

S3 Circuits Electriques

Polycopié

Eloutassi Omar
2025-2026

Sommaire

INTRODUCTION GÉNÉRALE	4
CHAPITRE 1 : LOIS DE BASE DES CIRCUITS EN RÉGIME QUASI STATIONNAIRE.....	5
1. INTRODUCTION.....	5
2. LOIS DE KIRCHHOFF EN RÉGIME QUASI STATIONNAIRE	5
2.1. Approximation des régimes quasi stationnaires (ARQS)	5
2.1.1. Vitesse de variation des signaux lente :	5
Exemple :	5
2.1.2. Vitesse de variation des signaux très rapide :	5
Exemple :	6
2.2. Lois de Kirchhoff	6
2.2.1. Loi des nœuds	6
Exemple	6
2.2.2. Loi des mailles	6
Exemple :	7
2.3. Dipôles en régime variable.....	7
2.3.1. Générateurs variables.....	7
2.3.2. Condensateurs	7
Remarque :	8
2.3.3. Bobines	8
Remarque :	8
3. SIGNAL SINUSOÏDAL EN NOTATION COMPLEXE.....	9
3.1. Importance du régime sinusoïdal	9
3. 2. DU RÉGIME TRANSITOIRE AU RÉGIME ÉTABLI	9
3. 3. Notation complexe des grandeurs électriques sinusoïdales	10
3.3.1. Signal analytique associé à un signal réel	10
3.3.2. Avantages de la notation complexe	10
Exemple :	10
3.3.3. Représentation de Fresnel.....	11
3. 4. Impédance d'un dipôle passif linéaire.....	12
3.4.1. Définition	12
Remarque:	12
3.4.2. Impédances des composants usuels	13
3.4.2.1. Résistor.....	13
Remarque :	13
3.4.2.2. Condensateur idéal	13
3.4.2.3. Bobine idéale	14
3.4.3. Caractéristique d'un condensateur ou d'une bobine idéale	14
3. 5. Association d'impédances	15

3.5.1. Association en série	15
Exemple :	15
3.5.2. Association en parallèle	16
Exemple :	16
3. 6. Générateurs en régime sinusoïdal établi	16
CHAPITRE 2 : MÉTHODE D'ANALYSE DES CIRCUITS ÉLECTRIQUES.....	18
1. INTRODUCTION.....	18
2. LOIS DE BASE EN RÉGIME SINUSOÏDAL	18
2. 1. Écriture des lois de Kirchhoff en régime sinusoïdal	18
2.1.1. Loi des nœuds	18
2.1.2. Loi des mailles	19
2.1.3. Application à la détermination d'impédances.....	19
Exemple	20
2. 2. Théorème de Millman	20
Exemple	21
2. 4. Théorème de superposition	21
2.4.1. Application en Régime Sinusoïdal	21
2.4.2. Concept Mathématique.....	22
2.4.3. Exemples	22
2. 5. Symétries d'un circuit	23
Remarque	23
2. 6. Diviseurs de tension et de courant.....	23
Exemple :	23
2. 7. Application à la mesure de l'impédance interne d'un GBF	24
3. THÉORÈME DE THÉVENIN ET DE NORTON.....	25
3.1. Théorème de Thévenin.....	25
3.1.1. Rappel.....	25
3.1.2. Générateur de courant réel.....	25
3.1.3. Modèle équivalent de Thévenin	25
3.1.4. Modèle équivalent de Norton	26
4. SIMPLIFICATION DE KENNELLY	27
CHAPITRE 3 : PUISSANCE EN RÉGIME SINUSOÏDAL.....	29
1. INTRODUCTION.....	29
2. PUISSANCE ACTIVE OU PUISSANCE MOYENNE	29
Exemple	30
3. PUISSANCE APPARENTE ET PUISSANCE RÉACTIVE	31
3.1. Puissance apparente.....	31
3.2. Exemple :	31
3.3. Puissance réactive	31

3.4. Exemple	32
4. PUISSANCE COMPLEXE	33
4.1. Remarque	33
4.2. Grandeurs efficaces complexes	33
4.3. Théorème de Boucherot	33
4.4. Exemple	34
5. DISTRIBUTION DE PUISSANCE ÉLECTRIQUE	35
5.1. Exemple	36
6. CIRCUITS PONT DE WHEATSTONE	37
6.1. Pont de Wheatstone	37
6.2. Analyse du circuit pont de Wheatstone	40
6.3. Exemple 1	40
6.4. APPLICATION : DETECTEUR DE LUMIÈRE DU PONT DE WHEATSTONE	41
6.5. Détection de lumière	42
CHAPITRE 4 : ANALYSE DES CIRCUITS RLC	44
1. INTRODUCTION	44
2. CIRCUIT RLC SÉRIE	44
2.1. Diagramme de Phase du circuit RLC série	45
2.2. Tensions instantanées pour un circuit RLC série	47
2.3. Impédance du circuit RLC série	47
3. CIRCUIT RLC PARALLÈLE	49
3.1. Courant et phase	49
3.1.1. Admittance Y :	52
3.1.2. Conductance G :	52
3.1.3. Susceptibilité B :	52
3.1.4. Facteur de puissance	53
3.2. Exemples de circuit RLC parallèle	53

Introduction Générale

Dans le cadre de la formation en physique fondamentale, option électronique et informatique industrielle, la compréhension du comportement des circuits électriques constitue un pilier fondamental pour le développement des compétences en instrumentation, automatisation et systèmes embarqués. Le cours d'analyse des circuits électronique en régime sinusoïdal s'inscrit dans cette perspective, en offrant aux étudiants les bases théoriques et pratiques nécessaires à l'analyse des circuits linéaires à courant alternatif.

Ce module vise principalement à introduire les concepts liés au régime quasi-stationnaire, où les signaux varient lentement au cours du temps, permettant une approximation stable des phénomènes électriques. Cette approche est essentielle pour comprendre la réponse des circuits réels alimentés par des sources continues ou alternatives, comme celles utilisées dans les équipements industriels et électroniques.

L'étude approfondie des méthodes d'analyse des circuits (lois de Kirchhoff, théorèmes de Thévenin et Norton, méthode des nœuds et des mailles) permet aux étudiants de modéliser et de résoudre des réseaux électriques complexes avec rigueur. Par la suite, le cours explore les notions de puissance en régime sinusoïdal, notamment la puissance active, réactive et apparente, ainsi que leur rôle dans l'optimisation énergétique des systèmes électriques.

Une attention particulière est portée à l'analyse des circuits RLC, éléments fondamentaux dans la conception de filtres, de résonateurs et de systèmes de transmission de signaux. Les notions de résonance, d'impédance complexe et de déphasage γ sont traitées de manière détaillée, avec des applications concrètes en électronique industrielle.

Ce module prépare ainsi les étudiants à aborder des systèmes plus complexes en électronique analogique et en traitement du signal, tout en consolidant leur maîtrise des bases physiques et mathématiques nécessaires au développement d'applications technologiques modernes.

Chapitre 1 : Lois de base des circuits en régime quasi stationnaire

1. Introduction

Ce chapitre est une généralisation sur les signaux stationnaires et les signaux lentement variables au cours du temps. En effet, les signaux lentement variables au cours du temps sont indispensables, car, ils contiennent la plupart des informations pertinentes. Notons que la composante stationnaire, définie par les alimentations, définit seulement le point de fonctionnement des composants.

2. Lois de Kirchhoff en régime quasi stationnaire

2. 1. Approximation des régimes quasi stationnaires (ARQS)

L'étude des circuits électroniques sont divisés en deux domaines distincts en fonction de la vitesse de variation des signaux :

2.1.1. Vitesse de variation des signaux lente :

Dans ce cas nous considérons que les dimensions des circuits, représentés par l'association de dipôles séparés par des fils de connexion, sont très faible devant la longueur d'onde λ du rayonnement électromagnétique associé à leur fréquence. Nous parlons dans ce cas de l'Approximation des Régimes Quasi Stationnaires (ARQS). Dans cette approximation la durée caractéristique de la variation d'une tension ou d'un courant des circuits est très grande devant la durée de propagation du signal d'un point à l'autre du circuit.

