Discours concernant deux sciences nouvelles

Galilée, (Galileo Galilei, dit)

d'après une traduction de Maurice Clavelin
éditée aux PUF, collection ÉPIMÉTHÉE (Essais philosophiques - 04/1995)

DISCORSI
E
DIMOSTRAZIONI
MATEMATICHE,
intorno à due nuoue ſcienze
Attenenti alla
MECANICA & i MOVIMENTI LOCALI;
del Signor
GALILEO GALILEI LINCEO,
Filoſofo e Matematico primario del Sereniſſimo
Grand Duca di Toſcana.
Con vna Appendice del centro di grauità d'alcuni Solidi.

IN LEIDA,
Appreſſo gli Elſevirii. M. D. C. XXXVIII.

Page de titre de l'ouvrage original

Extraits : troisième journée

Du mouvement local

Nous apportons sur le sujet le plus ancien une science absolument nouvelle. Il n'est peut-être rien dans la nature d'antérieur au mouvement, et les traités que lui ont consacrés les philosophes ne sont petits ni par le nombre ni par le volume ; pourtant, parmi ses propriétés, nombreuses et dignes d'être connues sont celles qui, à ma connaissance, n'ont encore été ni observées ni démontrées. Certaines, plus apparentes, ont été remarquées, tel le fait que le mouvement naturel des graves, en chute libre, est continuellement accéléré ; selon quelle proportion, toutefois, se produit cette accélération, on ne l'a pas établi jusqu'ici : nul en effet, que je sache, n'a démontré que les espaces parcourus en des temps égaux par un mobile partant du repos ont entre eux même rapport que les nombres impairs successifs à partir de l'unité. On a observé que les corps lancés, ou projectiles, décrivent une courbe d'un certain type ; mais que cette courbe soit une parabole, personne ne l'a mis en évidence. Ce sont ces faits, et d'autres non moins nombreux et dignes d'être connus, qui vont être démontrés, et ainsi — ce que j'estime beaucoup plus important — ouvrir l'accès à une science aussi vaste qu'éminente, dont mes propres travaux marqueront le commencement et dont des esprits plus perspicaces que le mien exploreront les parties les plus cachées.
Nous divisons cette étude en trois parties : dans la première nous considérons ce qui se rapporte au mouvement régulier ou uniforme ; dans la seconde nous traitons du mouvement naturellement accéléré, et dans la troisième du mouvement violent ou de projection.

DU MOUVEMENT UNIFORME

Pour le mouvement régulier, ou uniforme, nous avons besoin d'une seule définition que je formule ainsi :

Définition

Par mouvement régulier ou uniforme, j'entends celui où les espaces parcourus par un mobile en des temps égaux quelconques, sont égaux entre eux.

Avertissement

A la vieille définition (qui entend simplement par mouvement uniforme celui où en des temps égaux sont franchis des espaces égaux) il a paru bon d'ajouter le terme « quelconques », s'appliquant à tous les intervalles de temps égaux : il peut en effet advenir que pendant des temps égaux déterminés un mobile parcourt des espaces égaux, alors que les espaces parcourus pendant des parties plus petites et égales de ces mêmes temps, ne seront pas égaux. De la définition proposée découlent quatre axiomes, à savoir :

Axiome I

Au cours d'un même mouvement uniforme, l'espace franchi pendant un temps plus long est supérieur à l'espace franchi pendant un temps plus bref.

Axiome II

Au cours d'un même mouvement uniforme, le temps durant lequel est franchi un espace plus grand est plus long que le temps durant lequel est franchi un espace plus court.

Axiome III

Pour un même intervalle de temps, l'espace franchi avec une vitesse plus grande est supérieur à l'espace franchi avec une vitesse moins grande.

Axiome IV

La vitesse avec laquelle, pendant un même intervalle de temps, est franchie une distance plus grande est supérieure à la vitesse avec laquelle est franchie une distance moins grande.

Théorème I — Proposition I

Si un mobile animé d'un mouvement uniforme parcourt, avec une même vitesse, deux distances, les temps des mouvements seront entre eux comme les distances parcourues.

Soit en effet un mobile animé d'un mouvement uniforme et qui parcourt avec la même vitesse les deux distances AB, BC ; soit DE le temps du mouvement le long de AB, et EF le temps le long de BC ; je dis que le rapport de l'espace AB à l'espace BC sera aussi celui du temps DE au temps EF.
Prolongeons de part et d'autre les distances et les temps, les distances vers G et H, les temps vers I et K ; divisons AG en un certain nombre d'intervalles spatiaux égaux à AB, et DI, pareillement, en un nombre égal d'intervalles de temps égaux à DE ; à nouveau divisons CH en un nombre quelconque d'intervalles spatiaux égaux à CB, et FK en un même nombre d'intervalles de temps égaux à EF : l'espace BG et le temps EI seront alors,

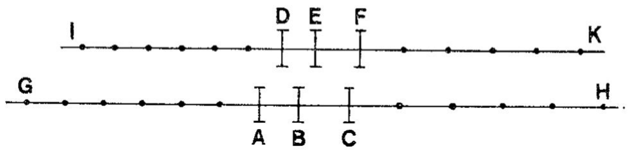


FIG. 1 – Théorème I — Proposition I

quel que soit le multiplicateur, des multiples égaux de l'espace BA et du temps ED, de même que l'espace HB et le temps KE vis-à-vis de l'espace CB et du temps FE.
Comme DE est le temps nécessaire pour traverser AB, EI en son entier représentera le temps nécessaire pour traverser BG en son entier, le mouvement étant uniforme et EI contenant autant d'intervalles de temps égaux à DE qu'il y a en BG d'intervalles d'espace égaux à BA ; et l'on conclura de même que KE est le temps nécessaire pour franchir HB. Mais puisque le mouvement est, par hypothèse, uniforme, si l'espace GB était égal à BH, le temps IE serait aussi égal au temps EK, et si GB était plus grand, ou moins grand que BH, de même IE serait plus grand, ou moins grand, que EK.
On a donc quatre grandeurs, AB la première, BC la deuxième, DE la troisième, et EF la quatrième, puis avec le temps IE et l'espace GB des multiples égaux et arbitraires de la première et de la troisième, à savoir l'espace AB et le temps DE ; or on a démontré que IE et GB sont soit égaux ensemble, soit plus petits ensemble, soit plus grands ensemble que le temps EK et l'espace BH, multiples égaux et arbitraires de la deuxième et de la quatrième grandeurs ; la première a donc avec la deuxième, c'est-à-dire la distance AB avec la distance BC, même rapport que la troisième avec la quatrième, c'est-à-dire le temps DE avec le temps EF ; ce qu'il fallait démontrer.

Théorème II — Proposition II

Si un mobile parcourt deux distances en des temps égaux, ces distances seront entre elles comme les vitesses. Et si les distances sont comme les vitesses, les temps seront égaux.

Reprenons la figure précédente,

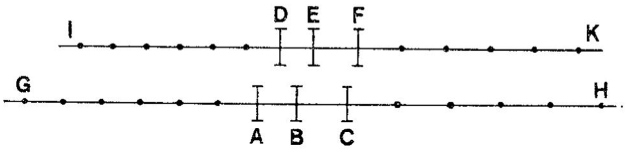


FIG. 2 – Théorème II — Proposition II

et soient deux distances AB, BC, parcourues en des temps égaux, la distance AB avec la vitesse DE et la distance BC avec la vitesse EF ; je dis que la distance AB est avec la distance BC dans le même rapport que la vitesse DE avec la vitesse EF. Si l'on prend en effet, comme plus haut, des multiples égaux et arbitraires des distances et des vitesses (à savoir GB et IE pour AB et DE, puis pareillement HB et KE pour BC et EF), on conclura de la même façon que les multiples GB et IE sont ensemble soit plus petits, soit égaux, soit plus grands que les multiples identiques BH et EK. D'où le caractère manifeste de la Proposition.

Théorème III — Proposition III

Si un même espace est franchi avec des vitesses inégales, les temps seront en raison inverse des vitesses.

Soient deux vitesses inégales, A la plus grande, B la plus petite ; le mouvement qui leur correspond a lieu sur le même espace CD : je dis que le temps dans lequel la vitesse A franchit l'espace CD est avec le temps dans lequel la vitesse B franchit le même espace, comme la vitesse B avec la vitesse A.

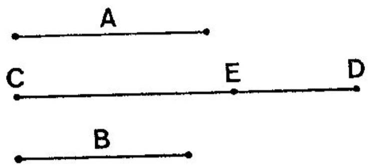


FIG. 3 – Théorème III — Proposition III

Posons en effet entre CD et CE le même rapport qu'entre A et B ; d'après ce qui précède, le temps dans lequel la vitesse A parcourt CD est égal au temps dans lequel B parcourt CE ; mais le temps qu'il faut à la vitesse B pour traverser CE est avec le temps qu'il lui faut pour traverser CD, comme CE est à CD ; par conséquent le temps dans lequel la vitesse A parcourt CD est au temps dans lequel la vitesse B parcourt la même distance CD, comme CE à CD, c'est.à-dire comme la vitesse B à la vitesse A ; ce que l'on voulait montrer.

Théorème IV — Proposition IV

Si deux mobiles sont mus d'un mouvement uniforme, mais avec des vitesses inégales, les espaces qu'ils parcourront en des temps inégaux seront entre eux dans un rapport composé du rapport des vitesses et du rapport des temps.

Soient deux mobiles E et F animés d'un mouvement uniforme ; le rapport de la vitesse du mobile E à la vitesse du mobile F est comme A à B, mais le rapport du temps pendant lequel E se meut au temps pendant lequel F se meut est comme C à D : je dis que le rapport entre l'espace parcouru par E avec la vitesse A pendant le temps C et l'espace parcouru par F avec la vitesse B pendant le temps D, est composé du rapport de la vitesse A à la vitesse B et du rapport du temps C au temps D.

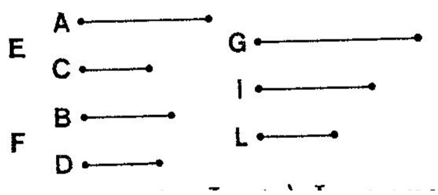


FIG. 4 – Théorème IV — Proposition IV

Si G est l'espace parcouru par E avec la vitesse A pendant le temps C ; si G est à I comme la vitesse A est à la vitesse B, et si en outre I est à L comme le temps C est au temps D, il en résulte que I représente l'espace franchi par F dans le même temps que E parcourt G, puisque les espaces G et I sont comme les vitesses A et B. Et puisque I est à L comme le temps C est au temps D ; que I représente l'espace franchi par le mobile F durant le temps C, — L sera l'espace que traverse F dans le temps D avec la vitesse B. Mais le rapport de G à L est composé des rapports de G à I et de I à L, c'est-à-dire des rapports de la vitesse A à la vitesse B et du temps C au temps D ; d'où suit notre proposition.

Théorème V — Proposition V

Si deux mobiles sont mus d'un mouvement uniforme, mais avec des vitesses inégales et sur des espaces inégaux, alors le rapport des temps sera composé du rapport des espaces et du rapport inverse des vitesses.

Soient deux mobiles A et B ; la vitesse de A est à la vitesse de B comme V à T, et les espaces parcourus sont comme S à R : je dis que le rapport du temps pendant lequel A se meut au temps pendant lequel B se meut est composé du rapport de la vitesse T à la vitesse V et du rapport de l'espace S à l'espace R. Soit C le temps du mouvement A, et que C soit à E comme la vitesse T est à la vitesse V ; puisque C est le temps durant lequel A franchit avec la vitesse V l'espace S, et puisque la vitesse T du mobile B est à la vitesse V comme le temps C au temps E, alors E représentera le temps pendant lequel le mobile B franchirait le même espace S.

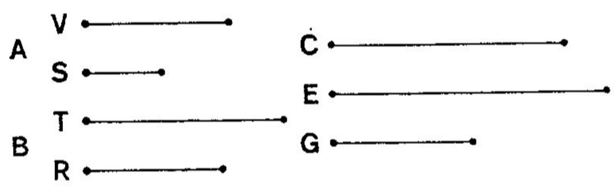


Fig. 5 – Théorème V — Proposition V

Posons maintenant entre le temps E et le temps G même rapport qu'entre l'espace S et l'espace R : il en résulte que G est le temps pendant lequel B parcourrait l'espace R. Et parce que le rapport de C à G est composé des rapports de C à E et de E à G ; que, d'une part, le rapport de C à E est identique au rapport inverse des vitesses des mobiles A et B, c'est-à-dire au rapport de T à V ; que, d'autre part, le rapport de E à G est identique au rapport des espaces S et R, la proposition est manifestement établie.

Théorème VI — Proposition VI

Si deux mobiles sont animés d'un mouvement uniforme, le rapport de leurs vitesses sera composé du rapport des espaces parcourus et du rapport inverse des temps.

