) = ke^{\int a(x)dx}$, la méthode consiste à considérer k comme une fonction de x et à remplacer dans l'équation avec second membre. On aura

$$y'(x) = k'(x)e^{\int a(x)dx} + a(x)k(x)e^{\int a(x)dx}.$$

En reportant dans l'équation avec second membre, on obtient

$$k'(x) = b(x)e^{-\int a(x)dx}.$$

donc

$$k(x) = \int b(x)e^{-\int a(x)dx}dx,$$

et il suffit de trouver une seule fonction k pour déduire une solution particulière de l'équation avec second membre.

Exemple 5.9 Considérons l'équation différentielle $y'(x) + y(x) = \sin(x)$.

La solution générale de l'équation homogène est $y(x) = ke^{-x}$. La méthode de la variation de la constante donne

$$k'(x) = \sin(x)e^{x}.$$

On en déduit que

$$k(x) = \frac{1}{2}(\sin(x) - \cos(x))e^{x}.$$

Par conséquent, la solution générale de l'équation donnée est

$$y(x) = ke^{-x} + \frac{1}{2}(\sin(x) - \cos(x)).$$

Exemple 5.10 Résoudre l'équation :

$$y' + y = e^{x}$$

1. On cherche les solutions $y_H(x)$ de l'équation homogène :

   $$y' + y = 0$$

   On a :

   $$\int \frac{dy}{y} = -\int dx$$

   donnant :

   $$y_H(x) = Ke^{-x}$$

2. On obtient une solution particulière en faisant varier la constante K par :

   $$K(x) = \int e^{x}e^{x}\,dx + C'$$

   soit :

   $$K(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$$

   et :

   $$y_P(x) = \frac{1}{2}e^{2x}e^{-x} = \frac{1}{2}e^{x}$$

3. Et enfin la solution générale :

   $$y(x) = y_H(x) + y_P(x) = Ke^{-x} + \frac{1}{2}e^{x}$$

   avec $K \in \mathbb{R}$.

Remarque

1. Comme son nom l'indique, une solution particulière peut être obtenue par d'autres procédés, par exemple, simplement en tentant ou en vérifiant. C'est le cas de l'exemple précédent puisqu'on sait que si $y(x) = e^{x}$, alors $y'(x) = e^{x}$ et par suite $y'(x) + y(x) = 2e^{x}$, d'où l'idée de prendre $y_P(x) = \frac{1}{2}e^{x}$ et de vérifier qu'elle est bien solution.
2. Si y et z sont deux solutions particulières, alors $y_H(x) = y(x) - z(x)$ est une solution de l'équation homogène

et par suite, la solution générale est donnée par :

$$y(x) = K(y(x) - z(x)) + y(x)$$

5.2.5 Équations homogènes du premier ordre

Définition 5.7

Ce sont les équations du type

$$y'(x) = f\left(\frac{y(x)}{x}\right).$$

♣

Exemple 5.11 L'équation $x^2y'(x) = y^2(x) + xy(x) + x^2$ est une équation homogène. En effet, elle peut être ramenée à la forme

$$y'(x) = \frac{y^2(x)}{x^2} + \frac{y(x)}{x} + 1,$$

dans ce cas, f est la fonction vérifiant $f(t) = t^2 + t + 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Après simplification, le changement de variable précédent permet d'obtenir

$$\alpha'(x)x + \alpha(x) = \alpha^2(x) + \alpha(x) + 1, \quad (\text{ avec } \alpha(x) = \frac{y(x)}{x})$$

c'est-à-dire

$$\frac{\alpha'(x)}{\alpha^2(x)+1} = \frac{1}{x}.$$

D'où

$$\alpha(x) = \tan(\ln|x| + K),$$

et par suite,

$$y(x) = x\tan(\ln|x| + K).$$

5.2.6 Équations différentielles non linéaires qui se ramènent aux équations linéaires

5.2.6.1 Équations de Bernoulli

Définition 5.8

Ce sont les équations différentielles du premier ordre de la forme

$$y'(x) + a(x)y(x) + b(x)y^n(x) = 0, \quad \text{avec } n \geq 2,$$

où a et b sont des fonctions définies sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et supposées continues.