Exemple :

Pour une fréquence $f = 50\text{Hz}$ de la tension sinusoïdale d'alimentation du réseau de distribution électrique qui alimente un montage de dimension 1m, on trouve $\lambda = c/f \approx 6000\text{Km}$. Pour une fréquence $f = 50\text{KHz}$, typique d'un signal radioélectrique en modulation de fréquence, on trouve : $\lambda = c/f \approx 6\text{m}$, alors que la longueur des circuits des postes récepteurs n'excède pas quelques centimètres.

2.1.2. Vitesse de variation des signaux très rapide :

C'est le domaine des micro-ondes ou des hyperfréquences, l'analyse est totalement différente, car elle exige la connaissance exacte de la position de chacun des éléments du circuit, la longueur des conducteurs entre les éléments du circuit jouant un rôle décisif en raison de l'influence non négligeable de la propagation des ondes électromagnétiques d'un point à l'autre

du circuit. C'est ce que l'on observe dans les antennes qui se présentent comme des circuits ouverts parcourus par des courants.

Exemple :

Pour les signaux reçus par les récepteurs paraboliques, dont le diamètre est de quelques dizaines de centimètres, l'ARQS n'est plus valable, car les fréquences sont de l'ordre de plusieurs GHz: $\lambda = c/f \approx 3\text{cm}$.

2.2. Lois de Kirchhoff

Comme tous les effets dus à la propagation d'un signal sont négligés dans l'ARQS, il est possible de considérer que dans une branche ou dans un dipôle : l'intensité du courant est la même en tout point de cette branche et à tout instant. De même, la différence de potentiel et de tension aux bornes d'un dipôle est conservée.

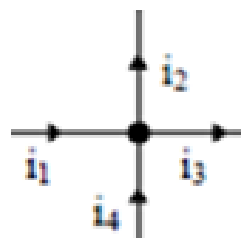
Pour les notations en régime variable nous utilisons les notations internationales : les lettres minuscules i ou $i(t)$ et u ou $u(t)$ désignent respectivement l'intensité du courant et de tension à l'instant t . Remarquons que les lois des nœuds et des mailles en régime stationnaire, se réforment directement en régime variable dans l'ARQS.

2.2.1. Loi des nœuds

La somme algébrique des courants concourants en un nœud est nulle :

$\sum_k \epsilon_k i_k = 0$ où $\epsilon_k = 1$ si le courant i_k est orienté vers le nœud $\epsilon_k = -1$ si le courant i_k est orienté vers le sens contraire du nœud.

Exemple



$$i_1 + i_4 = i_2 + i_3$$

2.2.2. Loi des mailles

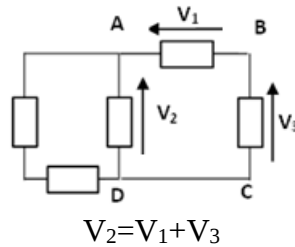
La somme algébrique des tensions aux bornes des branches d'une maille décrite dans un sens arbitraire est nulle:

$$\sum_k \epsilon_k u_k = 0$$

$\epsilon_k = 1$ si la tension u_k est dans sens que la maille

$\epsilon_k = -1$ si la tension u_k est dans le sens opposée de la maille.

Exemple :



2.3. Dipôles en régime variable

En régime variable, de nouveaux dipôles apparaissent : les circuits comportent toujours des résistors, des diodes, mais aussi des générateurs variables (de tension ou de courant), des bobines et des condensateurs.

2.3.1. Générateurs variables

En régime variable, les générateurs sont représentés comme en régime stationnaire, mais il faut préciser la nature du signal délivré, par exemple un signal sinusoïdal, un signal de forme carrée, ou un signal en forme de marche appelé échelon (Fig. 1.1).

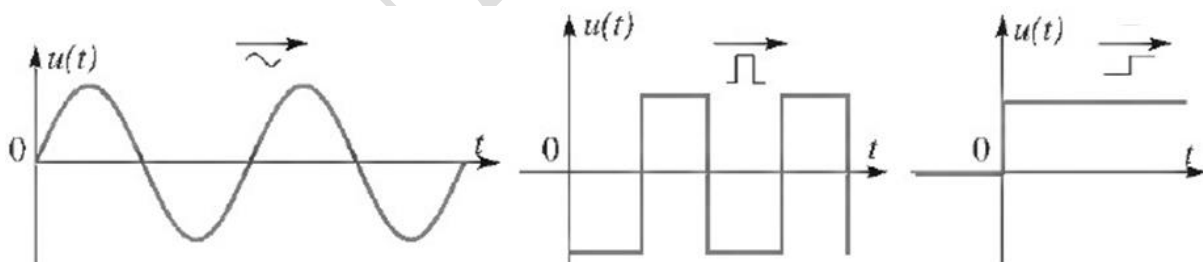


Figure 1.1

Les générateurs utilisés dans l'ARQS sont les GBF (Générateurs Basse Fréquence) dont la plupart sont capables de délivrer des signaux de formes variées et de fréquence et d'amplitude réglables par l'utilisateur.

2.3.2. Condensateurs

Un condensateur idéal est caractérisé par sa capacité C , qui est le coefficient de proportionnalité entre la charge q de l'une de ses armatures, par exemple A , et la tension à ses bornes : $q_A =$

$Cu_{AB} = Cu$. Notons sur la figure 1.2 les conventions adoptées : l'extrémité de la flèche de tension pointe l'armature A dont la charge est q . Dans ces conditions, nous écrivons l'intensité du courant orienté vers cette armature :

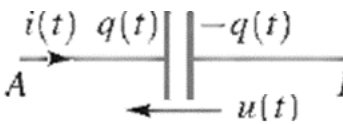
$$i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du}{dt}$$


Figure 1.2

Remarque :

- En régime stationnaire, un condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert, c'est-à-dire un coupe-circuit.
- La charge de l'armature du condensateur est une grandeur continue, tout comme la tension à ses bornes, ce qui se justifie par la continuité de l'énergie électromagnétique du condensateur.

2.3.3. Bobines

Une bobine idéale est caractérisée par son inductance L , qui est le coefficient de proportionnalité entre la tension à ses bornes et les variations temporelles du courant qui la traverse: $u = L \frac{di}{dt}$. La convention adoptée pour la tension et le courant est explicitée sur la figure 1.3.

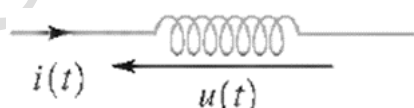


Figure 1.3

Une bobine réelle est généralement bien représentée, jusqu'à des fréquences de quelques kHz, par l'association d'une bobine idéale en série avec un résistor représentant la résistance du bobinage.

Remarque :

- En régime stationnaire, une bobine idéale est équivalente à un court-circuit et une bobine réelle est équivalente à sa résistance de bobinage.
- Tout comme la charge de l'armature d'un condensateur, l'intensité du courant dans une bobine est une grandeur continue.

3. SIGNAL SINUSOÏDAL EN NOTATION COMPLEXE

3. 1. Importance du régime sinusoïdal

Les signaux sinusoïdaux à basse fréquence ont une importance considérable dans la pratique, cela pour plusieurs raisons :

- Ils sont faciles à réaliser (alternateurs, générateurs basse fréquence, etc.), transportables sur de longues distances, sans grandes pertes, pourvu que l'amplitude de la tension soit suffisamment élevée, ce que l'on réalise aisément à l'aide de transformateurs; ainsi, le distributeur au Maroc fournit un courant sinusoïdal de fréquence 50 Hz, alors qu'en Grande Bretagne et aux USA, la fréquence du réseau de distribution électrique est 60 Hz;
- En outre, l'étude des circuits est particulièrement simple avec des signaux sinusoïdaux, puisque ces signaux conservent leur forme, lorsqu'on les dérive par rapport au temps ou lorsqu'on les intègre;
- Enfin, un signal électrique quelconque est équivalent à une somme de signaux sinusoïdaux. Par exemple, l'étude d'un circuit linéaire, siège d'un signal périodique carré, peut se ramener à celle de signaux sinusoïdaux dont les fréquences sont des multiples entiers d'une fréquence fondamentale. La réponse obtenue est la somme des réponses relatives à chaque signal sinusoïdal. Pour cette dernière raison, nous limitons notre analyse aux circuits constitués de résistors, de bobines, de condensateurs et de générateurs sinusoïdaux (de courant ou de tension).