Soient deux mobiles A et B, mus d'un mouvement uniforme ; les espaces qu'ils traversent ont le même rapport que V et T, mais les temps sont comme S est à R : je dis que le rapport de la vitesse du mobile A à la vitesse du mobile B est composé du rapport de l'espace V à l'espace T et du rapport du temps R au temps S.
Soit C la vitesse avec laquelle le mobile A parcourt l'espace V dans le temps S, et qu'entre cette vitesse C et une autre vitesse E, il existe même rapport qu'entre

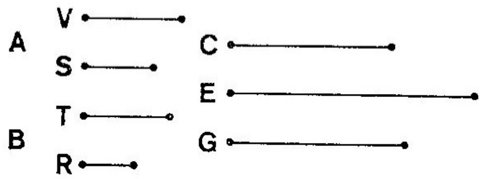


FIG. 6 – Théorème VI — Proposition VI

l'espace V et l'espace T ; E sera la vitesse avec laquelle le mobile B franchit l'espace T dans le même temps S. Si l'on établit en outre entre la vitesse E et une autre vitesse G le même rapport qu'entre le temps R et le temps S, G sera la vitesse avec laquelle le mobile B parcourt l'espace T dans le temps R. Nous avons donc la vitesse C avec laquelle le mobile A traverse l'espace V dans le temps S, la vitesse G avec laquelle le mobile B traverse l'espace T dans le temps R, et le rapport de C à G est composé des rapports de C à E et de E à G ; or, on a posé que le rapport de C à E est égal au rapport de l'espace V à l'espace T, et le rapport de E à G est identique au rapport de R à S : d'où résulte notre proposition.

SALV. Nous venons donc de voir ce qu'a écrit notre Auteur à propos du mouvement uniforme. Nous allons passer maintenant à des considérations plus subtiles et plus neuves touchant le mouvement naturellement accéléré, c'est-à-dire celui qu'accomplissent généralement les graves lorsqu'ils descendent, En voici le titre :

« DU MOUVEMENT NATURELLEMENT ACCÉLÉRÉ »

DU MOUVEMENT NATURELLEMENT ACCÉLÉRÉ

Les propriétés du mouvement uniforme ayant été examinées dans le livre précédent, il nous faut maintenant traiter du mouvement accéléré.
Et il convient en premier lieu de trouver et d'expliquer une définition qui se rapporte avec précision à ce mouvement, tel que la nature l'utilise. Rien en effet ne s'oppose à ce que l'on imagine un type arbitraire de mouvement dont on considérerait ensuite les traits caractéristiques (en fait c'est ainsi que certains auteurs, après avoir inventé les hélices et les conchoïdes[1] en combinant des mouvements auxquels la nature ne recourt pas, en ont démontré avec succès les propriétés ; cependant, puisque la nature se sert d'une forme déterminée d'accélération dans la chute des graves, c'est celle-ci que nous avons décidé de discuter, si toutefois notre définition du mouvement accéléré rejoint bien l'essence du mouvement naturellement accéléré. Nous croyons fermement, après de longs efforts, y être parvenu ; notre conviction s'appuie avant tout sur la correspondance et l'accord rigoureux qui semblent exister entre les propriétés que nous avons successivement démontrées, et les résultats de l'expérience. Enfin, dans cette étude du mouvement naturellement accéléré, nous avons été conduit comme par la main en observant la règle que suit habituellement la nature dans toutes ses autres opérations où elle a coutume d'agir en employant les moyens les plus ordinaires, les plus simples, les plus faciles. Car il n'est personne, je pense, pour admettre qu'il soit possible de nager ou de voler d'une manière plus simple ou plus facile que celle dont les poissons et les oiseaux se servent instinctivement. Quand donc j'observe qu'une pierre tombant d'une certaine hauteur à partir du repos acquiert successivement de nouvelles augmentations de vitesse, pourquoi ne croirais-je pas que ces additions ont lieu selon la proportion la plus simple et la plus évidente ? Or, tout bien considéré, nous ne trouverons aucune addition, aucune augmentation plus simple que celle qui toujours vient s'ajouter de la même façon. Ce que nous comprendrons aisément en considérant l'étroite affinité entre le temps et le mouvement : de même en effet que l'uniformité du mouvement se définit et se conçoit grâce à l'égalité des temps et des espaces (nous appelons un mouvement uniforme quand des espaces égaux sont franchis en des temps égaux), de même nous pouvons concevoir que dans un intervalle de temps semblablement divisé en parties égales des accroissements de vitesse aient lieu simplement ; ce qui sera le cas si par « uniformément », et, du même coup, « continuellement » accéléré nous nous représentons un mouvement où en des temps égaux quelconques se produisent des additions égales de vitesse. Ainsi, et quel que soit le nombre des parties égales de temps qui se sont écoulées depuis l'instant où le mobile, abandonnant le repos, a commencé de descendre, le degré de vitesse acquis au terme des deux premières parties du temps sera le double du degré acquis durant la première partie ; ainsi encore, après la troisième partie le degré atteint sera le triple, et, après la quatrième, le quadruple du degré gagné dans la première partie ; de sorte que pour plus de clarté, si le mobile devait continuer à se mouvoir avec le degré ou moment de vitesse acquis durant la

[1] : [*konkoïde*] Courbe qui rappelle la forme d'un coquillage

première partie du temps, et conserver ensuite cette même vitesse uniformément, son mouvement serait deux fois plus lent que s'il s'était effectué avec le degré de vitesse acquis en deux parties de temps. Nous ne nous écarterons donc pas de la droite raison, si nous admettons que l'intensification de la vitesse est proportionnelle à l'extension du temps ; aussi la définition du mouvement dont nous allons traiter peut-elle se formuler comme suit : je dis qu'est également ou uniformément accéléré ce mouvement qui, partant du repos, s'ajoute à lui-même en des temps égaux des moments égaux de vitesse.

Sagr. Bien que je n'aie rien, rationnellement parlant, contre cette définition-ci ou contre une autre, quel qu'en soit l'auteur, puisqu'elles sont toutes arbitraires, je puis cependant douter, soit dit sans vous offenser, qu'une telle définition, élaborée et acceptée dans l'abstrait, s'adapte et convienne au type de mouvement accéléré auquel obéissent les graves en tombant naturellement. Et comme l'Auteur semble nous affirmer que le mouvement ainsi défini est bien le mouvement naturel des graves, j'aimerais assez écarter de mon esprit certaines difficultés afin de pouvoir examiner ensuite avec plus d'attention les propositions et leurs démonstrations.

Savl. Il est bien que vous-même et le seigneur Simplicio souleviez des difficultés ; ce sont, j'imagine, celles-là mêmes qui me vinrent à l'esprit quand je vis ce traité pour la première fois, et dont je fus délivré soit en discutant avec l'Auteur lui-même, soit en réfléchissant de mon côté.

Sagr. Si j'imagine un corps grave tombant à partir du repos, c'est-à-dire de l'absence de toute vitesse, puis, alors qu'il se meut, augmentant sa vitesse proportionnellement au temps ; si j'imagine, par exemple, qu'en huit battements de pouls il acquiert huit degrés de vitesse, dont quatre après le quatrième battement, deux après le deuxième, et un après le premier, ne s'ensuit-il pas, puisque le temps est divisible à l'infini, qu'en diminuant toujours la vitesse dans le même rapport, il n'y aura pas de degré de vitesse si petit, ou encore de degré de lenteur si grand, par lequel ne soit passé le mobile après être parti de l'infinie lenteur, c'est-à-dire du repos ? De sorte que si le degré de vitesse qu'il possédait à la fin du quatrième battement pouvait, en demeurant uniforme, lui faire parcourir deux mille en une heure, et le degré qu'il possédait à la fin du deuxième battement un mille dans le même temps, il faut alors convenir que dans les instants les plus proches du point de départ il se mouvait si lentement qu'en continuant au même taux il n'aurait pas franchi un mille en une heure, ni en un jour ni en une année, ni même en un millier, et qu'il n'aurait pas davantage parcouru une seule palme[2] en un temps encore plus long ; conséquence qui, me semble-t-il, déconcerte l'imagination, quand l'expérience sensible nous montre des corps tombant immédiatement avec une grande vitesse.

[2] : Système de mesure alors en usage à Florence : la palme (*palma*) = 1/3 de coudée ; la coudée (*braccio*) = 0,573 m.

Savl. C'est bien là une des difficultés que j'éprouvai moi-même au début, mais que j'écartai peu après, et grâce à la même expérience qui fait présentement problème pour vous. L'expérience semble montrer, dites-vous, qu'à peine parti de l'état de repos un grave possède une vitesse considérable ; et je dis, moi, que la même expérience prouve clairement que l'*impeto* d'un corps qui tombe, fût-il très pesant, est au début insensible et très lent. Posez un grave sur une matière molle, et laissez-le exercer la seule pression qu'entraîne sa gravité ; il est évident que si on le soulève d'une coudée[3] ou deux et qu'on le laisse ensuite tomber, il exercera du fait du choc une pression nouvelle et supérieure à celle que produisait son seul poids ; la cause en résidera dans la conjugaison du poids du mobile et de la vitesse acquise durant la chute, et l'effet sera d'autant plus fort que la descente précédant le choc, et donc la vitesse du mobile, sera plus grande. Ainsi, en nous fondant sur la nature et l'intensité du choc, pourrons-nous déterminer sans erreur la vitesse d'un corps qui tombe. Mais dites-moi : ce maillet qui lâché sur un pieu d'une hauteur de quatre coudées l'enfonce, par exemple, de quatre doigts, l'enfoncera nettement moins s'il vient d'une hauteur d'une coudée seulement, et encore moins s'il vient d'une palme ; finalement, si on le lâche d'une hauteur d'un doigt, que fera-t-il de plus que si on l'avait déposé sans qu'il y ait percussion ? A coup sûr très peu de chose ; et l'effet serait imperceptible si on l'élevait seulement de l'épaisseur d'une feuille. Mais puisque l'effet de la percussion dépend de la vitesse du mobile, qui doutera que le mouvement soit très lent et la vitesse plus que minime, là où l'effet du choc est imperceptible ? Voyez donc la force de la vérité : la même expérience qui dans un premier moment paraissait nous montrer une chose, nous assure, une fois mieux considérée, de son contraire. Mais sans même s'astreindre à cette expérience (qui est sans doute parfaitement concluante) il ne me semble pas difficile d'établir le même fait par le seul raisonnement. Prenons une lourde pierre et maintenons-là en l'air, au repos ; débarrassée de son support et libérée, elle se dirige vers le bas, étant plus pesante que l'air, se mouvant non de façon uniforme, mais lentement d'abord, puis en accélérant continuellement. Or, étant donné que la vitesse peut augmenter et diminuer à l'infini, quelle raison me fera croire que ce mobile partant d'une infinie lenteur (comme l'est le repos), acquerra immédiatement dix degrés de vitesse plutôt que quatre, et quatre plutôt que deux, ou un, ou un demi, ou même un centième de degré, et ainsi de suite pour les degrés les plus petits ? Ecoutez-moi bien. Vous ne refuserez pas, je crois, de m'accorder qu'une pierre tombant de l'état de repos acquiert ses degrés successifs de vitesse selon l'ordre dans lequel ces mêmes degrés diminueraient et se perdraient, si une force motrice la reconduisait à la même hauteur ; et le refuseriez-vous, que je ne vois pas comment la pierre, dont la vitesse diminue et se consume en totalité au cours de son ascension, pourrait atteindre l'état de repos sans être passée par tous les degrés successifs de lenteur.

Simp. Mais si les degrés de lenteur croissante sont en nombre infini, ils ne seront jamais entièrement épuisés ; de sorte qu'un grave mû vers le haut n'atteindra jamais

[3] : voir note précédente

le repos, mais continuera à se mouvoir indéfiniment de plus en plus lentement, — chose que l'on ne voit jamais arriver.

SAVL. C'est ce qui arriverait, seigneur Simplicio, si le mobile s'attardait pendant un certain temps en chacun des degrés, alors qu'il se borne à y passer sans y rester plus d'un instant ; et comme en tout intervalle de temps fini, même très petit, il y a une infinité d'instants, ceux-ci suffisent à compenser les degrés en nombre infini de la vitesse qui diminue. Qu'un grave mû vers le haut ne demeure en aucun de ces degrés de vitesse pendant un temps fini, est évident pour la raison suivante : si un mobile se trouvait en effet posséder le même degré de vitesse dans le premier et le dernier instant d'un intervalle de temps fini, il pourrait avec ce même degré s'élever à nouveau d'une distance égale à celle qu'il vient de franchir dans le premier intervalle, et, passant ainsi d'un deuxième à un troisième, il continuerait son mouvement uniforme à l'infini.