♣

Méthode de résolution

La méthode consiste à diviser par y^n, ce qui conduit, modulo un changement de variable, à une équation différentielle linéaire du premier ordre. En effet, on a

$$\frac{y'(x)}{y^n(x)} + \frac{a(x)}{y^{n-1}(x)} + b(x) = 0.$$

Si on pose $z(x) = \frac{1}{y^{n-1}(x)}$, on a $z'(x) + (n-1)z(x)\frac{y'(x)}{y(x)} = 0$, donc

$$\frac{1}{1-n}z'(x) + a(x)z(x) + b(x) = 0.$$

Exemple 5.12 L'équation $y'(x) + x^2y(x) + x^5y^2(x) = 0$ avec $y(0) = 1$ est de Bernoulli. On pose donc $z(x) = \frac{1}{y(x)}$ et on obtient l'équation

$$-z'(x) + x^2z(x) + x^5 = 0.$$

La résolution de l'équation homogène donne

$$z(x) = ke^{x^3/3},$$

et la variation de la constante donne

$$k'(x) = x^5 e^{-x^3/3}.$$

À l'aide d'une intégration par parties, on obtient

$$k(x) = (-x^3 - 3)e^{-x^3/3},$$

par suite,

$$z(x) = ke^{x^3/3} - x^3 - 3,$$

et finalement,

$$y(x) = \frac{1}{ke^{x^3/3} - x^3 - 3},$$

où la constante k est à déterminer selon la condition initiale.

Dans notre cas, on a

$$y(x) = \frac{1}{4e^{x^3/3} - x^3 - 3}.$$

Exemple 5.13

$$y'(x) + y(x) = x(y(x))^2$$

On voit que $y(x) = 0$ est solution. Si $y(x) \neq 0$, en divisant par y^2, on obtient :

$$\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx} + \frac{1}{y} = x$$

En posant $z = y^{1-2} = \frac{1}{y}$, on a :

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx}$$

et l'équation différentielle devient :

$$-\frac{dz}{dx} + z = x$$

admettant pour solution homogène $z_H = Ke^x$ et par variation de la constante, on obtient une solution particulière :

$$z_P = K(x)e^x$$

où $K'(x) = -xe^{-x}$ et $K(x) = xe^{-x} + e^{-x}$. Soit :

$$z_P(x) = -x - 1$$

et :

$$z(x) = Ke^x + x + 1$$

Et enfin :

$$y = \frac{1}{z} = \frac{1}{Ke^x + x + 1}$$

5.2.6.2 Équations de Ricatti

Définition 5.9

Ce sont les équations différentielles du premier ordre de la forme

$$y'(x) = a(x)y^2(x) + b(x)y(x) + c(x),$$

où a, b et c sont des fonctions définies sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et supposées continues. ♣

Méthode de résolution

Quand on connaît une solution particulière y_0 de cette équation, on fait le changement de variable

$$z = y - y_0.$$

L'intérêt est que nous obtenons une équation qui est de Bernoulli en z,

$$z'(x) = a(x)z^2(x) + (2a(x)y_0(x) + b(x))z(x).$$

Remarque Avant de passer à l'autre paragraphe, il est utile de remarquer que toutes les solutions maximales obtenues pour les différents types d'équations sont uniques une fois la condition initiale choisie. On parle d'existence et d'unicité de la solution maximale.