3. 2. Du régime transitoire au régime établi

Étudions le circuit de la figure 1.4. : ce circuit associant en série, un générateur de signaux sinusoïdaux, un résistor et un condensateur, l'évolution de la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur.

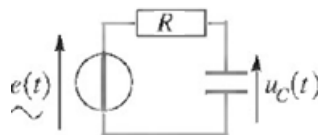


Figure 1.4.

La figure 1.5 représente l'enregistrement de la tension $u_C(t)$ obtenue sur un oscilloscope à mémoire ; ce dernier a permis d'enregistrer $u_C(t)$ à partir de l'instant pris comme origine $t = 0$ s où l'on ferme le circuit.

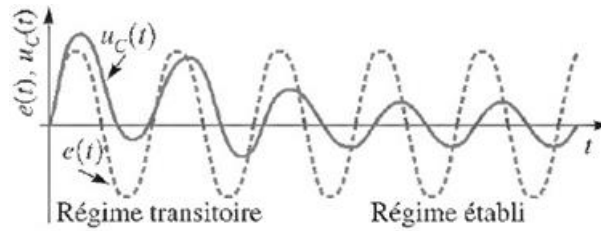


Figure 1.5.

On constate que le signal devient sinusoïdal, avec la même fréquence que l'excitation, après une durée relativement courte : la première phase durant laquelle le signal n'est pas sinusoïdal forme le régime transitoire; dans la seconde, le signal est sinusoïdal de fréquence identique à celle du générateur. On dit que le circuit a atteint le régime établi. En pratique, quel que soit le signal sinusoïdal fourni par le générateur, après la fermeture de l'interrupteur, les tensions et courants, en tout point d'un circuit linéaire, sont aussi sinusoïdaux, avec la fréquence du signal du générateur.

3. 3. Notation complexe des grandeurs électriques sinusoïdales

3.3.1. Signal analytique associé à un signal réel

Pour étudier les circuits en régime variable, nous pouvons nous limiter à l'étude des signaux sinusoïdaux. Pour ces signaux sinusoïdaux, il est très commode d'associer, à chaque variable sinusoïdale $s(t) = s_m \cos(\omega t + \varphi_x)$, la variable complexe $\hat{s}(t)$ appelée signal analytique correspondant ; $\hat{s}(t) = s_m e^{j(\omega t + \varphi_x)} = s_m e^{j\varphi_x} e^{j\omega t}$ avec $s(t) = \text{Re}(\hat{s}(t))$ et $s_m e^{j\varphi_x}$ est l'amplitude complexe du signal analytique.

3.3.2. Avantages de la notation complexe

Un premier avantage de la notation complexe est la simplification des équations à résoudre pour déterminer l'état d'un circuit en régime sinusoïdal. En notation complexe, une dérivation par rapport au temps se traduit par une simple multiplication de la grandeur complexe par $j\omega$. De même, une intégration se traduit par une simple multiplication par $1/(j\omega)$. Par conséquent Les équations différentielles linéaires se ramènent ainsi à des équations algébriques simples.

Exemple :

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + \frac{1}{\tau} \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = e_m \cos(\omega t)$$

qui devient

$$\frac{d^2 \hat{s}}{dt^2} + \frac{1}{\tau} \frac{d\hat{s}}{dt} + \omega_0^2 \hat{s} = \hat{e}_m e^{j\omega t}$$

Avec

$$\hat{s}(t) = s_m e^{j\varphi_x} e^{j\omega t} = \hat{s}_m e^{j\omega t}$$

En simplifiant par $e^{j\omega t}$ nous obtenons facilement :

$$\hat{s}_m = \frac{\hat{e}_m}{-\omega^2 + \frac{j\omega}{\tau} + \omega_0^2}$$

On en déduit facilement la solution $s(t)$ du régime établi en prenant la partie réelle de $s(t)$:

$$s(t) = \text{Re}(\hat{s}(t)) = \text{Re}(S_m e^{j\varphi_x} e^{j\omega t}) = s_m \cos(\omega t + \varphi)$$

Avec $s_m = |\hat{s}_m|$ et $\varphi = \arg(\hat{s}_m)$

Un second avantage de la notation complexe est qu'elle permet de comparer très facilement deux grandeurs dans un circuit. En effet, soit $x(t)$ et $y(t)$ deux grandeurs réelles, de même pulsation, que l'on souhaite comparer en amplitude et en phase. Le rapport des amplitudes réelles est tout simplement égal au rapport des modules et le déphasage φ est l'argument du rapport $\frac{\hat{y}}{\hat{x}}$:

$$\frac{Y_m}{X_m} = \left| \frac{\hat{y}}{\hat{x}} \right| \text{ et } \varphi = \varphi_y - \varphi_x$$

3.3.3. Représentation de Fresnel

La représentation de Fresnel d'un nombre complexe $z = a + jbz$, est la représentation géométrique de ce nombre dans un plan cartésien Oxy , Ox étant l'axe des réels et Oy l'axe des imaginaires. Le point A, qui représente le nombre complexe $z = a + jbz$, est tel que la $\|\vec{OA}\| = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ norme du vecteur $\vec{OA}$ est égale au module de z et l'angle $\varphi = \widehat{Ox OA}$ argument de $z = a + jb$. Si le nombre complexe décrit une tension sinusoïdale, d'amplitude U_m , de pulsation ω et de déphasage à l'origine φ , alors le vecteur de Fresnel, de longueur U_m : $u(t) = u_m \cos(\omega t + \varphi)$, tourne autour de l'origine O à la vitesse angulaire ω ; à $t = 0s$, ce vecteur fait l'angle φ avec l'axe Ox , voir figure 1.6

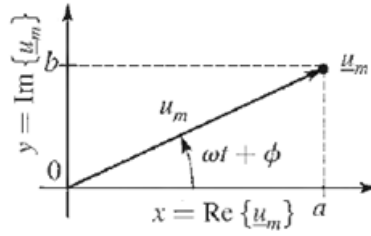


Figure 1.6

3. 4. Impédance d'un dipôle passif linéaire

Le concept d'impédance permet de comparer, en régime sinusoïdal, l'intensité du courant qui traverse un dipôle à la tension à ses bornes.

3.4.1. Définition

En régime sinusoïdal, l'impédance d'un dipôle linéaire passif est le rapport entre les nombres complexes représentant la tension à ses bornes et l'intensité du courant qui le traverse : $Z = \frac{\hat{u}}{\hat{i}}$.

Remarque:

- Conformément à l'usage international recommandé, l'impédance est un nombre complexe est écrite Z.
- L'impédance n'a de sens qu'en régime sinusoïdal; ainsi, l'impédance produite par un dipôle, lorsque la tension à ses bornes est un signal carré périodique, n'a pas de sens. Dans ce cas, on doit décomposer le signal en série de Fourier et définir une impédance pour chacune de ses composantes (stationnaire ou sinusoïdale).

En régime sinusoïdal établi, $u(t)$ et $i(t)$ ont même pulsation, mais des phases respectives généralement différentes φ_u et φ_i . Par conséquent : $Z = \frac{\hat{u}}{\hat{i}} = \frac{\hat{u}_m}{\hat{i}_m} = |Z|e^{j\varphi}$.

Notons que l'impédance d'un dipôle est indépendante du temps elle est cohérente avec une résistance; elle s'exprime donc en ohm Ω et φ , qui est le déphasage de la tension $u(t)$ par rapport au courant $i(t)$, s'exprime en radian dans le système international d'unités.