SAGR. Il me semble qu'on pourrait tirer de ces remarques une solution fort appropriée à ce problème dont discutent les philosophes concernant la cause de l'accélération dans le mouvement naturel des graves. Je constate, en effet, que la force imprimée par l'agent dans un grave lancé vers le haut diminue continuellement ; tant qu'elle remporte sur la force contraire de la gravité, elle assure un mouvement d'élévation ; quand les deux forces se font équilibre, le corps cesse de monter et passe par un état de repos dans lequel l'*impetus* (*impeto*) n'est pas encore détruit, mais où seule a été consumée cette partie dont il excédait la gravité du mobile, et qui produisait le mouvement vers le haut. Puis tandis que continue la diminution de cet *impetus* étranger et que l'avantage passe du côté de la gravité, la chute commence, mais lente en raison de la force impresse[4] dont une bonne partie subsiste encore dans le mobile ; comme elle va cependant toujours en diminuant, la gravité l'emporte de plus en plus, et de là provient l'accélération continuelle du mouvement.

SIMP. L'idée est ingénieuse, mais plus subtile que solide ; car serait-elle concluante, qu'elle s'appliquerait uniquement à ces mouvements naturels que précède un mouvement violent, et où une partie de la force externe demeure vivace ; mais là où ce résidu est absent, c'est-à-dire quand le mobile part d'un repos antérieur, le raisonnement perd toute valeur.

SAGR. Je crois que vous vous trompez et que la distinction que vous introduisez entre ces deux cas est superflue, ou mieux, inexistante. Mais dites-moi : l'agent ne peut-il imprimer dans le mobile une force tantôt considérable et tantôt peu importante, de sorte que celui-ci sera projeté à un hauteur de cent coudées aussi bien qu'à une hauteur de vingt, quatre ou une ?

[4] : note de M. Clavelin : « force dont dépendait alors pour Galilée le mouvement d'un corps vers le haut »

Simp. Cela n'est pas douteux.

Sagr. Par conséquent cette force impresse pourra dépasser la force de la gravité d'assez peu pour ne pas élever le mobile de plus d'un doigt ; et finalement le pouvoir de l'agent peut être juste suffisant pour balancer la résistance de la gravité, de telle façon que le grave ne sera pas mû vers le haut, mais seulement soutenu. Or, quand vous tenez une pierre dans votre main, que faites-vous sinon lui communiquer une force motrice, dirigée vers le haut et rigoureusement équivalente à l'action de sa gravité qui la pousse vers le bas ? Et cette force ne la maintenez-vous pas imprimée dans la pierre tout le temps qui vous la soutenez avec votre main ? Peut-on dire qu'elle diminue pendant tout ce temps ? Est-il important que le support, par lequel est contrecarrée la descente de la pierre, soit dû à votre main plutôt qu'à une table ou à une corde à laquelle on l'attacherait ? Certainement pas. Il faut donc conclure, seigneur Simplicio, que l'existence, antérieurement à la chute de la pierre, d'un repos plus ou moins long, n'entraine aucune différence, et n'empêche pas le grave de commencer à se mouvoir en étant affecté d'une force contraire à sa gravité, et telle qu'elle suffisait précisément à le maintenir en repos.

Salv. L'occasion ne me semble pas favorable pour rechercher la cause de l'accélération du mouvement naturel, problème sur lequel différents philosophes ont formulé différentes opinions, certains l'expliquant par le rapprochement vis-à-vis du centre, d'autres par la réduction progressive des parties du milieu restant à traverser, d'autres encore par une extrusion du milieu ambiant dont les parties, en venant se réunir dans le dos du mobile, le presseraient et le repousseraient continuellement ; il nous faudrait examiner toutes ces imaginations, avec bien d'autres, et sans grand profit. Pour le moment le but de notre Auteur est seulement de nous faire comprendre qu'il a voulu découvrir et démontrer quelques propriétés d'un mouvement accéléré (quelle que soit la cause de son accélération), où la grandeur de la vitesse croit le plus simplement possible en proportion même du temps, et où (car cela revient au même) en des temps égaux ont lieu des additions égales de vitesse. Au cas où les propriétés établies par la suite s'appliqueraient aux graves animés d'un mouvement de chute naturellement accéléré, nous pourrons admettre que la définition proposée vaut aussi pour ce mouvement, et que l'accélération des graves croit proportionnellement au temps.

Sagr. Il me vient à l'esprit que peut-être la définition aurait été plus claire, et sans voir son sens altéré, si l'on avait dit : un mouvement uniformément accéléré est un mouvement où la vitesse croît en proportion de l'espace traversé ; de sorte, par exemple, que le degré de vitesse acquis par un mobile au terme d'une descente de quatre coudées serait le double de celui qu'il aurait acquis au terme de deux coudées, et celui-là le double du degré atteint après la première coudée. Car il n'est pas douteux, me semble-t-il, qu'un grave tombant d'une hauteur de six coudées possède une force de percussion double de celle qu'il avait après trois, triple de celle qu'il avait après deux, et sextuple de celle qu'il avait après une coudée.

Salv. Je me sens consolé d'avoir eu un compagnon d'erreur tel que vous, et je dois vous dire que votre raisonnement a tellement de vraisemblance et de probabilité que notre Auteur lui-même ne nia pas, quand je le lui demandai, avoir partagé la même erreur pendant un certain temps. Mais ce qui m'étonna le plus ensuite fut de voir démontrer, de façon très simple, non seulement la fausseté, mais l'impossibilité de deux propositions pourtant si vraisemblables que parmi les nombreuses personnes à qui je les ai proposées, je n'en ai jamais vu aucune les écarter.

Simp. Je suis à coup sûr de ceux qui les acceptent : qu'un grave en descendant acquiert de la force, tandis que sa vitesse croît proportionnellement à l'espace, et que son pouvoir de percussion soit deux fois plus élevé quand il vient d'une hauteur double, me paraissent des propositions que l'on peut accorder sans hésitation ni discussion.

Salv. Et cependant elles sont aussi fausses et impossibles que si le mouvement avait lieu instantanément ; en voici une démonstration très claire. Quand les vitesses ont la même proportion que les espaces traversés ou devant être traversés, ces espaces sont franchis en des temps égaux ; si donc les vitesses avec lesquelles le mobile a traversé la distance de quatre coudées avaient été le double des vitesses avec lesquelles il a traversé les deux premières coudées (comme le premier espace est le double du second), alors les temps de passage auraient été égaux. Mais pour un même mobile, franchir dans le même temps les quatre coudées et les deux coudées est chose impossible, à moins que le mouvement ne soit instantané ; or nous voyons qu'un grave, quand il tombe, accomplit son mouvement dans le temps, et traverse les deux coudées en moins de temps que quatre ; il est faux par conséquent que la vitesse croisse comme l'espace. La fausseté de l'autre proposition se dévoile avec la même clarté. Si c'est en effet le même grave qui assure la percussion, la différence de grandeur entre les chocs ne peut provenir que de la différence des vitesses ; quand donc le corps venant d'une hauteur deux fois plus élevée produirait une percussion deux fois plus grande, il faudrait que ce soit avec une vitesse double ; or une vitesse double franchit un espace double dans le même temps, et nous voyons que le temps de descente pour la plus grande hauteur est plus long.

Sagr. Vous nous révélez ces conclusions si cachées avec trop d'évidence et de limpidité ; cette extrême facilité les rend moins précieuses que dans leur état de confusion antérieur. Car je pense que les hommes apprécient peu les connaissances acquises si aisément, en comparaison de celles qu'accompagnent de longues et inextricables discussions.

Salv. Si ceux qui démontrent avec brièveté et clarté les erreurs contenues dans les propositions que le public tient habituellement pour vraies, ne rencontraient que dédain, à la place de remerciements, le dommage subi serait donc tout à fait supportable ; autrement désagréable et dangereuse, en revanche, est assez souvent l'attitude de ces hommes qui, persuadés dans leurs études d'être les égaux de quiconque, s'aperçoivent un jour qu'ils ont tenu pour vraies des conclusions dont un autre, par un bref et facile raisonnement, révèle et établit ensuite la fausseté. Je n'appellerai pas envie une telle attitude, qui d'ailleurs a coutume de se transformer en haine et en colère contre ceux qui mettent les erreurs à nu, mais je la définirai comme un violent désir de maintenir des erreurs invétérées plutôt que d'accepter les vérités nouvellement découvertes ; parfois même ce désir les amène à écrire contre ces vérités que malheureusement ils connaissent aussi par eux-mêmes, avec le seul but d'abaisser dans l'esprit de la foule ignorante la réputation des autres. J'ai entendu citer par notre Académicien bon nombre de ces conclusions fausses, reçues pour vraies, mais très faciles à réfuter, et j'en possède toute une liste.

SAGR. Vous ne devrez pas nous en priver, mais nous en faire part le moment venu, même si cela demande une réunion particulière. Mais reprenant le fil de notre recherche, il me semble que jusqu'ici nous avons établi la définition du mouvement uniformément accéléré formant l'objet des propositions à venir ; je la rappelle :

> *« Nous disons qu'est également ou uniformément accéléré ce mouvement qui, partant du repos, voit s'ajouter en des temps égaux des moments égaux* (aequalia momenta) *de vitesse. »*

SALV. Cette définition étant arrêtée, l'Auteur ne demande et n'accepte pour vrai qu'un seul principe, à savoir :

> *« Les degrés de vitesse qu'un même mobile acquiert sur des plans différemment inclinés sont égaux, pourvu que les hauteurs de ces plans soient égales. »*

Il appelle hauteur d'un plan incliné la perpendiculaire qui, menée du point le plus élevé de ce plan, tombe sur la ligne horizontale menée par le point le plus bas du même plan ; par exemple, si la ligne AB sur laquelle sont inclinés les deux plans CA, CD, est parallèle à l'horizon, il appelle hauteur des plans CA, CD, la perpendiculaire CB. Il suppose que les degrés de vitesse qu'un même mobile, descendant le long des plans inclinés CA, CD, acquiert aux points terminaux A et D, sont égaux, la hauteur CB des plans étant identique ; il faut voir que cette vitesse est aussi celle qu'atteindrait le grave en tombant de C en B.

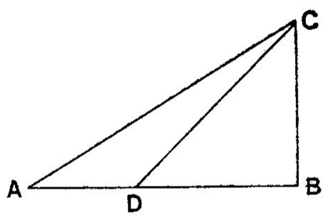


FIG. 7 – CB : hauteur d'un plan incliné, perpendiculaire à AB

Sagr. La probabilité de cette supposition me parait telle qu'elle peut être accordée sans discussion, étant toutefois bien entendu que l'on a écarté tous les obstacles accidentels et extérieurs, que les plans sont durs et lisses et le mobile de forme parfaitement sphérique, bref que les plans et le mobile ne présentent aucune aspérité. Tous les obstacles et tous les empêchements étant supprimés, la lumière naturelle me montre sans difficulté qu'une boule pesante et parfaitement ronde, descendant le long des lignes CA, CD, CB, atteindrait les points A, D, B, avec des *impeto* égaux.

Salv. Votre remarque a toutes les apparences du vrai ; mais je veux l'accroître au moyen d'une expérience jusqu'à en faire pratiquement l'équivalent d'une démonstration nécessaire. Imaginez que cette page représente un mur vertical, et qu'une boule de plomb d'une once[5] ou deux soit suspendue à un fil très fin AB, long de deux ou trois coudées ; tracez sur le mur une ligne horizontale DC coupant à angle droit

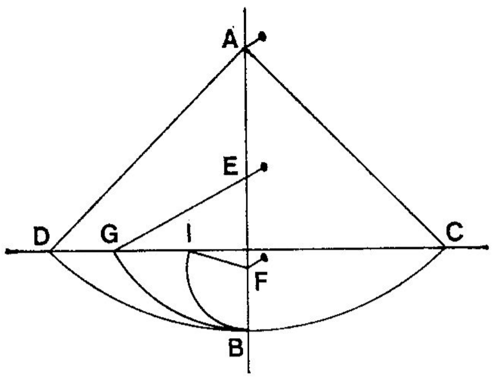


Fig. 8 – Boule de plomb le long d'un mur vertical

la perpendiculaire AB, qui passe environ à deux doigts du mur. Amenez ensuite le fil avec la boule en AC et lâchez-le ; vous verrez d'abord la boule descendre en décrivant l'arc CBD, et dépasser le point B de telle façon que, parcourant l'arc BD, elle remontera presque jusqu'à la ligne horizontale CD, ne la manquant que d'une courte distance par suite de la résistance de l'air et du fil. Nous pouvons donc en conclure à juste titre que l'*impeto* parcourant l'arc BD, elle remontera presque jusqu'à la ligne horizontale acquis par la boule au point B après sa descente le long de l'arc CB était suffisamment grand pour la conduire le long d'un arc semblable BD à la même hauteur. Après avoir fait plusieurs fois l'expérience, fixons sur le mur tout près de la perpendiculaire AB, par exemple en E ou en F, un clou de cinq ou six doigts, afin que le fil AC, lorsqu'il ramène comme précédemment la boule C le long de l'arc CB, heurte le clou en E, et que la boule C soit obligée de se mouvoir sur la circonférence BG, dont E est le centre ; nous verrons ainsi ce que peut faire ce même *impeto* qui, engendré au point B, reconduisait auparavant le mobile le long de l'arc BD à hauteur de la ligne d'horizon CD. Vous constaterez alors avec plaisir que la boule rejoint la ligne horizontale au point G ; et la

[5] : l'once (*oncia*) = 28,295 gr.

même chose se produirait si le clou était fixé plus bas, par exemple en F, la boule décrivant alors l'arc BI et terminant son ascension précisément sur la ligne CD. Si enfin le clou était planté si bas que la longueur restante du fil ne puisse atteindre la ligne CD (ce qui arriverait si le clou était plus près de B que de l'intersection de AB avec l'horizontale CD), alors le fil se rabattrait sur le clou et s'enroulerait autour de lui. Cette expérience lève tous les doutes sur la vérité de la supposition : les deux arcs CB et DB étant égaux et symétriques, le moment acquis pendant la descente le long de l'arc CB est égal au moment acquis pendant la descente le long de l'arc DB ; mais le moment acquis en B le long de l'arc CB est capable de hisser le même mobile le long de l'arc BD : donc le moment acquis durant la descente DB est égal à celui qui a fait monter le mobile le long du même arc de B en D. Et, d'une façon générale, tout moment acquis par la descente d'un arc est égal à celui qui peut faire remonter le même mobile le long du même arc. Or tous les moments qui provoquent un mouvement de remontée sur les arcs BD, BG, BI, sont égaux, puisqu'ils sont produits par un même moment acquis durant la descente CB, comme le montre l'expérience ; et ainsi tous les moments qui sont atteints en descendant le long des arcs DB, GB, IB, sont égaux.