5.3 Équations différentielles linéaires du second ordre

5.3.1 Équations linéaires du second ordre à coefficients constants

Définition 5.10

Une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants, est une équation de la forme

$$ay'' + by' + cy = g(x) \tag{5.11}$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ et g est une fonction continue sur un intervalle ouvert I. L'équation

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{5.12}$$

est appelée l'équation homogène associée à (5.11). ♣

La structure des solutions de l'équation est très simple, on admet le résultat suivant :

Théorème 5.2

L'ensemble des solutions de l'équation homogène (5.12) *est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2.* ♡

5.3.2 Équation homogène

On cherche une solution de (5.12) sous la forme $y(x) = e^{rx}$ où $r \in \mathbb{C}$ est une constante à déterminer. On trouve

$$\begin{aligned} & ay'' + by' + cy && = 0 \\ \Longleftrightarrow \quad & \left(ar^2 + br + c\right) e^{rx} && = 0 \\ \Longleftrightarrow \quad & ar^2 + br + c && = 0 \end{aligned}$$

Définition 5.11

L'équation $ar^2 + br + c = 0$ est appelée l'équation caractéristique associée à (5.12). ♣

Soit $\Delta = b^2 - 4ac$, le discriminant de l'équation caractéristique associée à (5.12).

Théorème 5.3

1. *Si $\Delta > 0$, l'équation caractéristique possède deux racines réelles distinctes $r_1 \neq r_2$ et les solutions de* (5.12) *sont les*

$$y(x) = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x} \quad \text{où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

2. *Si $\Delta = 0$, l'équation caractéristique possède une racine double r_0 et les solutions de* (5.12) *sont les*

$$y(x) = (\lambda + \mu x)e^{r_0 x} \quad \text{où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

3. *Si $\Delta < 0$, l'équation caractéristique possède deux racines complexes conjuguées $r_1 = \alpha + \mathrm{i}\beta$, $r_2 = \alpha - \mathrm{i}\beta$ et les solutions de* (5.12) *sont les*

$$y(x) = e^{\alpha x}(\lambda \cos(\beta x) + \mu \sin(\beta x)) \quad \text{où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

♡

Exemple 5.14

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $y'' - y' - 2y = 0$. L'équation caractéristique est $r^2 - r - 2 = 0$, qui s'écrit aussi $(r+1)(r-2) = 0$ $(\Delta > 0)$. D'où, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y(x) = \lambda e^{-x} + \mu e^{2x}$, avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $y'' - 4y' + 4y = 0$. L'équation caractéristique est $r^2 - 4r + 4 = 0$, soit $(r-2)^2 = 0$ $(\Delta = 0)$. D'où, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y(x) = (\lambda x + \mu)e^{2x}$, avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
3. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $y'' - 2y' + 5y = 0$. L'équation caractéristique est $r^2 - 2r + 5 = 0$. Elle admet deux solutions complexes conjuguées : $r_1 = 1 + 2\mathrm{i}$ et $r_2 = 1 - 2\mathrm{i}$ $(\Delta < 0)$. D'où, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y(x) = e^x(\lambda\cos(2x) + \mu\sin(2x))$, avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Démonstration La preuve consiste à trouver deux solutions linéairement indépendantes, ce qui permet d'affirmer qu'elles forment une base d'après le théorème 5.2 (que l'on a admis).