La partie réelle de l'impédance du dipôle est sa résistance R, la partie imaginaire est sa réactance X : $Z = R + jX$

L'admittance Y d'un dipôle, inverse de l'impédance :

$$Y = \frac{\hat{i}}{\hat{u}} = \frac{\hat{i}_m}{\hat{u}_m} = \frac{1}{|Z|} e^{-j\varphi} = |Y| e^{-j\varphi}$$

Le module de Y est l'inverse de celui de Z et sa phase est opposée à celle de Z. Sa partie réelle est la conductance G et sa partie imaginaire la susceptance B : $Z = G + jB$

3) Puisque $Y = 1/Z$, nous obtenons facilement les relations suivantes: $G = \frac{R}{R^2 + X^2}$ et $B = \frac{-X}{R^2 + X^2}$

4) La résistance R d'un dipôle passif est toujours positive, alors que la réactance est de signe quelconque. Ce résultat est relié à l'interprétation physique de X. De même, la conductance G est toujours positive, alors que la susceptance est de signe quelconque.

3.4.2. Impédances des composants usuels

En régime établi sinusoïdal de pulsation ω , on associe à la tension $u(t)$ aux bornes du dipôle et à l'intensité $i(t)$ du courant qui le traverse, respectivement : $\hat{u}(t) = u_m e^{j\varphi_u} e^{j\omega t}$ et $\hat{i}(t) = i_m e^{j\varphi_i} e^{j\omega t}$

3.4.2.1. Résistor

Pour un résistor, la relation entre $u(t)$ et $i(t)$ s'écrit simplement : $u = Ri$ soit $\hat{u}(t) = Z_R \hat{i}(t)$ avec $Z_R = R$ donc l'impédance complexe d'un résistor est réelle, car le courant et la tension sont en phase $\varphi = 0$; cette impédance est indépendante de la pulsation ω .

Remarque :

Comme l'oscilloscope ne permet de visualiser que des tensions, on étudie l'évolution d'un courant variable dans un circuit à partir de la tension aux bornes d'un résistor parcouru par ce courant ; la courbe obtenue est en phase et proportionnelle au courant.

3.4.2.2. Condensateur idéal

Pour un condensateur idéal, de capacité C, la relation entre $u(t)$ et $i(t)$ est: $i = C \frac{du}{dt}$

Il vient, en régime sinusoïdal et en notation complexe : $\hat{i}(t) = jC\omega \hat{u}(t)$ donc : $\hat{u}(t) = Z_C \hat{i}(t)$ avec $Z_C = \frac{1}{jC\omega}$

Ainsi, l'impédance complexe d'un condensateur idéal est un nombre imaginaire : le courant et la tension sont en quadrature, précisément $\varphi = -\frac{\pi}{2} \text{ rad}$; u est en retard de $\frac{\pi}{2} \text{ rad}$ sur i. Le module de l'impédance d'un condensateur idéal diminue quand la pulsation augmente. A très basse fréquence, il devient très élevé : le composant se comporte comme un coupe-circuit. A très haute fréquence, c'est l'inverse puisque le module de l'impédance est très faible : le composant est équivalent à un court-circuit.

3.4.2.3. Bobine idéale

Pour une bobine idéale d'inductance L , la relation entre $u(t)$ et $i(t)$ est : $u = C \frac{di}{dt}$ d'où $\hat{u}(t) = jC\omega \hat{i}(t)$ soit $\hat{u}(t) = Z_L \hat{i}(t)$ avec $Z_C = jC\omega$. L'impédance d'une bobine idéale est donc un nombre imaginaire ; le courant et la tension sont en quadrature, précisément $\varphi = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$; u est en avance de $\frac{\pi}{2} \text{ rad}$. Le module de l'impédance d'une bobine idéale augmente avec la pulsation ; à très basse fréquence, la bobine se comporte alors comme un court-circuit. En revanche, à très haute fréquence, c'est l'inverse : le composant devient un coupe-circuit. Sur la figure 1.7, sont dessinées les représentations de Fresnel des impédances des trois dipôles passifs principaux : résistor, condensateur idéal et bobine idéale.

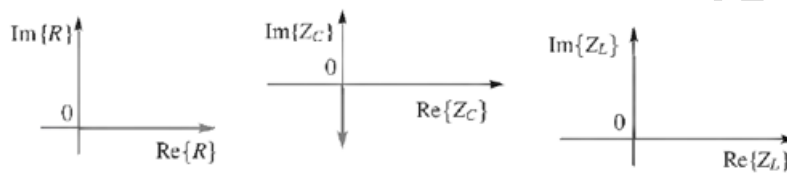


Figure 1.7

3.4.3. Caractéristique d'un condensateur ou d'une bobine idéale

En régime sinusoïdal, la caractéristique $i(u)$ d'un condensateur ou d'une bobine idéale ne présente que peu d'intérêt, puisque la courbe obtenue dépend de la fréquence d'étude. En effet, pour un condensateur

$$i(t) = i_m \cos(\omega t) \text{ et } u(t) = u_m \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\text{avec } u_m = |Z_L| i_m = \frac{i_m}{C\omega} \text{ et } \varphi = \arg(Z_c) = -\frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

On reconnaît l'équation paramétrée d'une ellipse dont le rapport des axes vaut $\frac{1}{C\omega}$. La figure 1.8 représente cette ellipse pour un condensateur de capacité $C = 1\mu F$ soumis à une tension sinusoïdale d'amplitude constante et de fréquences successives 50Hz, 200Hz et 500Hz. A la fréquence la plus basse, la caractéristique se rapproche de celle d'un coupe-circuit, qui est précisément celle obtenue en régime stationnaire.

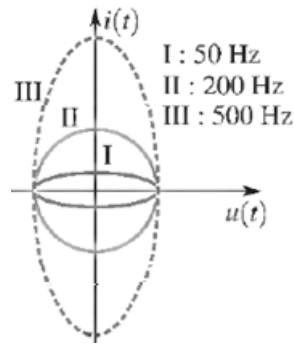


Figure 1.8

Il est possible d'observer de telles courbes en utilisant la fonction « test de composants » de certains oscilloscopes, lesquels fournissent une tension sinusoïdale de fréquence 50 Hz. Au cours d'une période, on constate que le condensateur se comporte tour à tour en générateur et en récepteur, puisque sa caractéristique explore les quatre quadrants. Le condensateur est néanmoins un dipôle passif, puisqu'il n'échange de l'énergie qu'avec le circuit ; aussi l'énergie qu'il fournit n'excède-t-elle jamais celle qu'il a reçue du circuit lors de la phase précédente où il s'est comporté en récepteur. Il en est de même pour les bobines idéales qui ne peuvent que stocker de l'énergie sous forme magnétique.

3. 5. Association d'impédances

Les lois d'association des impédances complexes sont identiques à celles relatives aux résistors en régime stationnaire.

3.5.1. Association en série

Comme les différents dipôles associés en série sont parcourus par le même courant et que la tension aux bornes du dipôle équivalent est la somme des tensions aux bornes des dipôles qui le composent, on trouve, en notation complexe :

$$\hat{i}_1 = \hat{i}_2 = \dots = \hat{i}_n \text{ et } \hat{u} = \hat{u}_1 + \hat{u}_2 + \dots + \hat{u}_n \text{ il en résulte que } Z = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n$$

Exemple :

Déterminons l'impédance complexe équivalente à l'association en série d'un résistor, de résistance R , d'une bobine idéale, d'inductance L , et d'un condensateur idéal, de capacité C . D'après ce qui précède, on trouve :

$$Z = R + j(L\omega - \frac{1}{C\omega}) \text{ d'où : } |Z| = \left(R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2 \right)^{1/2}$$

3.5.2. Association en parallèle

Comme les différents dipôles associés en parallèle sont soumis à la même tension et que l'intensité du courant qui traverse le dipôle équivalent est la somme des intensités dans chaque dipôle qui le compose, il vient, en notation complexe : $\hat{u}_1 = \hat{u}_2 = \dots = \hat{u}_n$ et $\hat{i} = \hat{i}_1 + \hat{i}_2 + \dots + \hat{i}_n$ il en résulte que $Y = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$

Exemple :

Calculons l'admittance complexe équivalente à l'association en parallèle d'un conducteur de résistance R, d'une bobine idéale d'inductance L et d'un condensateur idéal de capacité C.