Sagr. Le raisonnement me semble absolument concluant, et l'expérience si bien adaptée à la vérification du postulat que l'on peut raccorder comme s'il avait été démontré.

Salv. Je ne voudrais pas, seigneur Sagredo, que nous nous donnions plus de mal qu'il ne faut, d'autant que nous aurons avant tout à nous servir de ce principe pour des mouvements accomplis sur des surfaces rectilignes, et non sur des surfaces courbes où l'accélération se produit d'une manière fort différente. Aussi, bien que l'expérience en question nous fasse voir que la descente le long de l'arc CB confère au mobile un moment suffisant pour le reconduire à la même hauteur par l'un quelconque des arcs BD, BG, BI, nous ne pouvons pas établir, avec la même évidence, que la même chose aurait encore lieu si une boule parfaitement ronde descendait le long de plans rectilignes dont les inclinaisons seraient identiques à celles que possèdent les cordes des arcs considérés. On peut même penser, compte tenu des angles formés par ces plans au point B, qu'une boule descendue le long de la corde CB, et rencontrant cet obstacle au moment de remonter selon les cordes BD, BG, BI, perdrait dans le choc une partie de son *impeto*, et ne pourrait en s'élevant parvenir à hauteur de la ligne CD ; mais une fois enlevé cet obstacle qui nuit à l'expérience, l'entendement aperçoit clairement que l'*impeto* acquis (et dont la force croit avec la descente) pourrait ramener le mobile à la même hauteur. Admettons donc présentement ce principe comme un postulat ; son absolue vérité se manifestera lorsque nous verrons les conclusions qui en découlent correspondre et s'accorder exactement à l'expérience. Après avoir introduit cet unique principe, l'Auteur passe aux Propositions qu'il démontre toutes. La première s'énonce ainsi :

Théorème I — Proposition I

Le temps pendant lequel un espace donné est franchi par un mobile, partant du repos, avec un mouvement uniformément accéléré, est égal au temps pendant lequel le même espace serait franchi par le même mobile avec un mouvement uniforme, dont le degré de vitesse serait la moitié du plus grand et dernier degré de vitesse atteint au cours du précédent mouvement uniformément accéléré.

Représentons par la ligne AB le temps pendant lequel un mobile, partant du repos en C, franchira d'un mouvement uniformément accéléré l'espace CD ; on représentera le plus grand et dernier des degrés de la vitesse accrue dans les instants du temps AB par la ligne EB, formant avec AB un angle quelconque ; menons AE : toutes les lignes parallèles à BE, tirées des différents points de la ligne AB,

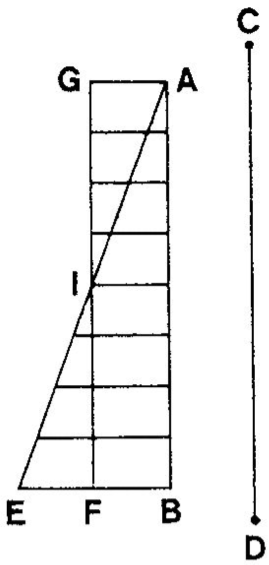


Fig. 9 – Espace CD franchi d'un mouvement uniformément accéléré

représenteront les degrés de vitesse croissants après l'instant initial A. Divisons BE en son milieu par le point F, et menons FG et AG respectivement parallèles à AB et FB ; on aura construit le parallélogramme $AGFB$ égal au triangle AEB, et dont le côté GF coupe AE en son milieu I ; si ensuite les parallèles du triangle AEB sont prolongées jusqu'à GI, nous aurons l'agrégat de toutes les parallèles contenues dans le quadrilatère égal à l'agrégat des parallèles comprises dans le triangle AEB : en effet celles qui se trouvent dans le triangle IEF correspondent à celles que contient le triangle GIA, et celles qui sont dans le trapèze $AIFB$ sont communes. Comme d'autre part à tous les instants, pris un à un, de l'intervalle de temps AB correspondent tous les points, pris un à un, de la ligne AB, et comme les parallèles menées à partir de ces points et comprises dans D le triangle

AEB représentent les degrés croissants de la vitesse grandissante, tandis que de leur côté les parallèles contenues dans le parallélogramme représentent autant de degrés de la vitesse non croissante, mais égale, il est clair qu'autant de moments de vitesse seront consumés dans le mouvement accéléré d'après les parallèles croissantes du triangle AEB, que dans le mouvement uniforme d'après les parallèles du parallélogramme GB : en effet, ceux des moments qui font défaut dans la première moitié du mouvement accéléré (c'est-à-dire ceux qui sont représentés par les parallèles du triangle AGI) sont compensés par les moments que représentent les parallèles du triangle IEF. Il est donc manifeste que des distances égales seront parcourues en un même temps par deux mobiles dont l'un, partant du repos, se meut d'un mouvement uniformément accéléré, et l'autre d'un mouvement uniforme que caractérise un moment de vitesse égal à la moitié du plus grand moment de vitesse atteint par le premier. C.Q.F.D.

Théorème II — Proposition II

Si un mobile, partant du repos, tombe avec un mouvement uniformément accéléré, les espaces parcourus en des temps quelconques par ce même mobile sont entre eux en raison double des temps, c'est-à-dire comme les carrés de ces mêmes temps.

Convenons de représenter par la ligne AB un flux de temps avec un premier instant A, et soient AD et DE deux intervalles quelconques pris dans ce temps ; soit la ligne HI le long de laquelle le mobile, partant du repos en H, descendra d'un mouvement uniformément accéléré ; soit encore HL l'espace franchi pendant le premier intervalle de temps AD, et HM l'espace franchi pendant l'intervalle AE. Je dis que le rapport de l'espace HM à l'espace HL est en raison double de celui que le temps AE a au temps AD, ou encore que les espaces HM et HL ont même rapport que les carrés de AE et AD. Traçons la ligne AC, faisant avec AB un angle quelconque. Des points D et E menons les parallèles DO et EP : DO représentera le plus grand degré de la vitesse acquise à l'instant D de l'intervalle de temps AD, et EP le plus grand degré de la vitesse acquise à l'instant E de l'intervalle de temps AE. Mais on a démontré plus haut (Théorème I), à propos des espaces parcourus, que sont égaux des espaces dont l'un est parcouru par un mobile se mouvant à partir du repos C avec un mouvement uniformément accéléré, alors que l'autre, durant le même intervelle de temps, est parcouru par un mobile mû d'un mouvement uniforme dont la vitesse est la moitié de la plus grande vitesse acquise dans le mouvement accéléré. Il en découle que les distances HM et HL sont identiques à celles qui seraient traversées dans les intervalles de temps AE et AD, par des mouvements uniformes dont les vitesses seraient comme la moitié de EP et DO respectivement. Si donc on parvient à montrer que les espaces HM et HL sont en raison double des temps EA et DA, la proposition sera établie. Or il a été démontré, dans la proposition IV du livre I, que les espaces franchis par des mobiles animés d'un mouvement uniforme sont entre eux dans un rapport

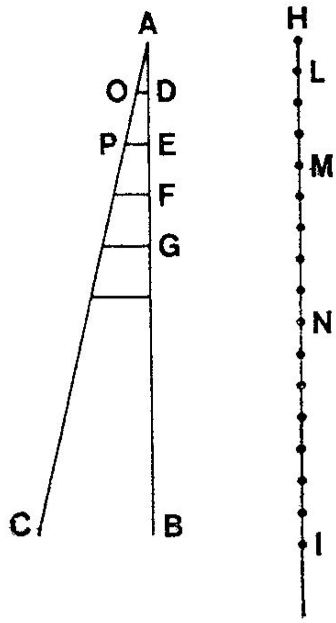


FIG. 10 – Flux de temps = AB en rapport aux distances parcourues = HI

composé du rapport des vitesses et du rapport des temps. Dans le cas présent le rapport des vitesses est le même que le rapport des temps (en effet, le rapport de la moitié de EP à la moitié de DO, ou de EP à DO, est le même que le rapport de AE à AD), et donc le rapport des espaces traversés est bien égal au carré du rapport des temps. C.Q.F.D.

> « Si V, est la vitesse du mouvement uniforme devant remplacer le mouvement uniformément accéléré selon HL, on a $V_1 = \frac{DO}{2}$; si V_2 est la vitesse du mouvement uniforme devant remplacer le mouvement uniformément accéléré selon HM, on a
> $V_2 = \frac{EP}{2}$; d'où $\frac{V_2}{V_1} = \frac{EP}{2} : \frac{DO}{2} = \frac{EP}{DO}$; mais $\frac{EP}{DO} = \frac{AE}{AD}$.
>
> D'après la proposition IV du livre I,
>
> $\frac{Espace HM}{Espace HL} = \frac{V_2}{V_1}$ x $\frac{T_2}{T_1}$(T_2 = temps AE, T_1 = temps AD).
>
> Donc $\frac{Espace HM}{Espace HL} = \frac{EP}{DO}$ x $\frac{AE}{AD} = \frac{AE}{AD}$ x $\frac{AE}{AD} = \frac{T_2^2}{T_1^2}$. c.q.f.d. »

Il s'ensuit en outre que le rapport des espaces est égal au carré du rapport des vitesses terminales, c'est-à.dire des lignes EP et DO, puisque EP est à DO comme AE est à AD.

Corollaire I

De là résulte clairement que si nous prenons successivement un nombre quelconque d'intervalles de temps égaux, à compter du premier instant du mouvement, tels que AD, DE, EF, FG, pendant lesquels sont parcourus les espaces HL, LM, MN, NI, ces espaces seront entre eux comme les nombres impairs à partir de l'unité, soit 1, 3, 5, 7 ; tel est en effet le rapport des différences entre les carrés de lignes se dépassant d'une même quantité égale à la plus petite d'entre elles, et tel est le rapport entre les carrés des nombres entiers à partir de l'unité[6]. Alors donc que les degrés de vitesse augmentent en des temps égaux comme la simple série des nombres, les accroissements que subissent les espaces franchis pendant les mêmes intervalles de temps sont comme la série des nombres impairs *ab unitate*.