1. Si $\Delta > 0$, alors l'équation caractéristique a deux racines réelles distinctes r_1, r_2. On obtient ainsi deux solutions $y_1 = e^{r_1 x}$, $y_2 = e^{r_2 x}$ qui sont linéairement indépendantes car $r_1 \neq r_2$. Comme l'espace des solutions est un espace vectoriel de dimension 2 (par le théorème 5.2), alors une base de l'espace des solutions de (5.12) est $\{e^{r_1 x}, e^{r_2 x}\}$. La solution générale de (5.12) s'écrit $y(x) = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}$, où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
2. Si $\Delta = 0$, alors l'équation caractéristique a une racine réelle double r_0. On obtient ainsi une solution $y_1 = e^{r_0 x}$. On vérifie que $y_2 = xe^{r_0 x}$ est aussi une solution : $ay_2'' + by_2' + cy_2 = \left(2ar_0 + ar_0^2 x\right)e^{r_0 x} + (b + br_0 x)e^{r_0 x} + cxe^{r_0 x} = (2ar_0 + b)\,e^{r_0 x} = 0$ car $2ar_0 + b = P'(r_0) = 0$, où $P(r) = ar^2 + br + c$. Ces deux solutions sont linéairement indépendantes. Une base de l'espace des solutions est $\{e^{r_0 x}, xe^{r_0 x}\}$, et la solution générale de (5.12) s'écrit $y(x) = (\lambda + \mu x)e^{r_0 x}$, où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
3. Si $\Delta < 0$, alors l'équation caractéristique a deux racines complexes conjuguées $r_1 = \alpha + \mathrm{i}\beta$, $r_2 = \alpha - \mathrm{i}\beta$. On obtient deux solutions complexes $Y_1 = e^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)x} = e^{\alpha x}e^{\mathrm{i}\beta x}$, $Y_2 = e^{(\alpha-\mathrm{i}\beta)x} = e^{\alpha x}e^{-\mathrm{i}\beta x}$. Comme les parties réelles et imaginaires sont des solutions réelles, on obtient deux solutions réelles $y_1 = e^{\alpha x}\cos(\beta x)$, $y_2 = e^{\alpha x}\sin(\beta x)$, qui sont linéairement indépendantes. Alors, une base de l'espace des solutions est $\{e^{\alpha x}\cos(\beta x), e^{\alpha x}\sin(\beta x)\}$. La solution générale de (5.12) s'écrit $y(x) = e^{\alpha x}(\lambda\cos(\beta x) + \mu\sin(\beta x))$, où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$\square$

Remarque Il faut noter que nous avons bien déterminé toutes les solutions possibles pour les équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants sans second membre et nous avons par la même occasion obtenu la proposition suivante

Proposition 5.3

L'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 2 dont une base est $\{y_1, y_2\}$ avec :

$y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$, $y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$ *si on a deux racines réelles distinctes λ_1 et λ_2.*

$y_1(x) = e^{\lambda_0 x}$, $y_2(x) = xe^{\lambda_0 x}$ *si on a une racine double λ_0.*

$y_1(x) = \cos(\beta x)e^{\alpha x}$, $y_2(x) = \sin(\beta x)e^{\alpha x}$ *si on a deux racines complexes conjuguées $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$.*

Exemple 5.15

1. Pour trouver les solutions de $y'' + y' - 2y = 0$, on commence par écrire l'équation caractéristique
$$r^2 + 2r - 2 = 0,$$
qui admet deux solutions réelles distinctes $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = -2$. La solution générale de cette équation est donc de la forme
$$y(x) = k_1 e^x + k_2 e^{-2x}.$$
2. Pour trouver les solutions de $y'' - 4y' + 4y = 0$, on commence par écrire l'équation caractéristique
$$r^2 - 4r + 4 = 0,$$
qui admet une solution réelle double $\lambda_0 = 2$. La solution générale de cette équation est donc de la forme
$$y(x) = (k_1 x + k_2)e^{2x}.$$
3. Pour trouver les solutions de $y'' - 2y' + 2y = 0$, on commence par écrire l'équation caractéristique
$$r^2 - 2r + 2 = 0,$$

qui admet deux solutions complexes conjuguées $\lambda_1 = 1+i$ et $\lambda_2 = 1-i$. La solution générale de cette équation est donc de la forme