D'après ce qui précède : $Y = \frac{1}{R} + j(C\omega - \frac{1}{L\omega})$ d'où : $|Y| = \left(\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)^2 \right)^{1/2}$

Ce circuit oppose donc une admittance minimale qui vaut $1/R$ à un courant de pulsation $\omega = \omega_0 = \left(\frac{1}{LC}\right)^{1/2}$. Comme cette admittance est nulle lorsque R est infini, le courant entrant dans le circuit dans ce cas est nul ; le circuit semble s'opposer à un tel courant, d'où son nom de circuit bouchon.

3. 6. Générateurs en régime sinusoïdal établi

En régime sinusoïdal établi, les générateurs délivrent un signal, tension ou courant, caractérisé par l'amplitude, la fréquence $f = \frac{\omega}{2\pi}$ et le déphasage éventuel φ par rapport à une référence. On écrira, respectivement pour un générateur de tension et un générateur de courant, qui fournissent respectivement la f.e.m $e(t)$ et de courant soient :

$$\hat{u}(t) = u_m e^{j\varphi_u} e^{j\omega t} = \hat{u}_m e^{j\omega t} \text{ et } \hat{i}(t) = i_m e^{j\varphi_i} e^{j\omega t} = \hat{i}_m e^{j\omega t}$$

Le plus souvent, le circuit ne comporte qu'un seul générateur, lequel sert alors de référence pour les déphasages ; nous supposons alors $\varphi_u = \varphi_i = 0$

Les générateurs réels présentent en outre une impédance interne Z_i qui prend en compte l'écart de leur comportement par rapport aux modèles de générateurs idéaux. Pour un générateur de tension, l'impédance interne Z_i , est en série avec la source de tension ; pour un générateur de courant, l'admittance interne $Y_i = 1/Z_i$ est en parallèle avec la source de courant (Fig. 1.9).

Les relations entre le courant $i(t)$ et la tension $u(t)$ sont donc les suivantes :

$\hat{u}(t) = Z_i \hat{i}(t) - \hat{e}_m$ et $\hat{i}(t) = Y_m \hat{i}(t) - \hat{i}_m$ pour un générateur de tension et de courant, respectivement

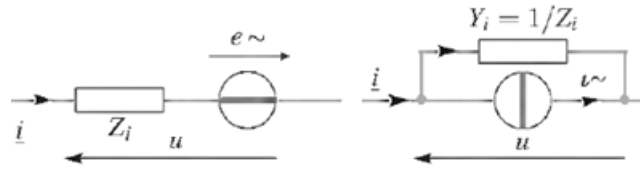


Figure 1.9

Tout comme en régime stationnaire, on passe d'une représentation à l'autre, en remplaçant la source de tension par une source de courant selon la correspondance $\hat{i}_m = \frac{\hat{e}_m}{Z_i} = \hat{e}_m Y_i$ et en associant l'admittance interne $Y_i = \frac{1}{Z_i}$ en parallèle.

Les GBF les plus couramment utilisés présentent une résistance interne de 50Ω et imposent que l'une de leurs bornes soit la masse du circuit, car elle est reliée par une connexion interne à la prise de terre. Il existe également des GBF, dits à masse flottante, pour lesquels aucune des bornes n'est reliée à la terre et qui n'imposent pas de masse au circuit.

Chapitre 2 : Méthode d'analyse des circuits électriques

1. Introduction

L'analyse des circuits électriques constitue une étape fondamentale dans la compréhension et la conception des systèmes électroniques. Une fois les lois de base établies (loi d'Ohm, lois de Kirchhoff), il devient nécessaire de disposer de méthodes rigoureuses et systématiques permettant de résoudre des circuits plus complexes comportant plusieurs sources et composants interconnectés.

Ce chapitre a pour objectif de présenter les principales techniques d'analyse permettant de déterminer les courants et tensions dans un réseau électrique linéaire. Il introduit notamment les méthodes des mailles et des nœuds, ainsi que des outils puissants comme les théorèmes de superposition, de Thévenin et de Norton, qui permettent de simplifier l'étude de certains circuits.

L'approche adoptée mettra l'accent sur la clarté du raisonnement, la rigueur des calculs, et le lien avec des applications concrètes, notamment dans le domaine de l'électronique analogique. En maîtrisant ces méthodes, l'étudiant sera capable d'analyser avec efficacité tout circuit électrique linéaire, qu'il soit en régime continu ou sinusoïdal.

2. Lois de base en régime sinusoïdal

2.1. Écriture des lois de Kirchhoff en régime sinusoïdal

Les lois de Kirchhoff restent valables dans l'ARQS. Réécrivons-les en régime établi sinusoïdal, à l'aide de la notation complexe, pour prendre avantage des règles simples du calcul algébrique sur les nombres complexes.

2.1.1. Loi des nœuds

Comme les tensions et les intensités des courants sont de même pulsation ω , tous les termes en $e^{j\omega t}$ se simplifient; aussi la loi des nœuds porte-t-elle uniquement sur les amplitudes complexes:

$$\sum_k \epsilon_k i_k = \operatorname{Re}(\sum_k \epsilon_k \hat{i}_k) = \operatorname{Re}(\sum_k \epsilon_k \hat{i}_{km} e^{j\omega t}) = \operatorname{Re}(e^{j\omega t} \sum_k \epsilon_k \hat{i}_{km}) = 0$$

$$\text{donc } \sum_k \epsilon_k \hat{i}_{km} = 0$$

$\epsilon_k = 1$ si le courant i_k est orienté vers le nœud $\epsilon_k = -1$ si le courant i_k est orienté vers le sens contraire du nœud.

2.1.2. Loi des mailles

La loi des mailles, elle aussi, s'écrit uniquement en fonction des amplitudes complexes :

La somme algébrique des tensions aux bornes des branches d'une maille décrite dans un sens arbitraire est nulle :

$$\sum_k \epsilon_k u_k = \operatorname{Re}(\sum_k \epsilon_k \hat{u}_k) = \operatorname{Re}(\sum_k \epsilon_k \hat{u}_{km} e^{j\omega t}) = \operatorname{Re}(e^{j\omega t} \sum_k \epsilon_k \hat{u}_{km}) = 0$$

$$\text{donc } \sum_k \epsilon_k \hat{u}_{km} = 0$$

$\epsilon_k = 1$ si la tension u_k est dans sens que la maille et $\epsilon_k = -1$ si la tension u_k est dans le sens opposée de la maille.

2.1.3. Application à la détermination d'impédances

En régime stationnaire, le pont de Wheatstone permet de déterminer la résistance d'un résistor inconnu. De façon analogue, un tel pont peut être utilisé en régime sinusoïdal établi pour déterminer l'impédance d'un dipôle linéaire inconnu. Le montage est alors appelé pont de Maxwell; on l'utilise pour déterminer les caractéristiques d'une bobine réelle que l'on modélise à basse fréquence en associant en série une bobine idéale d'inductance L_i et un résistor de résistance R_i . Les résistances R_2 et R_4 sont connues, R_3 et C_3 sont réglables. Lorsque le générateur délivre une tension $e(t) = e_m \cos(\omega t)$ entre les points P et Q, l'ampèremètre de résistance R_a indique l'intensité i du courant dans la branche AB (Fig. 2.1).

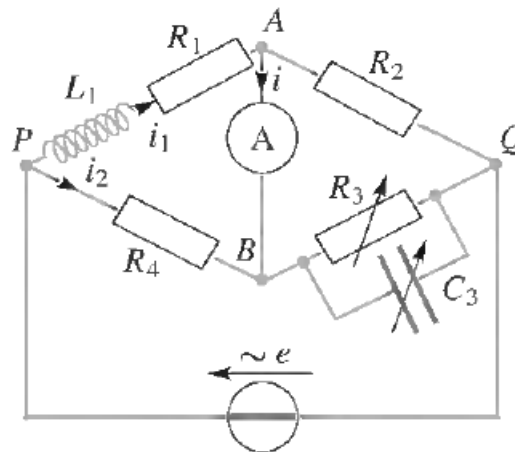


Figure 2.1

L'expression de l'intensité est obtenue en utilisant les lois de Kirchhoff en notation complexe.