SAGR. Je vous demanderai, s'il vous plaît, d'interrompre votre lecture, le temps d'examiner une idée qui me vient juste à l'esprit ; pour que l'explication en soit plus claire, à la fois pour vous et pour moi, je fais un dessin. Je représente par la ligne AI l'écoulement du temps à partir du premier instant A ; je mène par A, sous un angle quelconque, la droite AF, et après avoir joint les points l, F, et divisé le temps AI en son milieu C, je trace CB parallèle à IF. Considérant alors CB comme le degré maximum de la vitesse qui, commençant à zéro au moment initial A, augmente selon la croissance des parallèles à BC menées dans le triangle ABC (c'est-à-dire proportionnellement au temps), j'admets sans discussion, d'après ce qui a été dit, que l'espace franchi par un mobile dont la vitesse croît de cette façon, serait égal à l'espace qu'il franchirait si, pendant le même intervalle de temps AC, il se mouvait avec un degré de vitesse uniforme égal à EC moitié de BC. Si maintenant

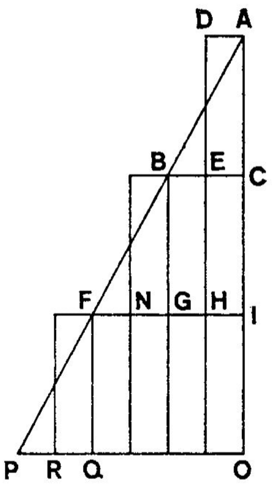


FIG. 11 – Espaces franchis pendant les mêmes intervalles de temps en rapport à la série de nombre impairs

[6] : soit n un entier quelconque à partir de l'unité, $(n+1)^2 - n^2 = 2n + 1$, terme général de la suite des nombres impairs

j'imagine que le mobile après être descendu avec un mouvement accéléré, possède à l'instant C le degré de vitesse BC, il est clair que s'il continuait à se mouvoir avec le même degré BC, sans plus accélérer, il parcourrait dans l'intervalle de temps suivant, CI, un espace double de celui qu'il a traversé dans le temps égal AC avec le degré de vitesse uniforme EC, moitié de BC ; mais comme le mobile descend avec une vitesse qui croît uniformément en des temps égaux, il viendra s'ajouter au degré CB, dans l'intervalle de temps consécutif CI, les moments d'une vitesse augmentant comme les parallèles du triangle BFG, égal au triangle ABC. Ajoutant donc au degré de vitesse GI la moitié du degré FG, c'est-à-dire du plus grand des degrés acquis au cours du mouvement accéléré (et représentés par les parallèles du triangle BFG), nous obtiendrons le degré de vitesse lN, caractérisant le mouvement uniforme équivalent pour l'intervalle de temps CI ; ce degré lN étant triple du degré EC, il s'ensuit que l'espace franchi durant le second intervalle de temps CI doit être triple de l'espace franchi pendant le premier intervalle AC. Si enfin nous prolongeons le temps AI d'une nouvelle partie égale IO, et agrandissons le triangle en APO, il est manifeste, si le mouvement se continuait durant tout le temps IO avec le degré de vitesse IF, acquis grâce au mouvement accéléré pendant le temps AI, il est manifeste, dis-je, comme IF est le quadruple de EC, que l'espace parcouru durant le temps IO serait le quadruple de l'espace parcouru pendant le premier intervalle égal AC. Mais le triangle FPQ traduit une augmentation de la vitesse engendrée par l'accélération uniforme de la même façon que dans le triangle ABC ; si nous réduisons alors cet accroissement à un degré de vitesse uniforme RQ, égal à EC [et l'ajoutons à lN], nous obtiendrons la totalité de la vitesse uniforme correspondant à un mouvement accéléré pendant le temps IO, et cette vitesse étant le quintuple de la vitesse uniforme correspondant au premier intervalle AC, l'espace traversé sera aussi le quintuple de l'espace traversé durant le premier temps AC. On aperçoit ainsi par ce simple calcul que les espaces franchis en des temps égaux par un mobile partant du repos, et dont la vitesse croît proportionnellement au temps, sont entre eux comme les nombres impairs comptés à partir de l'unité, l, 3, 5, etc. ; et si l'on compare directement les espaces, un espace parcouru dans un temps double représentera quatre fois l'espace parcouru pendant le temps simple, dans un temps triple neuf fois l'espace parcouru pendant le temps simple, et, en général, les espaces traversés sont en proportion double des temps, c'est-à-dire comme les carrés de ces temps.

SIMP. J'ai pris plus de plaisir à ce raisonnement facile et évident du seigneur Sagredo qu'à la démonstration, pour moi plus obscure, de l'Auteur ; et je suis bien convaincu que les choses doivent se passer ainsi, une fois énoncée et acceptée la définition du mouvement uniformément accéléré. Mais que l'accélération dont se sert la nature dans le mouvement de chute des graves soit bien telle, je persiste à en douter ; il serait donc opportun, me semble-t-il, pour m'éclairer et aussi tous ceux qui pensent comme moi, de rapporter maintenant l'une de ces nombreuses expériences qui, avez-vous dit, concordent de différentes manières avec les conclusions démontrées.

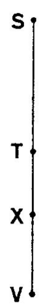
Salv. Votre demande, qui est d'un véritable homme de science, est tout à fait raisonnable ; car c'est ainsi qu'il convient de procéder dans les sciences appliquant à l'analyse de la nature les démonstrations mathématiques, telles la perspective, l'astronomie, la mécanique, la musique, et d'autres encore, qui toutes confirment par des expériences judicieuses leurs principes, fondements de tout l'édifice ultérieur. Je ne voudrais donc pas que cela semble du temps perdu si nous consacrons une longue discussion à ce premier et décisif fondement sur lequel s'appuie l'immense machine des conclusions, infiniment nombreuses, dont notre Auteur au reste n'a donné qu'un petit nombre dans ce livre où il aura tant contribué à ouvrir une voie jusqu'ici fermée aux esprits spéculatifs. S'agissant donc des expériences, il n'a nullement négligé de les faire ; et afin de rendre certain que l'accélération des graves descendant naturellement s'opère bien selon la proportion énoncée plus haut, je me suis retrouvé plus d'une fois, en sa compagnie, à en établir la preuve de la façon suivante.
Dans une règle, ou plus exactement un chevron de bois, long d'environ 12 coudées, large d'une demi-coudée et épais de 3 doigts, nous creusions un petit canal d'une largeur à peine supérieure à un doigt, et parfaitement rectiligne ; après l'avoir garni d'une feuille de parchemin bien lustrée pour le rendre aussi glissant que possible, nous y laissions rouler une boule de bronze très dure, parfaitement arrondie et polie. Plaçant alors l'appareil dans une position inclinée, en élevant l'une de ses extrémités d'une coudée ou deux au-dessus de l'horizon, nous laissions, comme je l'ai dit, descendre la boule dans le canal, en notant, selon une manière que j'exposerai plus loin, le temps nécessaire à une descente complète : l'expérience était recommencée plusieurs fois afin de déterminer exactement la durée du temps, mais sans que nous découvrîmes jamais de différence supérieure au dixième d'un battement de pouls. La mise en place et cette première mesure étant accomplies, nous faisions descendre la même boule sur le quart du canal seulement : le temps mesuré était toujours rigoureusement égal à la moitié du temps précédent. Nous faisions ensuite varier l'expérience, en comparant le temps requis pour parcourir la longueur entière du canal avec le temps requis pour parcourir sa moitié, ou les deux tiers, ou les trois quarts, ou toute autre fraction : dans ces expériences répétées une bonne centaine de fois, nous avons toujours trouvé que les espaces parcourus étaient entre eux comme les carrés des temps, et cela quelle que soit l'inclinaison du plan, c'est-à-dire du canal, dans lequel on faisait descendre la boule. Nous avons aussi observé que les temps de descente, pour les différentes inclinaisons du plan, avaient exactement entre eux la proportion que l'Auteur, comme nous le verrons plus loin, avait prédite et démontrée. Pour mesurer le temps, nous prenions un grand seau rempli d'eau que nous attachions assez haut ; par un orifice étroit pratiqué dans son fond s'échappait un mince filet d'eau que l'on recueillait dans un petit récipient, tout le temps que la boule descendait dans le canal. Les quantités d'eau ainsi recueillies étaient à chaque fois pesées à l'aide d'une balance très sensible, et les différences et proportions entre les poids nous donnaient les différences et proportions entre les temps ; la précision était telle que, comme je l'ai dit, aucune discordance significative n'apparut jamais entre ces opérations, maintes et maintes fois répétées.

Simp. J'aurais vraiment aimé assister à ces expériences ; mais comme je suis sûr du soin avec lequel vous les avez faites, et de la fidélité avec laquelle vous les rapportez, je me déclare satisfait et les tiens pour très certaines et vraies.

Salv. Nous pouvons donc reprendre notre lecture et poursuivre.

Corollaire II

Il s'ensuit, deuxièmement, que si l'on prend, à partir du début d'un mouvement, deux distances quelconques parcourues dans des intervalles de temps quelconques, ces temps auront entre eux même rapport que l'une des distances à la moyenne proportionnelle des deux distances.



Les espaces parcourus sont en raison double des temps

Si l'on prend, en effet, à partir du début S d'un mouvement, deux distances ST et SV, dont SX est la moyenne proportionnelle, le temps de descente le long de ST sera au temps de descente le long de SV comme ST est à SX, ou encore le temps de descente le long de SV sera au temps de descente le long de ST comme SV est à SX. En effet on a montré que les espaces parcourus sont en raison double des temps, ou (ce qui est la même chose) comme les carrés des temps ; d'autre part SV est avec ST dans le même rapport que le carré de SV au carré de SX ; il apparaît donc qu'entre les temps des mouvements le long de SV et de ST existe le même rapport qu'entre les distances, ou les lignes, SV et SX.

« Si $SX = \sqrt{ST \text{ x } SV}$, alors $\dfrac{T_{ST}}{T_{SV}} = \dfrac{ST}{SX}$, ou $\dfrac{T_{SV}}{T_{ST}} = \dfrac{SV}{SX}$;

en effet $\dfrac{T^2{}_{ST}}{T^2{}_{SV}} = \dfrac{ST}{SV}$ (Th. II), et $\dfrac{\overline{SV}^2}{\overline{SX}^2} = \dfrac{SV}{ST}$;

donc $\dfrac{T_{SV}}{T_{ST}} = \dfrac{SV}{SX}$. »

Scolie

Ce qui vient d'être démontré dans le cas de mouvements verticaux doit s'entendre également pour des mouvements sur des plans inclinés quelconques : on a admis, en effet, que sur de tels plans le degré d'accélération augmente toujours dans la même proportion, c'est-à-dire selon l'accroissement du temps, ou encore comme la simple suite des nombres entiers.

Salv. Ici je voudrais, seigneur Sagredo, qu'il me soit permis, et si cela n'ennuie pas trop le seigneur Simplicio, d'interrompre pour un moment notre lecture, afin d'expliquer, en m'appuyant sur ce qui a été démontré jusqu'ici et en ajoutant quelques conclusions mécaniques apprises auparavant auprès de notre Académicien, de quelle façon je pense pouvoir maintenant confirmer encore davantage la vérité du principe que nous avons déjà éprouvé plus haut par des raisonnements probables et par des expériences, — de quelle façon même (ce qui est plus important) je pense pouvoir le déduire géométriquement, après avoir démontré un seul lemme élémentaire se rapportant aux *impeti.*

Sagr. Devant le gain que vous nous promettez, il n'y a pas de temps que je ne consacrerais très volontiers à confirmer et à établir solidement ces sciences du mouvement ; pour ma part, non seulement je vous permets de développer votre explication, mais je vous demande, en plus, de satisfaire sur le champ la curiosité que vous avez à ce propos éveillée en moi ; je crois que le seigneur Simplicio sera du même sentiment.

Simp. Je ne saurais le nier.

Salv. Puis donc que vous m'y autorisez, considérez ce fait bien connu que les moments ou les vitesses d'un même mobile varient avec les différentes inclinaisons des plans : la vitesse la plus grande a lieu le long de la perpendiculaire à l'horizon, tandis que sur les plans inclinés elle diminue au fur et à mesure que ceux-ci s'écartent davantage de la verticale, c'est-à-dire deviennent plus obliques ; si bien que l'*impeto*, la puissance, l'énergie ou, voulons-nous dire, le moment de descente sont diminués dans le mobile par le plan sur lequel il prend appui et descend.
Pour plus de clarté prenons la ligne AB élevée perpendiculairement à l'horizon AC, puis donnons-lui différentes inclinaisons, comme en AD, AE, AF, etc. : je dis que l'*impeto* maximum et total du gravé pour descendre se trouve sur la perpendiculaire BA, qu'il est plus petit sur DA, encore plus petit sur EA, qu'il s'affaiblit progressivement quand on passe à la ligne FA, et qu'il est totalement évanoui sur le plan horizontal CA, où le mobile se trouve indifférent au mouvement et au repos, ne tendant par lui-même à se mouvoir dans aucune direction et n'opposant aucune résistance au mouvement ; car, de même qu'un grave ou un ensemble de graves ne peuvent se mouvoir naturellement vers le haut en s'éloignant du centre commun auquel tendent tous les corps graves, de même est-il impossible qu'un grave se meuve spontanément si, par son mouvement, son centre de gravité ne se rapproche pas du centre commun en question ; c'est pourquoi sur un plan horizontal par lequel on entend une surface également éloignée du même centre, et pour cette raison dépourvue de pente, l'*impeto* ou moment du mobile sera nul.
Cette variation de l' emphimpeto étant précisée, il me faut ici expliquer ce que notre Académicien, dans un ancien Traité de mécanique écrit autrefois à Padoue à l'intention seulement de ses élèves, avait démontré longuement et de façon concluante, en considérant l'origine et la nature de ce merveilleux instrument qu'est la vis.