$$y(x) = (k_1 \cos x + k_2 \sin x)e^x.$$

Exemple 5.16

1. $y'' - 5y' + 6y = 0 \Rightarrow r^2 - 5r + 6 = 0 \Rightarrow \Delta = 25 - 24 = 1 > 0$. Les solutions sont données par :
$$y_1(x) = e^{2x} \quad \text{et} \quad y_2(x) = e^{3x}$$
et :
$$y(x) = Ay_1(x) + By_2(x) = Ae^{2x} + Be^{3x}$$
2. $y'' - 4y' + 4y = 0 \Rightarrow r^2 - 4r + 4 = 0 \Rightarrow \Delta = 16 - 16 = 0$. Les solutions sont données par :
$$y_1(x) = e^{2x} \quad \text{et} \quad y_2(x) = xe^{2x}$$
et :
$$y(x) = Ay_1(x) + By_2(x) = (A + Bx)e^{2x}$$
3. $y'' + 2y' + 2y = 0 \Rightarrow r^2 + 2r + 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 4 - 8 = -4 < 0 \Rightarrow r_1 = -1 + i$ et $r_2 = -1 - i$. Les solutions sont données par :
$$y_1(x) = e^{-x}\cos(x) \quad \text{et} \quad y_2(x) = e^{-x}\sin(x)$$
et :
$$y(x) = Ay_1(x) + By_2(x) = e^{-x}[A\cos(x) + B\sin(x)]$$

Pour compléter l'étude, il reste à ajouter une solution particulière de l'équation avec second membre. Pour cela, on va adapter la méthode de la variation de la constante aux équations linéaires du second ordre.

5.3.3 Équation avec second membre

Nous passons au cas général d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2, à coefficients constants, mais avec un second membre g qui est une fonction continue sur un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$:

$$ay'' + by' + cy = g(x) \tag{5.13}$$

Pour ce type d'équation, nous admettons le théorème de Cauchy-Lipschitz qui s'énonce ainsi :

Théorème 5.4 (Cauchy-Lipschitz)

Pour chaque $x_0 \in I$ et chaque couple $(y_0, y_1) \in \mathbb{R}^2$, l'équation (5.13) admet une unique solution y sur I satisfaisant aux conditions initiales :

$$y(x_0) = y_0 \quad \text{et} \quad y'(x_0) = y_1.$$

♡

Dans la pratique, pour résoudre une équation différentielle linéaire avec second membre (avec ou sans conditions initiales), on cherche d'abord une solution de l'équation homogène, puis une solution particulière de l'équation avec second membre et on applique le principe de superposition :

Proposition 5.4

Les solutions générales de l'équation (5.13) *s'obtiennent en ajoutant les solutions générales de l'équation homogène* (5.12) *à une solution particulière de* (5.13).

♠

Il reste donc à déterminer une solution particulière.

5.3.3.1 Méthode de recherche d'une solution particulière de l'équation avec second membre

Dans chacun des trois cas qui peuvent se présenter, la solution générale est de la forme

$$y(x) = k_1 y_1(x) + k_2 y_2(x).$$

La méthode consiste à considérer k_1 et k_2 comme des fonctions de x. Par suite, on pose

$$y(x) = k_1(x) y_1(x) + k_2(x) y_2(x).$$

De plus, comme il suffit de trouver une solution particulière, nous allons imposer une restriction. Nous allons chercher une solution particulière de la forme

$$y(x) = k_1 y_1(x) + k_2 y_2(x),$$

avec la condition

$$k_1'(x) y_1(x) + k_2'(x) y_2(x) = 0.$$

Maintenant, si on cherche $y'(x)$, $y''(x)$ puis on reporte dans l'équation, on obtient l'équation

$$k_1'(x) y_1'(x) + k_2'(x) y_2'(x) = g(x),$$

où $g(x)$ est le second membre de l'équation différentielle. Nous avons donc à résoudre le système suivant

$$\begin{cases} k_1'(x) y_1(x) + k_2'(x) y_2(x) = 0, \\ k_1'(x) y_1'(x) + k_2'(x) y_2'(x) = g(x). \end{cases}$$

Si on note

$$W(y_1, y_2)(x) = \det \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix},$$

alors on déduit

$$k_1'(x) = -\frac{y_2(x) g(x)}{W(y_1, y_2)(x)} \quad \text{et} \quad k_2'(x) = \frac{y_1(x) g(x)}{W(y_1, y_2)(x)}.$$

On cherchera alors à trouver une primitive k_1 et une primitive k_2.