La loi des mailles appliquée dans les trois mailles donne les trois équations suivantes :

$$Z_1 \hat{i}_1 + R_a \hat{i} + R_4 \hat{i}_4 = 0$$

$$-e + Z_2(\hat{i}_1 - \hat{i}) + Z_1\hat{i}_1 = 0$$

$$-e + Z_3(\hat{i}_1 + \hat{i}) + Z_4\hat{i}_2 = 0$$

Nous écrivons alors :

$$\hat{i}_1 = \frac{e+Z_2\hat{i}}{Z_1+Z_2} \text{ et } \hat{i}_2 = \frac{e-Z_3\hat{i}}{Z_3+Z_4}$$

D'où

$$\hat{i} = \frac{eZ_2Z_4}{R_a(Z_1+Z_2)(Z_3+Z_4)+Z_1Z_2(Z_3+Z_4)+Z_2Z_3(Z_1+Z_2)}$$

Le pont est équilibré si l'ampèremètre n'est traversé par aucun courant, ce qui implique une relation entre les quatre impédances analogues à celle qui a été établie en régime stationnaire ;

$$Z_1Z_3 = Z_2Z_4 \text{ soit } (R_1 + jL_1\omega) \times R_3 / (1 + jR_3C_3\omega) = R_2R_4 \text{ ce qui donne :}$$

$R_2R_4 + jR_3C_3\omega R_2R_4 = R_1R_3 + jL_1\omega R_3$ en identifiant partie réelle et partie imaginaire nous obtenons :

$$R_2R_4 = R_1R_3 \text{ et } L_1 = R_2R_4C_3$$

Exemple

Pour de déterminer les caractéristiques d'une bobine à air de 1000 spires, on réalise le montage en prenant $R_2 = R_4 = 1K\Omega$ et un générateur de tension stationnaire. L'équilibre est obtenu pour $R_3 = 72K\Omega$. Le générateur stationnaire est alors remplacé par un GBF et l'équilibre est de nouveau atteint pour $C_3 = 42nF$ $C_3 = 42 \text{ nF}$. On en déduit la résistance interne de la bobine, $R_1 = 13.9\Omega$ et $L_1 = 42mH$

2. 2. Théorème de Millman

Le théorème de Millman reste également valable en régime sinusoïdal dans l'ARQS, pourvu que l'on utilise les amplitudes complexes des tensions. Au nœud A d'un circuit, la tension a donc pour expression :

$$\hat{u}_{mA} = \frac{\sum_k (Y_k(\hat{u}_{mk} + \epsilon_k \hat{e}_{km}) + \epsilon'_k \hat{i}_{km})}{\sum_k Y_k}$$

la sommation portant sur toutes les branches qui aboutissent en A ; rappelons que l'on compte positivement les f.e.m orientées vers le nœud A $\epsilon_k = 1$ et les courants dirigés vers le nœud A $\epsilon'_k = 1$.

Exemple

Déterminons la tension $u(t)$ aux bornes du résistor dans le circuit de la figure 2.2 où les générateurs de tension et de courant fournissent des signaux de même fréquence f , déphasé de $\frac{\pi}{2} \text{ rad}$

$$\hat{e}(t) = u_m e^{j\omega t} \text{ et } \hat{i}(t) = i_m e^{j\omega t} e^{j\frac{\pi}{2}} = j i_m e^{j\omega t}$$

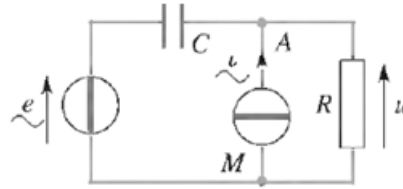


Figure 2.2

Si on choisit une valeur nulle pour la tension au point M où les deux générateurs sont connectés, la tension $u(t)$ recherchée est égale à celle du nœud A reliant le résistor et le condensateur. En appliquant le théorème de Millman en ce point, on obtient :

$$\hat{u} = \frac{j\hat{e}C\omega + \hat{i}}{jC\omega + 1/R} = \frac{\hat{e}_m C\omega + i_m}{C\omega - j/R} e^{j\omega t}$$

On obtient facilement $u(t) = u_m \cos(\omega t + \varphi)$:

$$u_m = |\hat{u}| = \frac{j\hat{e}C\omega + \hat{i}}{(C\omega)^2 + 1/R^2}^{1/2} \text{ et } \varphi = \arctan\left(\frac{1}{RC\omega}\right)$$

2. 4. Théorème de superposition

Le principe de superposition stipule que, dans un système linéaire, la réponse totale (ou sortie) à plusieurs excitations est égale à la somme des réponses individuelles à chaque excitation prise séparément.

2.4.1. Application en Régime Sinusoïdal

La théorie de la superposition s'applique aux circuits linéaires où les relations entre les tensions et les courants sont proportionnelles. Lorsqu'un circuit est soumis à plusieurs signaux sinusoïdaux, la réponse du circuit à la somme de ces signaux est égale à la somme des réponses à chaque signal pris individuellement. La théorie de la superposition est essentielle pour simplifier l'analyse des circuits en régime sinusoïdal et est largement utilisée dans l'ingénierie électrique et les systèmes de contrôle.

2.4.2. Concept Mathématique

Si un circuit reçoit plusieurs signaux d'entrée $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$, la sortie $y(t)$ peut être exprimée comme : $y(t) = y_1(t) + y_2(t) + \dots + y_n(t)$

Où $y_i(t)$ est la réponse du système à l'entrée $x_i(t)$.

2.4.3. Exemples

Dans un circuit RLC, si un signal sinusoïdal est appliqué, la réponse en tension ou en courant peut être calculée pour chaque fréquence de manière indépendante. Considérons un circuit RLC en parallèle avec les éléments suivants :

Résistance $R = 20 \Omega$

Inductance $L = 0.1H$

Capacité $C = 100\mu F$

Tension d'entrée $V(t) = V_0 \sin(\omega t)$ avec $V_0 = 10V$ et une fréquence $f = 50Hz$.

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \times 50 \approx 314.16 \text{ rad/s}$$

Calculer les Impédances de Chaque Composant :

$$Z_R = R = 20 \Omega$$

$$Z_L = j\omega L = j(314.16 \times 0.1) \approx j31.416 \Omega$$

$$Z_C = j\omega C = j(314.16 \times 100 \times 10^{-6}) \approx -j31.83 \Omega$$

Calculer le Courant de Chaque Composant : La tension appliquée $V(t) = 10 \sin(314.16t)$. En régime sinusoïdal, nous pouvons utiliser la forme complexe de la tension $V(t) = 10e^{j314.16t}$.

Courant à travers la Résistance : $I_R = V/Z_R = 0.5A$

Courant à travers l'Inductance: $I_L = V/Z_L = -j0.318A$

Courant à travers la Capacité: $I_C = V/Z_C = -j0.314A$

Le courant total dans le circuit est la somme des courants individuels : $I_{total} = I_R + I_L + I_C = 0.5A - j0.318A + j0.314A$

Pour obtenir la magnitude et la phase du courant total,

$$|I_{total}| = \sqrt{(0.5)^2 + (-0.004)^2} \approx 0.5000A$$

$$\text{et } \theta = \arctan(-0.004/0.5) \approx -0.004\text{rad} \approx -0.23^\circ$$

2. 5. Symétries d'un circuit

Les propriétés de symétrie et d'antisymétrie des tensions et des courants sont tels que :

- i) si le réseau (ou une portion du réseau) présente un plan de symétrie P, aucun courant ne traverse le plan P et les points symétriques par rapport à P sont à la même tension ;
- ii) si le réseau présente un plan d'antisymétrie Q, la répartition des courants est aussi antisymétrique et les points de Q sont au même potentiel.

Remarque

Il existe d'autres théorèmes importants relatifs aux circuits linéaires (théorèmes de superposition, de Thévenin et de Norton), que nous verrons plus tard.