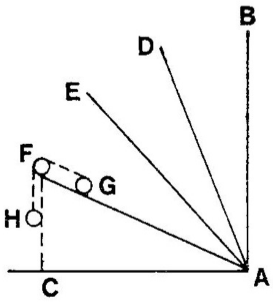


Fig. 12 – *Impeto* ou moment d'un grave en différentes inclinaisons d'un plan

Il s'agit de la façon dont varie l'*impeto* avec les différentes inclinaisons des plans ; prenant par exemple le plan AF et menant sa hauteur, soit la ligne FC, le long de laquelle l'*impeto* et le moment de descente d'un grave est à son maximum, on se propose d'établir le rapport : entre ce moment et le moment de descente du même mobile sur la ligne inclinée FA ; ce rapport, je dis qu'il est l'inverse du rapport des dites longueurs, et tel est le lemme précédant le théorème que j'espère ensuite pouvoir démontrer. Or il est manifeste que le moment de descente d'un grave est égal à la résistance ou plus petite force qui suffit pour l'empêcher de descendre et l'arrêter : pour mesurer une telle force et résistance je me servirai donc de la gravité d'un autre mobile. Imaginons alors que nous placions sur le plan FA un mobile G retenu par un fil passant sur F et auquel est attaché un poids H ; notons que la distance dont celui-ci s'élève ou descend verticalement est égale à toute la distance dont l'autre mobile G monte ou descend le long du plan incliné AF, mais non certes à la distance dont il monte ou descend verticalement, et dans la direction de laquelle seule, comme tous les autres mobiles, il exerce sa résistance. Cela est évident. Si nous considérons, en effet, que dans le triangle AFC le mouvement du mobile G, par exemple vers le haut de A en F, est composé de la distance horizontale AC et de la distance verticale CF, et s'il est vrai que la résistance du mobile au mouvement est nulle, comme on l'a dit, sur l'horizontale, (puisque, par ce mouvement, la distance vis-à-vis du centre commun des graves, qui demeure identique sur un plan horizontal, ne diminue ni ne s'accroît), il reste que la résistance est due seulement à la nécessité de franchir la distance verticale CF. Ainsi le grave G, en se mouvant de A en F, n'offre de résistance que dans la mesure où il parcourt la distance verticale CF, alors que l'autre grave H descend nécessairement d'une distance verticale égale à tout FA, et cette proportion entre la montée et la descente demeure toujours la même, si les corps sont liés l'un à l'autre, que le mouvement soit grand ou petit ; nous pouvons donc affirmer positivement que, s'il doit y avoir équilibre, c'est-à-dire repos des mobiles, leurs moments, leurs vitesses ou leurs propensions au mouvement, c'est-à-dire les espaces qu'ils passeraient dans un même temps, doivent être en raison inverse de leur gravité, conformément à ce que l'on démontre pour tous les mouvements mécaniques[7]. Si bien qu'il suffira, pour empêcher la descente de G, que la gravité de H soit inférieure à la sienne propre

[7]Entendons : pour tous les mouvements susceptibles d'être produits avec des machines simples.

dans la proportion même où la distance CF est plus petite que la distance FA. Mettons donc entre le grave G et le grave H le même rapport qu'entre FA et FC ; l'équilibre s'ensuivra, c'est-à-dire que les graves H et G auront des moments de descente égaux, et leur mouvement cessera. Et puisqu'on a convenu que l'*impeto*, l'énergie, le moment de descente ou la propension d'un mobile au mouvement, sont égaux à la force ou plus petite résistance qui suffit pour l'arrêter, et qu'on a conclu que le grave H suffit à empêcher le mouvement du grave G, le plus petit poids H, qui exerce en totalité le long de la perpendiculaire FC son moment de descente, donnera la mesure précise du moment de descente partiel que le plus grand poids G exerce sur le plan incliné FA ; mais le moment total du grave G est mesuré par lui-même (étant donné que pour empêcher la descente verticale d'un grave, il faut lui opposer un grave d'un poids égal et qui soit libre de se mouvoir verticalement) ; donc l'*impeto* ou moment de descente partiel de G sur le plan incliné FA sera à son moment total le long de la perpendiculaire FC comme le poids H est au poids G, c'est-à-dire, par construction, comme la perpendiculaire FC, hauteur du plan incliné, est à la longueur FA du même plan. Tel est le lemme que l'on se proposait de démontrer et qui, comme on le verra, est supposé connu par notre Auteur dans la deuxième partie de la sixième Proposition du présent traité.

Sagr. De ce que vous avez démontré jusqu'ici, on pourrait, me semble-t-il, conclure facilement, en raisonnant *ex aequali et cum proportione perturbata*, que les moments de descente d'un même mobile sur des plans diversement inclinés, comme FA et FI, et ayant même hauteur, sont en raison inverse des longueurs des mêmes plans.

Salv. La conclusion est parfaitement exacte. Ce point établi, nous allons prouver maintenant le théorème, à savoir que :

> « Les degrés de vitesse acquis par un mobile descendant d'un mouvement naturel sur des plans différemment inclinés, et de même hauteur, sont toujours égaux à l'arrivée sur le plan horizontal, et pourvu que les obstacles aient été écartés. »

On doit d'abord prendre garde que quelle que soit l'inclinaison du plan sur lequel le mobile, partant du repos, augmente sa vitesse ou la quantité de son *impeto* proportionnellement au temps (selon la définition du mouvement naturellement accéléré donné par l'Auteur), les espaces parcourus sont toujours comme les carrés des temps, et donc des degrés de vitesse, ainsi que la proposition précédente l'a montré ; tels auront été les *impeti* dans les débuts du mouvement, tels seront proportionnellement les degrés de vitesse acquis pendant le même temps, puisque les uns et les autres croissent en même temps avec la même proportion.
Soient maintenant le plan incliné AB, dont la verticale AC représente la hauteur et la ligne horizontale CB ; l'*impeto* [ou moment de descente] d'un mobile le long de la perpendiculaire AC étant, on vient de le montrer, à son *impeto* sur le plan

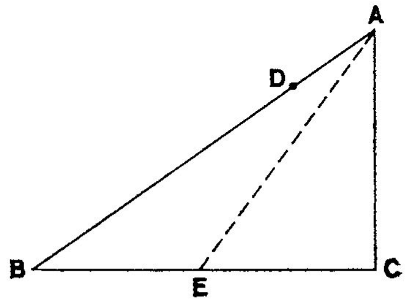


FIG. 13 – *Impeto* d'un mobile le long d'une verticale AC et proportionnellement sur un plan incliné AB

incliné AB, comme AB est à AC, prenons sur AB la longueur AD, troisième proportionnelle entre AB et AC ; il en résulte que l'*impeto* sur AC sera à l'*impeto* sur AB, c'est-à-dire sur AD, comme AC est à AD[8] ; pour cette raison le mobile, dans le même temps qu'il franchirait la distance verticale AC, franchira la distance AD sur le plan incliné AB (les moments étant comme les espaces), et le degré de vitesse atteint en C aura avec le degré de vitesse atteint en D le même rapport que AC avec AD. Mais le degré de vitesse en B est au degré de vitesse en D comme le temps le long de AB est au temps le long de AD (d'après la définition du mouvement accéléré), et le temps le long de AB est au temps le long de AD comme AC, moyenne proportionnelle entre BA et AD, est à AD, d'après le deuxième corollaire de la deuxième proposition ; donc les degrés de vitesse en B et en C ont avec le degré de vitesse en D le même rapport que AC avec AD ; ils sont par conséquent égaux, ce qui est le théorème proposé.
Par là nous pourrons prouver de façon plus concluante la troisième proposition où l'Auteur se prévaut du même principe, et selon laquelle le temps de descente le long d'un plan incliné a avec le temps le long de la perpendiculaire même rapport que la longueur du plan à celle de la perpendiculaire. En effet si BA représente le temps sur AB, le temps sur AD sera représenté par la moyenne proportionnelle entre AB et AD, c'est-à-dire AC. d'après le deuxième corollaire de la deuxième proposition ; mais si AC représente le temps sur AD, il sera aussi le temps sur AC, puisque AD et AC sont parcourus en des temps égaux ; et ainsi si BA représente le temps sur AB, AC sera le temps sur AC ; donc le même rapport existe entre AB et AC qu'entre le temps AB et le temps AC.
Par le même raisonnement on prouvera que le temps le long de AC est au temps le long d'un autre plan incliné tel que AE, comme AC est à AE ; par conséquent, il s'ensuit *ex aequali* que le temps le long du plan incliné AB est au temps le long du plan incliné AE comme AB est à AE, etc.
On pouvait encore, en suivant le même théorème, comme le verra bien le sei-

[8] : « On a donc $\overline{AC}^2 = AD \text{ x } AB$. Si M_1 est le moment de descente sur AC, et M_2 le moment sur AB, on a bien $\dfrac{M_1}{M_2} = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AB \text{ x } AC}{\overline{AC}^2} = \dfrac{AB \text{ x } AC}{AD \text{ x } AB} = \dfrac{AC}{AD}$. »

gneur Sagredo, démontrer immédiatement la sixième proposition de l'Auteur ; mais suffit pour cette digression qui vous a peut-être pesé, encore qu'elle soit réellement importante pour la science du mouvement.

« Si $SX = \sqrt{ST \text{ x } SV}$, alors $\dfrac{T_{ST}}{T_{SV}} = \dfrac{ST}{SX}$, ou $\dfrac{T_{SV}}{T_{ST}} = \dfrac{SV}{SX}$;

en effet $\dfrac{T^2{}_{ST}}{T^2{}_{SV}} = \dfrac{ST}{SV}$ (Th. II), et $\dfrac{\overline{SV}^2}{\overline{SX}^2} = \dfrac{SV}{ST}$;

donc $\dfrac{T_{SV}}{T_{ST}} = \dfrac{SV}{SX}$. »

Sagr. Elle m'a grandement plu, et elle était tout à fait nécessaire pour la parfaite intelligence du principe.

Salv. Je reprends donc la lecture du texte.

Théorème III — Proposition III

Si un même corps, partant du repos, se meut sur un plan incliné, puis le long d'une verticale, la hauteur étant la même dans les deux cas, les temps des mouvements seront entre eux comme les longueurs respectives du plan incliné et de la verticale.

Soient AC le plan incliné et AB la verticale, leur hauteur au-dessus de la ligne d'horizon CB étant la même, à savoir la ligne BA elle-même ; je dis que le temps de descente d'un mobile sur le plan incliné AC sera avec son temps de descente le long de la verticale AB dans le même rapport que la longueur du plan AC à la longueur AB de la verticale. Considérons en effet un nombre quelconque de lignes DG, EI, FL, parallèles à la ligne d'horizon BC ; de ce qui a été postulé, il

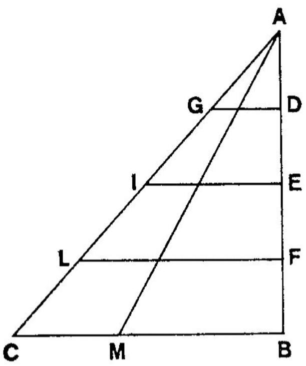


Fig. 14 – Temps de descente d'un mobile en rapport avec les longueurs

suit que les degrés de vitesse acquis par un mobile, partant de A, terme initial du mouvement, seront les mêmes aux points G et D, puisque leur hauteur sur l'horizon est la même ; de manière identique les degrés de vitesse aux points I et E seront égaux, ainsi qu'aux points F et L. Et si nous imaginons non seulement ces parallèles-là, mais toutes celles que nous pouvons mener à partir de tous les points de la ligne AB jusqu'à la ligne AC, les moments ou les degrés des vitesses aux extrémités de chacune de ces parallèles seront égaux entre eux. C'est pourquoi les deux distances AC et AB sont traversées avec les mêmes degrés de vitesse. Mais on a déjà démontré que si un mobile parcourt deux distances avec les mêmes degrés de vitesse (*Th. I du mouvement uniforme*), les temps auront entre eux le même rapport que les espaces eux-mêmes ; par conséquent le temps de descente selon AC est au temps de descente le long de AB comme la longueur du plan incliné AC est à la longueur de la verticale AB. C.Q.F.D.

SAGR. Il me semble que la même proposition pouvait être établie très clairement et avec brièveté, d'après la conclusion déjà prouvée que la somme [des degrés de vitesse] du mouvement accéléré le long de AC ou AB est la même que dans le cas d'un mouvement uniforme dont le degré de vitesse serait la moitié du plus grand degré CB ; comme les deux espaces AC, AB sont franchis avec le même mouvement uniforme, il est immédiatement évident, par la proposition I du livre I, que les temps de descente seront comme les espaces eux-mêmes.

Corollaire

De là on déduit que les temps de descente le long de plans diversement inclinés, à condition qu'ils aient même hauteur, sont entre eux comme les longueurs de ces plans. Si on imagine, en effet, un autre plan AM, joignant le point A à la ligne d'horizon CB, on démontrera, de la même façon, que le temps de descente le long de AM est au temps de descente le long de AB, comme la ligne AM est à la ligne AB ; mais comme le temps AB est au temps AC comme la ligne AB à la ligne AC, il en résulte, *ex aequali*, que le temps de descente le long de AM est au temps de descente le long de AC comme AM est à AC.

Théorème IV — Proposition IV

Les temps des mouvements sur des plans de même longueur, mais d'inclinaisons différentes, sont entre eux dans un rapport inverse des racines carrées de leurs hauteurs respectives.