Définition 5.12

*La fonction $W(y_1, y_2)$ s'appelle le **wronskien** de y_1 et de y_2.* ♣

Remarque

1. On peut noter que dans chacun des trois cas possibles, le wronskien des fonctions correspondantes ne s'annule en aucun point.
2. Plus généralement, si f et h sont deux solutions de l'équation sans second membre linéairement indépendantes, c'est-à-dire, telles que $\mu f(x) + \nu h(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \mu = \nu = 0$, alors $W(f, h)(x) \neq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
   En effet, supposons qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $W(f, h)(x_0) = 0$. Alors les vecteurs
   $$u_1 = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ f'(x_0) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad u_2 = \begin{pmatrix} h(x_0) \\ h'(x_0) \end{pmatrix}$$
   sont linéairement dépendants.
   En effet, si on suppose, par exemple, que $u_1 = \alpha u_2$ pour un certain réel α convenable. Considérons ensuite les deux fonctions f et αh. Elles sont toutes les deux solutions de l'équation différentielle homogènes, répondant à la même condition initiale
   $$y(x_0) = f(x_0) \quad \text{et} \quad y'(x_0) = f(x_0).$$
   Elles sont donc égales d'après l'unicité de la solution. Par suite, on a
   $$f(x) = \alpha h(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$
   Nous avons aussi obtenu que le wronskien de deux solutions s'annule en un point si et seulement si il s'annule partout.

Exemple 5.17

On se propose de résoudre l'équation différentielle suivante sur l'intervalle $]0, \frac{\pi}{2}[$

$$y'' + y = \frac{1}{\sin(x)}.$$

Nous savons d'après ce qui précède que la solution générale de l'équation homogène est

$$y(x) = k_1 \cos(x) + k_2 \sin(x).$$

Dans ce cas, on a

$$W(y_1, y_2)(x) = 1.$$

D'après la méthode de la variation de la constante, et après calcul, on doit résoudre

$$k_1'(x) = -1, \quad k_2'(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}.$$

On obtient alors

$$k_1(x) = -x, \quad k_2(x) = \ln|\sin(x)|.$$

Une solution particulière de l'équation avec second membre est

$$y_0(x) = -x\cos(x) + \sin(x)\ln|\sin(x)|.$$

On en déduit donc la solution générale de l'équation avec second membre

$$y(x) = k_1 \cos(x) + k_2 \sin(x) + y_0(x).$$

Exemple 5.18 Résoudre l'équation suivante, sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$:

$$y'' + y = \frac{1}{\cos x}$$

Les solutions de l'équation homogène $y'' + y = 0$ sont $\lambda \cos x + \mu \sin x$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On cherche une solution particulière de l'équation avec second membre sous la forme

$$y_0(x) = \lambda(x)\cos x + \mu(x)\sin x$$

où cette fois $\lambda(x), \mu(x)$ sont des fonctions à trouver et qui vérifient (S) :

$$\begin{cases} \lambda' \cos x + \mu' \sin x = 0 \\ -\lambda' \sin x + \mu' \cos x = \frac{1}{\cos x}. \end{cases}$$

En multipliant la première ligne par $\sin x$ et la seconde par $\cos x$, on obtient

$$\begin{cases} \lambda' \cos x \sin x + \mu'(\sin x)^2 = 0 \\ -\lambda' \cos x \sin x + \mu'(\cos x)^2 = 1 \end{cases} \quad \text{donc par somme} \quad \mu' = 1$$

Ainsi $\mu(x) = x$ et la première ligne des équations devient $\lambda' = -\frac{\sin x}{\cos x}$ donc $\lambda(x) = \ln(\cos x)$.