2. 6. Diviseurs de tension et de courant

Les expressions établies en régime stationnaire pour les diviseurs de tension ou de courant se transposent aisément (Fig. 2.3) :

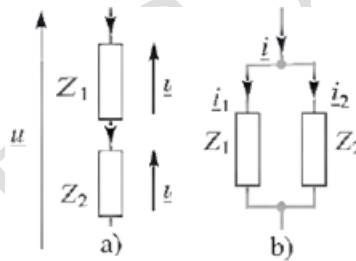


Figure 2.3

$$\hat{u}_1 = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} \hat{u} \text{ et } \hat{i}_1 = \frac{Y_1}{Y_1 + Y_2} \hat{i}$$

Exemple :

Un générateur de tension impose une tension sinusoïdale aux bornes d'un circuit RC série, avec $C = 2.2\mu F$ et $R = 500\Omega$ voir figure 2.4.

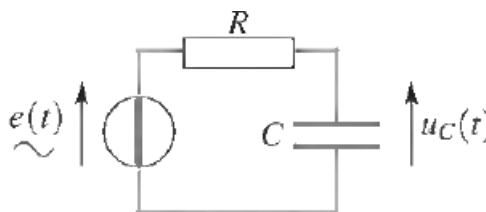


Figure 2.4

Calculons l'amplitude et le déphasage de la tension aux bornes du condensateur. En notation complexe, il vient, puisqu'il s'agit d'un diviseur de tension :

$$\hat{u}_{cm} = \frac{Z_C}{Z_C + R} \hat{e}_m = \frac{1/jC\omega}{1/jC\omega + R} \hat{e}_m = \frac{1}{1 + jRC\omega} \hat{e}_m = \frac{1}{1 + j\tau\omega} \hat{e}_m$$

L'amplitude de la tension $u_C(t)$ est alors égale à :

$$u_{cm} = \left| \frac{1}{1 + j\tau\omega} \hat{e}_m \right| = \frac{1}{(1 + (\tau\omega)^2)^{1/2}} e_m$$

Avec $\tau = RC = 500\Omega \times 2.2 \cdot 10^{-6}F = 1.1ms$

$$\begin{cases} u_{cm} \approx e_m \text{ pour } \tau\omega \text{ très faible} \\ u_{cm} \approx 0 \text{ pour } \tau\omega \text{ très grande} \end{cases}$$

$$u_C(t) = u_{cm} \cos(\omega t + \varphi)$$

Avec $\varphi = \arg(\hat{u}_{cm}) = \arg\left(\frac{1}{1 + jRC\omega} \hat{e}_m\right) = -\arctan(\tau\omega)$ qui varie entre 0 en régime stationnaire et $\frac{\pi}{2}$ à haute fréquence.

2. 7. Application à la mesure de l'impédance interne d'un GBF

Il est possible d'utiliser un diviseur de tension pour déterminer l'impédance interne d'un GBF. Il s'agit de la méthode dite de la tension moitié. Après avoir relevé la f.e.m e_m du GBF, on branche sur celui-ci une résistance variable que l'on ajuste jusqu'à ce que la tension u à ses bornes soit égale à $e_m/2$. Voir Fig. 2.5

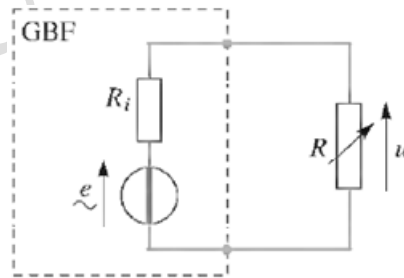


Figure 2.5

La résistance variable est alors égale à la résistance interne du GBF. En effet :

$$u = \frac{R}{R + R_i} e_m = \frac{e_m}{2} \text{ ce qui donne } R = R_i$$

Exemple concret : $e_m = 10V$ et $R = 50\Omega$, $R_i = 50\Omega$

3. Théorème de Thévenin et de Norton

3.1. Théorème de Thévenin

3.1.1. Rappel

Générateur de tension réel

Dans le circuit de la figure 4.1 la loi d'Ohm à la borne du générateur est $U = E - rI$ E étant la f.é.m et r la résistance interne du générateur.

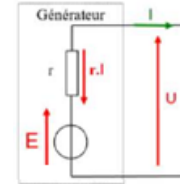


Figure 2.6

3.1.2. Générateur de courant réel

Sur la figure 2.7, la loi d'Ohm à la borne de la résistance R : $U = V_A - V_B = RI'$ le courant débité par le générateur est :

$$I = I_{CC} - I' = I_{CC} - \frac{U}{R}$$

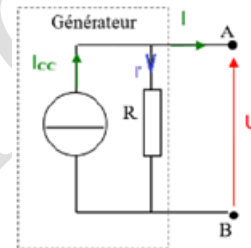


Figure 2.7.

3.1.3. Modèle équivalent de Thévenin

Soit le circuit de la figure 2.8 :

Si on place une charge de résistance R_{CH} entre les bornes A et B d'un dipôle comprenant un ou plusieurs générateurs E_1 et plusieurs résistances R_1 et R_2 , alors cette charge R_{CH} sera traversée par la même intensité de courant que si elle était montée entre les bornes d'un générateur de tension réel ayant pour force électromotrice E_{TH} et une résistance interne R_{CH} . Ce générateur est appelé : générateur de Thévenin ou Modèle Equivalent de Thévenin (M.E.T)

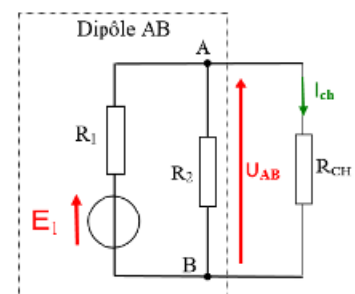


Figure 2.8.

➤ Comment déterminer E_{TH} et R_{CH} ?

○ Détermination de E_{TH}

On débranche la résistance R_{CH} , puis on calcule la tensions à vide: $U_{AB} = (V_A - V_B)_0$

$$\begin{cases} E_{TH} = (V_A - V_B)_0 \text{ si } (V_A - V_B)_0 > 0 \\ E_{TH} = -(V_A - V_B)_0 \text{ si } (V_A - V_B)_0 < 0 \end{cases}$$

Dans notre exemple de la figure 2.9 :

$$(V_A - V_B)_0 = R_2 I \text{ or formule de Pouillet}$$

$$\text{exige : } I = \frac{E_1}{R_1 + R_2} \text{ donc } (V_A - V_B)_0 =$$

$$\frac{R_2 E_1}{R_1 + R_2} > 0 \text{ par conséquent } E_{TH} = \frac{R_2 E_1}{R_1 + R_2}$$

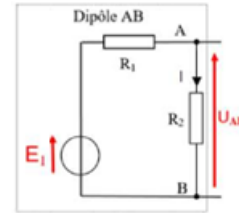


Figure 2.9.

○ Détermination de R_{TH}

On éteint toutes les sources (tous les générateurs), puis on détermine la résistance vu de la branche AB. Dans notre cas R_1 et R_2 sont en parallèle. Voir figure 2.10.

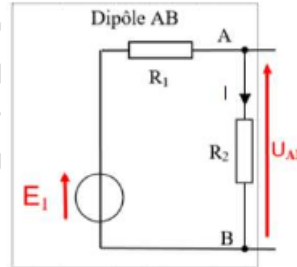


Figure 2.10.

$$\text{Donc } R_{TH} = R_1 // R_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Le modèle équivalent est donné sur la figure 2.11 :

que nous plaçons dans notre exemple, ce qui donne la figure 2.12.

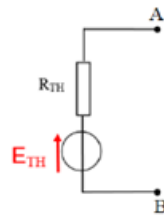


Figure 2.11

3.1.4. Modèle équivalent de Norton

Un générateur peut également être modélisé par un générateur de courant d'intensité I_N et en parallèle avec une résistance R_N . Le modèle est appelé modèle équivalent de Norton (M.E.N) ou générateur de Norton. Voir figure 2.12.