Partant d'un point B, soient deux plans de même longueur, mais d'inclinaisons différentes, BA et BC ; traçons les lignes horizontales AE, CD, jusqu'à ce qu'elles rencontrent la perpendiculaire BD, et soient BE la hauteur du plan BA, BD la hauteur du plan BC ; soit encore BI, moyenne proportionnelle entre les hauteurs

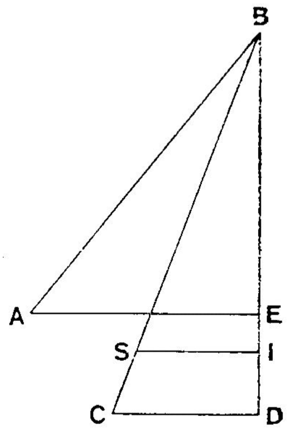


FIG. 15 – BA et BC, deux plans de même longueur mais d'inclinaisons différentes

DB et BE. Il est clair que le rapport de DB à BI est égal à la racine carrée du rapport de DB à BE. Je dis alors que le rapport des temps de descente, ou des mouvements, le long des plans BA et BC est égal au rapport inverse de DB à BI, de telle sorte que l'homologue du temps le long de BA est la hauteur de l'autre plan BC, c'est-à-dire BD, alors que l'homologue du temps le long de BC est BI. Il faut donc démontrer que le temps le long de BA est au temps le long de BC comme DB est à BI. Menons IS parallèle à DC. Comme on a déjà démontré que le temps de descente le long de BA est au temps de chute le long de la verticale BE comme BA est à BE ; qu'en outre le temps le long de BE est au temps le long de DB comme BE est à BI ; et qu'enfin le temps le long de DB est au temps le long de BC comme DB est à BC, ou BI à BS ; il s'ensuit *ex aequali* que le temps le long de BA est au temps le long de BC comme BA à BS, ou CB à BS ; mais CB est à BS comme DB est à BI ; d'où notre proposition.

Proposition : Il faut établir $\dfrac{T_{BA}}{T_{BC}} = \sqrt{\dfrac{BD}{BE}}$.

Démonstration : Soit $BI = \sqrt{BD \text{ x } BE}$. Comme $\dfrac{BD}{BI} = \sqrt{\dfrac{BD}{BE}}$ $\left(\text{en effet } \dfrac{BD}{BI} = \sqrt{\dfrac{\overline{BD}^2}{\overline{BI}^2}} = \sqrt{\dfrac{\overline{BD}^2}{BD \text{ x } BE}} = \sqrt{\dfrac{BD}{BE}}\right)$, il suffit de montrer que $\dfrac{T_{AB}}{T_{BC}} = \dfrac{BD}{BI}$.

Or $\dfrac{T_{BA}}{T_{BE}} = \dfrac{BA}{BE}$ (Th. III), $\dfrac{T_{BE}}{T_{BD}} = \dfrac{BE}{BI}$ (Th.II, Cor. II), et $\dfrac{T_{BD}}{T_{BC}} = \dfrac{BD}{BC} = \dfrac{BI}{BS}$.

D'où, *ex aequali*, $\dfrac{T_{BA}}{T_{BC}} = \dfrac{BA}{BS} = \dfrac{BC}{BS}$. Mais $\dfrac{BC}{BS} = \dfrac{BD}{BI}$, et comme $\dfrac{T_{BA}}{T_{BC}} = \dfrac{BC}{BS}$, on a $\dfrac{T_{BA}}{T_{BC}} = \dfrac{BD}{BI}$.

Théorème V — Proposition V

Les temps de descente sur des plans d'inclinaisons, de longueurs et aussi de hauteurs différentes, sont entre eux dans un rapport qui est égal au produit du rapport des longueurs par la racine carrée du rapport inverse des hauteurs.

Soient AB et AC, deux plans d'inclinaisons, longueurs et hauteurs différentes. Je dis que le temps de descente le long de AC est avec le temps de descente le long de AB dans un rapport qui est égal au produit du rapport de AC à AB, avec la racine carrée du rapport inverse des hauteurs. Élevons la perpendiculaire AD qui rencontre les lignes horizontales BG, CD, et soit AL, moyenne proportionnelle entre les hauteurs AD et AG ; une parallèle à l'horizon menée du point L coupe en F le plan AC : AF sera donc moyenne proportionnelle entre AC et AE. Comme

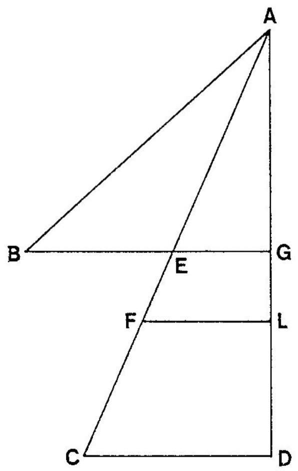


FIG. 16 – AB et AC, deux plans d'inclinaisons, longueurs et hauteurs différentes

le temps de descente le long de AC est au temps de descente le long de AE comme la ligne AF à la ligne AE ; que d'autre part le temps de descente le long de AE est au temps de descente le long de AB comme AE à AB ; il s'ensuit que le temps le long de AC est au temps le long de AB comme AF est à AB. Il reste à montrer que le rapport de AF à AB est le produit du rapport de AC à AB et du rapport de GA à AL, ce dernier étant le rapport inverse des racines carrées des hauteurs DA et GA. On le verra clairement si l'on posa AC entre AF et AB[9], car le rapport de AF à AC est égal au rapport de AL à AD, ou de AG à AL, lequel est égal à la racine carrée du rapport des hauteurs AG et AD ; enfin le rapport de AC à AB est le rapport même des longueurs des plans ; d'où résulte manifestement notre théorème.

[9] : C'est-à-dire de telle façon que $\dfrac{AF}{AC} = \dfrac{AC}{AB}$.

Proposition : Il faut établir $\dfrac{T_{AC}}{T_{AB}} = \dfrac{AC}{AB} \text{ x } \sqrt{\dfrac{AG}{AD}}$.

Démonstration : Soit $AL = \sqrt{AG \text{ x } AD}$, et $AF = \sqrt{AC \text{ x } AE}$ $\left(\text{ou } \dfrac{AF}{AE} = \dfrac{AC}{AF}\right)$. Comme $\dfrac{T_{AC}}{T_{AE}} = \dfrac{AC}{AF} = \dfrac{AF}{AE}$ (Th.II, Cor. II), et $\dfrac{T_{AE}}{T_{AB}} = \dfrac{AE}{AB}$;
il s'ensuit que $\dfrac{T_{AC}}{T_{AB}} = \dfrac{AF}{AB}$.

Montrons alors que $\dfrac{AF}{AB} = \dfrac{AC}{AB} \text{ x } \dfrac{AG}{AL}$ $\left(\text{où } \dfrac{AG}{AL} = \sqrt{\dfrac{AG}{AD}}\text{ ; en effet de } \overline{AL}^2 = AG \text{ x } AD, \text{ on tire } \dfrac{AD}{AG} = \dfrac{AD \text{ x } AG}{\overline{AG}^2} = \dfrac{\overline{AL}^2}{\overline{AG}^2}, \text{ et } \dfrac{AL}{AG} = \sqrt{\dfrac{AD}{AG}} \text{ ou } \dfrac{AG}{AL} = \sqrt{\dfrac{AG}{AD}}\right)$;
posons : $\dfrac{AF}{AB} = \dfrac{AF}{AC} \text{ x } \dfrac{AC}{AB}$; $\dfrac{AC}{AB}$ est le rapport des longueurs, et $\dfrac{AF}{AC} = \dfrac{AL}{AD} = \dfrac{AG}{AL} = \sqrt{\dfrac{AG}{AD}}$. C.Q.F.D.

Théorème VI — Proposition VI

Si du point le plus bas ou le plus élevé d'un cercle construit sur la ligne d'horizon, on mène des plans inclinés quelconques rencontrant la circonférence, les temps de descente le long de ces plans seront égaux entre eux.

Construisons un cercle sur la ligne d'horizon GH ; du point le plus bas, où il est tangent à la ligne d'horizon, élevons le diamètre FA, et du point le plus élevé A traçons des plans inclinés quelconques AB, AC, jusqu'à la circonférence. Je

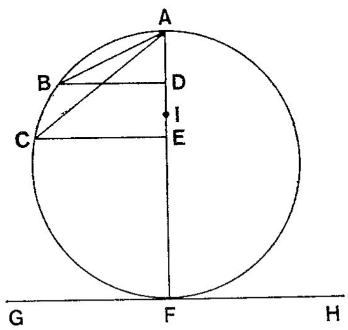


FIG. 17 – Cercle construits sur la ligne d'horizon GH

dis que les temps de descente le long de ces plans sont égaux. Menons BD et CE perpendiculaires au diamètre, et soit AI moyenne proportionnelle entre les hauteurs AE et AD des plans. Comme les rectangles FAE et FAD sont égaux aux carrés de AC et de AB, que d'autre part le rectangle FAE est au rectangle FAD comme EA à AD, il s'ensuit que le carré de CA est au carré de AB comme la ligne EA est à la ligne AD. Mais AE est à AD comme le carré de IA est au carré de AD : donc les carrés des lignes CA et AB sont entre eux comme les carrés des lignes IA et AD, et, par là-même, CA est à AB comme IA à AD. Mais on a démontré précédemment que les temps de descente le long de AC et de AB sont dans un rapport égal au produit des rapports de CA à AB et de DA à AI, lequel est égal au rapport de BA à AC. Par conséquent, le rapport des temps de descente le long de AC et de AB est égal au produit des rapports de CA avec AB et de BA avec CA ; le rapport entre les temps est bien un rapport d'égalité : d'où résulte notre proposition.

Proposition : Il faut prouver $T_{AC} = T_{AB}$.

Démonstration : Soit $\overline{AI}^2 = AD \text{ x } AE$.

Comme, d'une part $\dfrac{FA \text{ x } AE}{FA \text{ x } AD} = \dfrac{\overline{AC}^2}{\overline{AB}^2}$, et, d'autre part, $\dfrac{FA \text{ x } AE}{FA \text{ x } AD} = \dfrac{AE}{AD}$,

il vient $\dfrac{\overline{AC}^2}{\overline{AB}^2} = \dfrac{AE}{AD}$.

Mais $\dfrac{AE}{AD} = \dfrac{\overline{AI}^2}{\overline{AD}^2}$ (multipliant les deux termes par AD), et donc $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{AI}{AD}$.

Or (Th. V) $\dfrac{T_{AC}}{T_{AB}} = \dfrac{AC}{AB} \text{ x } \dfrac{AD}{AI}$; et comme $\dfrac{AD}{AI} = \dfrac{AB}{AC}$, on a bien $\dfrac{T_{AC}}{T_{AB}} = \dfrac{AC}{AB} \text{ x } \dfrac{AB}{AC} =$

$\dfrac{AC}{AC} = 1$.

On peut encore établir le même théorème à l'aide de considérations mécaniques ; et montrer, dans la figure suivante, que le mobile parcourra CA et DA en des temps égaux.
Prenons en effet BA égal à DA, et menons les perpendiculaires BE, DF ; des principes de la mécanique il découle que le moment d'un poids sur le plan incliné ABC est à son moment total (selon la verticale) comme BE est à BA, et que le moment du même poids sur le plan AD est à son moment total comme DF est à DA ou AB ; en conséquence le moment de ce même poids sur le plan incliné DA est à son moment sur le plan incliné ABC, comme la ligne DF est à la ligne BE. Les espaces que le même poids parcourra en des temps égaux sur les plans CA et DA seront donc entre eux comme les longueurs BE et DF, d'après la proposition II du Livre I. Mais on peut démontrer que AC est avec AD dans le même rapport

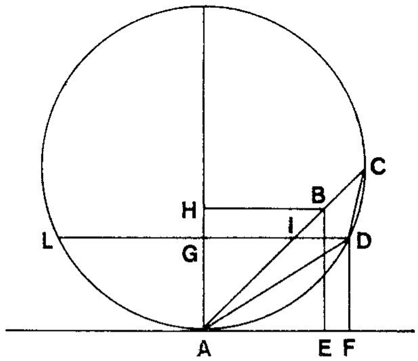


FIG. 18 – Démonstration à l'aide de considérations mécaniques

que BE avec DF ; par conséquent le mobile franchira dans des temps égaux les distances CA et DA.

Que AC soit avec AD dans le même rapport que BE avec DF, on le démontre comme suit : joignons CD, puis par les points D et B traçons les parallèles à AF, soit DGL qui coupe AC en I, et BH ; l'angle ADI sera égal à l'angle DCA, puisqu'ils sous-tendent les arcs égaux LA et AD ; l'angle DAC en outre est commun. Donc les côtés des triangles semblables CAD et DAI, adjacents aux angles égaux, seront proportionnels, et CA sera avec AD comme DA avec AI, c'est-à-dire comme BA avec AI, ou HA avec AG, ou enfin BE avec DF. C.Q.F.D.