On vérifie pour se rassurer que $y_0(x) = \ln(\cos x)\cos x + x \sin x$ est une solution de l'équation. Ainsi les fonctions solutions sont de la forme :

$$\lambda \cos x + \mu \sin x + \ln(\cos x)\cos x + x \sin x$$

quels que soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

5.3.4 Exemples d'équations à coefficients non constants

5.3.4.1 Le second membre est un polynôme de la forme $g(x) = P_n(x)$

Si le second membre est un polynôme $P_n(x)$ de degré n,

- si $c \neq 0$ alors il existe une solution particulière sous forme d'un un polynôme de degré n
- si $c = 0$ et $b \neq 0$ alors il existe une solution particulière sous forme d'un polynôme de degré $n + 1$
- si $c = 0$ et $b = 0$ alors il existe une solution particulière sous forme d'un polynôme de degré $n + 2$

Exemple 5.19 $y'' - 3y' = x$. On cherche une solution particulière sous la forme $a_2x^2 + a_1x + a_0$.

5.3.4.2 Second membre de la forme $g(x) = Ae^{\alpha x}$

Pour un second membre de de la forme $g(x) = Ae^{\alpha x}$ avec $(\alpha, A) \in \mathbb{R}^2$:

- lorsque α n'est pas une racine de l'équation caractéristique associée, on recherche une solution particulière de la forme $y_P = Be^{\alpha x}$ avec $B \in \mathbb{R}$,
- lorsque α est une racine simple de l'équation caractéristique associée, on recherche une solution particulière de la forme $y_P = Bxe^{\alpha x}$ avec $B \in \mathbb{R}$,
- lorsque α est une racine double de l'équation caractéristique associée, on recherche une solution particulière de la forme $y_P = Bx^2e^{\alpha x}$ avec $B \in \mathbb{R}$.

5.3.4.3 Second membre de la forme $g(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$

Si le second membre est de la forme $P_n(x)e^{\alpha x}$ où P_n est un polynôme de degré n, et $\alpha \in \mathbb{R}$,

- lorsque α n'est pas une racine de l'équation caractéristique associée, on recherche une solution particulière de la forme $y_P = Q(x)e^{\alpha x}$ avec $B \in \mathbb{R}$ et $Q(x)$ est un polynôme de degré n,
- lorsque α est une racine simple de l'équation caractéristique associée, on recherche une solution particulière de la forme $y_P = xQ(x)e^{\alpha x}$ avec $B \in \mathbb{R}$ et $Q(x)$ est un polynôme de degré n,
- lorsque α est une racine double de l'équation caractéristique associée, on recherche une solution particulière de la forme $y_P = x^2Q(x)e^{\alpha x}$ avec $B \in \mathbb{R}$ et $Q(x)$ est un polynôme de degré n.

Exemple 5.20 $y'' + y' - 2y = (x+1)e^x$. On cherche une solution particulière sous la forme $(a_2x^2 + a_1x + a_0)e^x$.

Exercice 5.1

Résoudre les équations différentielles :

1. $(E_1) : y'' - 5y' + 6y = 0$,
2. $(E_2) : y'' - 5y' + 6y = 4xe^x$, déduire la solution vérifiant $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$
3. $(E_3) : y'' - 5y' + 6y = 4xe^{2x}$.

Solution

1. *L'équation caractéristique est* $r^2 - 5r + 6 = (r-2)(r-3) = 0$, *avec deux racines distinctes* $r_1 = 2$, $r_2 = 3$. *Donc l'ensemble des solutions est* $\left\{\lambda e^{2x} + \mu e^{3x} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\right\}$.
2. - *On cherche une solution particulière sous la forme* $y_P(x) = (ax+b)e^x$. *Lorsque l'on injecte* y_P *dans l'équation* (E_2), *on obtient :*

   $$\begin{aligned} & (ax + 2a + b)e^x - 5(ax + a + b)e^x + 6(ax+b)e^x = 4xe^x \\ \Longleftrightarrow & (a - 5a + 6a)x + 2a + b - 5(a+b) + 6b = 4x \\ \Longleftrightarrow & 2a = 4 \text{ et } -3a + 2b = 0 \\ \Longleftrightarrow & a = 2 \text{ et } b = 3 \end{aligned}$$

   Donc $y_P(x) = (2x+3)e^x$.
   - *L'ensemble des solutions de* (E_2) *est* $\left\{(2x+3)e^x + \lambda e^{2x} + \mu e^{3x} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\right\}$.
   - *On a* $y(x) = (2x+3)e^x + \lambda e^{2x} + \mu e^{3x}$. *On cherche* λ, μ *tels que* $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. *C'est-à-dire que* $3 + \lambda + \mu = 1$, $5 + 2\lambda + 3\mu = 0$. *Donc* $\lambda = -1$, $\mu = -1$, *c'est-à-dire que* $y(x) = (2x+3)e^x - e^{2x} - e^{3x}$.
3. *Comme 2 est une racine de l'équation caractéristique, on cherche une solution particulière sous la forme* $y_P(x) = x(ax+b)e^{2x}$. *On obtient* $y_P(x) = x(-2x-4)e^{2x}$.

Annexes

Annexe A Identités algébriques

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \cdots + C_n^k a^{n-k} b^k + \cdots + b^n \quad \text{avec} \quad C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

$$a^{2m+1} + b^{2m+1} = (a+b)(a^{2m} - a^{2m-1}b + \cdots - ab^{2m-1} + b^{2m})$$

Cas particuliers (a = 1) $\quad 1 - x^{n+1} = (1-x)(1 + x + x^2 + \cdots + x^n)$

Annexe B Trigonométrie

θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$	$\cot\theta$
$0=0°$	0	1	0	$-$
$\pi/6=30°$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$\pi/4=45°$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$\pi/3=60°$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\pi/2=90°$	1	0	$-$	0

$$\sin(x+2\pi)=\sin x$$

$$\sin(x+\pi)=-\sin x$$

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x$$

$$\sin(-x)=-\sin x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$$

$$\cos(x+2\pi)=\cos x$$

$$\cos(x+\pi)=-\cos x$$

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin x$$

$$\cos(-x)=\cos x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$$

$$\tan(x+2\pi)=\tan x$$

$$\tan(x+\pi)=\tan x$$

$$\tan\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\cot x$$

$$\tan(-x)=-\tan x$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cot x$$

$$\cosh(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

$$\sinh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$$

$$\tanh(x)=\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$$

$$\coth(x)=\frac{\cosh(x)}{\sinh(x)}$$

$$\cos(n\pi)=(-1)^n$$

$$\sin^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)=\frac{1+(-1)^{n+1}}{2}$$

$$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$$

$$\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y$$

$$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y$$

$$\sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y$$

$$\tan(x+y)=\frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y}$$

$$\tan(x-y)=\frac{\tan x-\tan y}{1+\tan x\tan y}$$

$$\cos(2x)=\cos^2 x-\sin^2 x=2\cos^2 x-1=1-2\sin^2 x$$

$$\sin(2x)=2\sin x\cos x$$

$$\tan(2x)=\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$$

$$\sin mx\sin nx=\frac{1}{2}\left[\cos(m-n)x-\cos(m+n)x\right]$$

$$\sin mx\cos nx=\frac{1}{2}\left[\sin(m-n)x+\sin(m+n)x\right]$$

$$\cos mx\cos nx=\frac{1}{2}\left[\cos(m-n)x+\cos(m+n)x\right]$$

$$\sin p+\sin q=2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

$$\sin p-\sin q=2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

$$\cos p+\cos q=2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

$$\cos p-\cos q=-2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

$$\arg\sinh x=\log(x+\sqrt{x^2+1})$$

$$\arg\cosh x=\log(x+\sqrt{x^2-1})$$

Annexe C Développements limités usuels

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(x^{2p+1})$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p})$$

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^6)$$

$$\sinh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(x^{2p+1})$$

$$\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p})$$

$$\tanh(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^6)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n) \quad \text{pour tout } \alpha \in \mathbb{R},$$

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$$

$$\arcsin(x) = x + \frac{x^3}{2 \times 3} + \frac{1 \times 3}{2^2 \times 2!} \times \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2^n n!} \times \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$$