On peut encore démontrer d'une autre manière et plus rapidement le même théorème. Sur la ligne d'horizon AB érigeons un cercle dont le diamètre CD est perpendiculaire à l'horizon ; du point le plus élevé D traçons un plan incliné quelconque DF jusqu'à la circonférence ; je dis que la descente d'un même mobile le long de DF et sa chute le long de DC s'effectueront en des temps égaux. Menons en effet FG, parallèle à la ligne d'horizon AB, perpendiculaire au diamètre DC, et joignons FC ; comme le temps de chute le long de DC est avec le temps de chute le long de DG dans le même rapport que la moyenne proportionnelle entre CD et DG est à DG même ; comme, d'autre part, DF est moyenne proportionnelle entre CD et

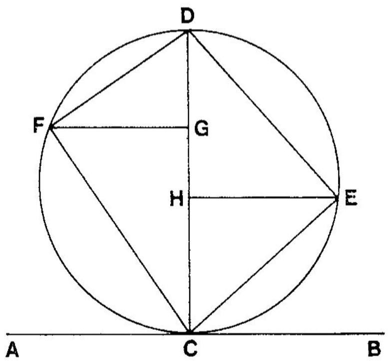


FIG. 19 – Chute de mobiles sur des plans inclinés inscrits dans un cercle

DG (l'angle DFC inscrit dans un demi-cercle étant droit, et FG perpendiculaire à DG), il s'ensuit que les temps de chute le long de DC et DG auront même rapport que la longueur DF à la longueur DG. Mais on a déjà démontré que les temps de descente le long de DF et DG ont même rapport que DF à DG ; par conséquent les temps de descente le long de DF et de DC, étant dans le même rapport avec les temps de descente le long de DG, seront égaux. On démontrera de même que si, après avoir tiré du point inférieur C la corde CE, on mène EH parallèle à l'horizon, puis ED, le temps de descente le long de EC sera égal au temps de chute le long du diamètre DC.

Proposition : $T_{DF} = T_{DC}$.

Démonstration : D'après le théorème II, corollaire II, $\dfrac{T_{DC}}{T_{DG}} = \sqrt{\dfrac{CD \text{ x } DG}{DG}}$;

mais $\overline{DF}^2 = CD \text{ x } DG$; et donc $\dfrac{T_{DC}}{T_{DG}} = \dfrac{DF}{GD}$.

Or on sait (Th. III) que $\dfrac{T_{DF}}{T_{DG}} = \dfrac{DF}{DG}$; par conséquent $\dfrac{T_{DF}}{T_{DC}} = \dfrac{DF}{DF} = 1$.

Corollaire I

De là résulte que les temps de descente le long de toutes les cordes menées des points C ou D, sont égaux entre eux.

Corollaire II

Il en résulte aussi que si d'un même point on mène une perpendiculaire et un plan incliné sur lesquels les temps de descente sont égaux, ils sont inscriptibles dans un demi-cercle dont la perpendiculaire sera le diamètre.

Corollaire III

Il en résulte enfin que les temps de mouvements sur des plans inclinés seront égaux quand les hauteurs de parties égales de ces mêmes plans seront entre elles comme les longueurs des plans ; on a établi en effet que les temps de descente le long de CA et DA, dans l'avant-dernière figure, sont égaux, pourvu que la hauteur de la partie AB (égale à AD), c'est-à-dire BE, ait avec la hauteur DF même rapport que CA avec DA.

Sagr. Suspendez, s'il vous plaît, votre lecture pour un bref moment, pendant que je tire au clair une idée qui me vient à l'esprit ; si elle n'est pas erronée, elle ressemble fort à un jeu gracieux, comme le sont tous ceux de la nature et de la nécessité.

Si d'un point fixe situé sur un plan horizontal on mène, dans le même plan, un nombre infini de lignes droites dans toutes les directions, et si sur chacune d'elles un point se meut d'un mouvement uniforme — tous partant au même instant du point fixe avec des vitesses identiques —, il est évident que tous ces points figureront la circonférence d'un cercle sans cesse grandissant dont le centre sera le premier point fixe ; de la même façon exactement que les vaguelettes d'une eau tranquille, sous l'effet du choc qui suit la chute d'une petite pierre, décrivent, autour du point d'impact, et dans toutes les directions, des cercles de plus en plus grands. Considérons maintenant un plan vertical ; d'un point marqué assez haut menons une infinité de lignes possédant des inclinaisons quelconques, et où nous imaginons que descendent des mobiles, tous animés d'un mouvement naturellement accéléré, et avec les vitesses convenant à l'inclinaison de leurs lignes ; si nous supposons que ces mobiles demeurent constamment visibles, sur quels types de lignes les verrons-nous situés à chaque instant ? Ici commence mon étonnement, car les démonstrations précédentes me persuadent qu'ils apparaîtront toujours sur la même circonférence de cercles, sans cesse grandissants, au fur et à mesure qu'ils s'éloigneront davantage, par leur descente, de leur point de départ. Pour plus de clarté, prenons un point élevé A d'où partent selon des inclinaisons quelconques les lignes AF, AH ; sur la perpendiculaire AB marquons deux points C et D autour desquels nous décrivons deux cercles passant par le point A et coupant les lignes inclinées aux points F, H, B, E, G, I. Il est manifeste, d'après les démonstrations antérieures, que si des mobiles partant au même instant du point A, descendent le long de ces lignes, l'un sera en E quand l'autre sera en G et un autre encore en I ; continuant toujours à descendre, ils se trouveront au même moment respectivement en F, H, B ; ainsi ces mobiles, et une infinité d'autres le long de l'infinité des lignes inclinées, seront toujours, d'instant en instant, sur les mêmes circonférences qui s'agrandiront indéfiniment. Les deux espèces de mouvement dont se sert la nature engendrent donc, avec une diversité admirablement accordée, des cercles infiniment nombreux ; l'un de ces mouvements a sa source, et comme son principe originaire, au centre d'un nombre infini de cercles concentriques ; l'autre prend naissance

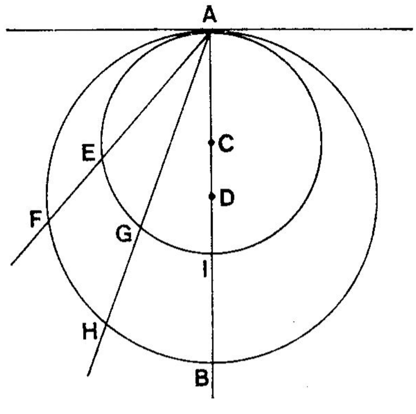


Fig. 20 – D'un point élevé A partent des lignes selon des inclinaisons différentes

dans le point par lequel une infinité de cercles tous excentriques se trouvent en contact. Les premiers de ces cercles sont produits par des mouvements égaux et uniformes, les seconds par des mouvements non uniformes et inégaux entre eux s'effectuant sur une infinité d'inclinaisons différentes. En outre, si des deux points pris comme origines, nous imaginons que sont tirées des lignes non seulement dans des plans horizontaux et verticaux, mais dans toutes les directions, alors de même que précédemment, en partant d'un seul point, on assistait à la production de cercles de plus en plus grands, de même, partant toujours d'un seul point, on obtiendra un nombre infini de sphères, ou plus exactement une sphère qui passera par une infinité de grandeurs successives ; et cela de deux manières, selon que l'origine des mouvements se trouvera au centre ou sur la surface de ces sphères.

Salv. L'idée est vraiment très belle et digne de la perspicacité du seigneur Sagredo.

Simp. J'ai au moins compris pour ma part comment, des deux types de mouvements naturels, dérivent les cercles et les sphères, encore que je n'entende pas très bien l'action du mouvement accéléré et sa démonstration ; cependant le fait que l'on puisse placer l'origine de ces mouvements soit au centre absolu, soit sur la surface sphérique la plus élevée me conduit à penser que quelque grand mystère est peut-être contenu dans ces vraies et admirables conclusions ; un mystère, veux-je dire, se rapportant à la création de l'Univers auquel on attribue une forme sphérique, et à la résidence de la cause première.

Salv. Je penserais volontiers la même chose. Mais des considérations aussi profondes relèvent de sciences plus hautes que les nôtres ; et il doit nous suffire d'être ces humbles ouvriers qui, dans les carrières, mettent à jour et extraient le marbre où d'habiles sculpteurs sauront ensuite faire apparaître les merveilleuses statues qui se trouvaient cachées sous une enveloppe rugueuse et informe. Maintenant, si vous le voulez bien, nous allons poursuivre.

Théorème VII — Proposition VII

Si les hauteurs de deux plans inclinés ont entre elles même rapport que les carrés de leurs longueurs, des mouvements à partir du repos s'effectueront sur ces plans en des temps égaux.

Soient deux plans AE et AB de longueurs et d'inclinaisons différentes, dont FA et DA sont les hauteurs ; FA est avec DA dans le même rapport que le carré de AE est avec le carré de AB ; je dis alors que les temps des mouvements sur les plans inclinés AE et AB, à partir du repos en A, sont égaux. Menons jusqu'à la ligne des hauteurs les parallèles horizontales EF et BD, celle-ci coupant AE en G. Puisque FA est avec AD comme le carré de EA est avec le carré de AB, que, d'autre part, FA est avec AD comme EA avec AG, EA sera avec AG dans D

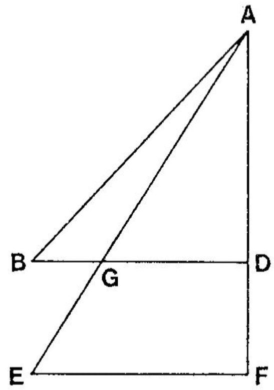


FIG. 21 – Soient deux plans de longueurs et d'inclinaisons différentes...

le même rapport que le carré de EA avec le carré de AB ; donc AB sera moyenne proportionnelle entre EA et AG. Mais le temps de descente le long de AB est au temps de descente le long de AG comme AB est à AG, et en outre, le temps de descente le long de AG est au temps de descente le long de AE comme AG est à la moyenne proportionnelle entre AG et AE, c'est-à-dire AB ; il s'ensuit, *ex aequali*, que le temps de descente le long de AB est au temps de descente le long de AE comme la ligne AB avec elle-même ; les deux temps sont donc égaux. C.Q.F.D.

Proposition : Si $\frac{\overline{AE}^2}{\overline{AB}^2} = \frac{AF}{AD}$, alors $T_{AE} = T_{AB}$.

Démonstration : Comme $\frac{FA}{DA} = \frac{EA}{AG}$, il s'ensuit, *ex hypothesi*, que $\frac{EA}{AG} = \frac{\overline{EA}^2}{\overline{AB}^2}$; donc $AB = \sqrt{EA \text{ x } AG}$.

Mais $\frac{T_{AB}}{T_{AG}} = \frac{AB}{AG}$ (Th. III, Cor. I), et d'après Th. II, Cor. II, $\frac{T_{AG}}{T_{AE}} = \frac{AG}{\sqrt{AG \text{ x } AE}} = \frac{AG}{AB}$; il s'ensuit, *ex aequali*, que $\frac{T_{AE}}{T_{AB}} = \frac{AB}{AG} \text{ x } \frac{AG}{AB} = \frac{AB}{AB} = 1$. C.Q.F.D.

Théorème VIII — Proposition VIII

Etant donné des plans inclinés que coupe un cercle élevé sur la ligne d'horizon, les temps de descente le long des plans qui se terminent soit au point inférieur soit au point supérieur du diamètre perpendiculaire sont égaux au temps de chute le long du diamètre lui-même ; pour les plans qui n'atteignent pas le diamètre, les temps de descente seront plus brefs ; pour ceux qui coupent le diamètre, ils seront plus grands.

Soit AB le diamètre d'un cercle érigé verticalement sur la ligne d'horizon. On a déjà démontré que sur les plans menés des points A et B jusqu'à la circonférence les temps de descente sont égaux. Pour démontrer que sur le plan DF, qui ne rejoint pas le diamètre, le temps de descente est plus bref, traçons le plan DB ; il est plus long et moins incliné que DF, et donc le temps de descente le long de DF sera plus bref que le long de DB, ou le long de AB. On constate de même que sur le plan CO qui coupe le diamètre le temps de descente est plus grand ; il est en effet plus long et moins incliné que CB. D'où notre proposition.

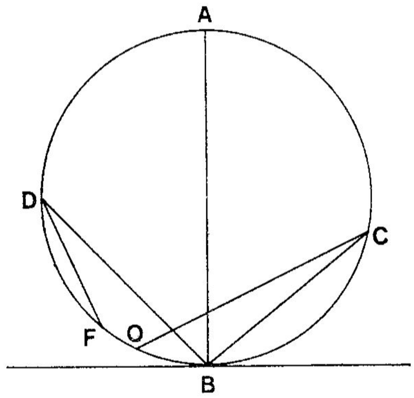


FIG. 22 – Soit AB le diamètre d'un cercle érigé verticalement sur la ligne d'horizon

[...]