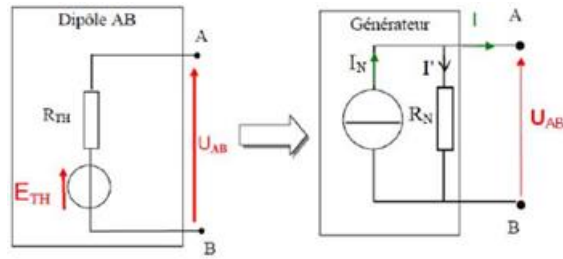


Figure 2.12

➤ Détermination de I_N

Voir figure 2.13

$$I_N = \frac{E_{TH}}{R_{TH}}$$

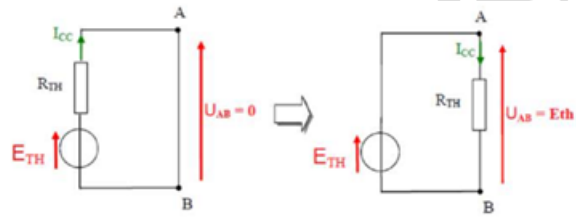


Figure 2.13

➤ Détermination de R_N

Voir figure 2.14

$$R_N = R_{TH}$$

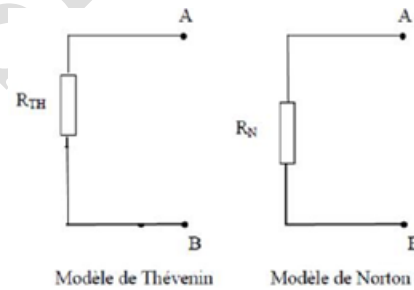


Figure 2.14

4. Simplification de Kennelly

Le passage de la structure triangle (ABC) à la structure étoile ($OABC$) (voir figure 2.15.)

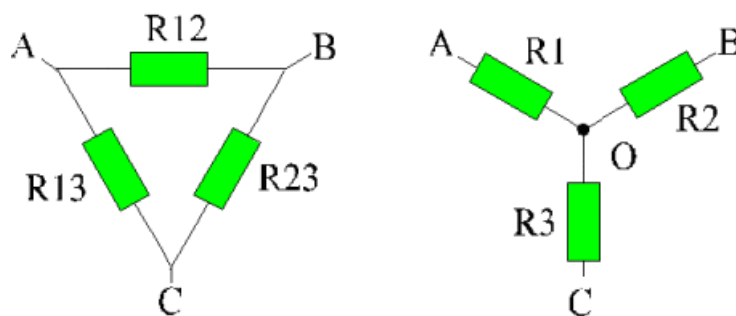


Figure 2.15.

S'obtient par les relations :

Si on déconnecte le point A, il doit y avoir égalité des impédances entre B et C :

$$Z_{23} = R_2 + R_3 = R_{23} // (R_{12} + R_{13}) = \frac{R_{23}(R_{12} + R_{13})}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}$$

Si on déconnecte le point B, il doit y avoir égalité des impédances entre A et C :

$$Z_{13} = R_1 + R_3 = R_{13} // (R_{12} + R_{23}) = \frac{R_{13}(R_{12} + R_{23})}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}$$

Si on déconnecte le point C, il doit y avoir égalité des impédances entre A et B :

$$Z_{12} = R_1 + R_2 = R_{12} // (R_{13} + R_{23}) = \frac{R_{12}(R_{13} + R_{23})}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}$$

On tire les trois égalités suivantes :

La résolution de ses égalités nous donnent :

$$R_1 = \frac{R_{12}R_{13}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}, R_2 = \frac{R_{12}R_{23}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}} \text{ et } R_3 = \frac{R_{23}R_{13}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}$$

Pour la transformation inverse :

On relie B et C et nous écrivons alors : $Z_a = R_{12} // R_{13} = R_1 + R_2 // R_3$

On relie C et A et nous écrivons alors : $Z_b = R_{12} // R_{23} = R_2 + R_1 // R_3$

On relie B et A et nous écrivons alors : $Z_c = R_{13} // R_{23} = R_3 + R_1 // R_2$

Combinons les relations comme il suit :

$$\frac{1}{Z_a} + \frac{1}{Z_b} - \frac{1}{Z_c} = \frac{1}{R_{12}} + \frac{1}{R_{13}} + \frac{1}{R_{12}} + \frac{1}{R_{23}} - \frac{1}{R_{13}} - \frac{1}{R_{23}} = \frac{2}{R_{12}} = \frac{2R_2}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3} \text{ ce qui donne :}$$

$$R_{12} = \frac{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}{R_3}$$

De même : $\frac{1}{Z_a} - \frac{1}{Z_b} + \frac{1}{Z_c}$ et $-\frac{1}{Z_a} + \frac{1}{Z_b} + \frac{1}{Z_c}$ nous donnent :

$$R_{13} = \frac{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}{R_2} \text{ et } R_{23} = \frac{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}{R_1}$$

Chapitre 3 : Puissance en régime sinusoïdal

1. Introduction

Dans les systèmes électriques alimentés en courant alternatif (AC), la notion de puissance revêt une importance particulière. Contrairement aux circuits en courant continu, où la puissance se calcule de manière directe et constante, les circuits en régime sinusoïdal imposent une analyse plus fine en raison de la variation périodique des tensions et des courants.

Ce chapitre a pour objectif de présenter les différentes formes de puissance que l'on rencontre en régime sinusoïdal : la puissance active, la puissance réactive et la puissance apparente. Chacune de ces grandeurs joue un rôle spécifique dans la compréhension du comportement énergétique des circuits, notamment ceux contenant des éléments résistifs, inductifs et capacitifs.

Nous aborderons également la notion de facteur de puissance, indicateur clé de l'efficacité énergétique d'un système, et son impact sur la conception et l'exploitation des réseaux électriques.

Ce chapitre vise donc à fournir les outils théoriques et pratiques nécessaires à l'analyse, à la mesure et à l'optimisation de la puissance dans les circuits à courant alternatif, avec un accent particulier sur les applications industrielles et domestiques.

2. Puissance active ou puissance moyenne

En régime variable, la puissance instantanée P_i , reçue par un dipôle s'obtient à partir de l'expression stationnaire, valable à tout instant:

$$P_i(t) = u(t)i(t) = u_m \cos(\omega t + \varphi) i_m \cos(\omega t)$$

En raison des fréquences habituellement utilisées dans l'ARQS, le plus souvent supérieures à 50 Hz, et de la durée T_d d'une expérience généralement très supérieure à la période $T = 1/f$, la grandeur intéressante est la puissance moyenne reçue :

$$P = \overline{P_i(t)} = \frac{1}{T_d} \int_0^{T_d} P_i(t) dt = \frac{1}{T_d} \int_0^{T_d} u_m \cos(\omega t + \varphi) i_m \cos(\omega t) dt = \frac{1}{2} u_m i_m \cos(\varphi)$$

Par définition, la valeur efficace d'une tension ou d'un courant variables est la valeur qu'il faudrait donner à cette grandeur, en régime stationnaire, pour dissiper la même puissance que dans un résistor. La puissance P dissipée dans un résistor soumis à une tension sinusoïdale est

$$P = \frac{1}{2} u_m i_m = UI \text{ soit avec } U = \frac{u_m}{\sqrt{2}} \text{ et } I = \frac{i_m}{\sqrt{2}}$$

Exemple

la tension efficace du réseau d'alimentation électrique sinusoïdale des particuliers est de 230V, ce qui correspond à une tension d'amplitude $u_m = U\sqrt{2} = 325V$.

La définition de la valeur efficace X d'une grandeur $x(t)$ périodique, de période T , est donc telle que: $X = \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt$

Le facteur $\cos(\varphi) = \frac{\text{Re}(Z)}{|Z|}$, qui apparaît dans l'expression de V , est le facteur de puissance ; il s'exprime simplement à l'aide de l'impédance du dipôle :

Ainsi, pour U et I , la puissance moyenne reçue par le dipôle peut varier de 0 lorsque $\varphi = \pm \frac{\pi}{2} \text{rad}$, à UI pour $\varphi = 0 \text{rad}$.

Pour un résistor, dont l'impédance est réelle, le facteur de puissance est maximal $\cos(\varphi) = 1$, et la puissance active reçue vaut alors UI .

Pour un condensateur idéal ou une bobine parfaite, le facteur de puissance et la puissance reçue sont nuls puisque $\varphi = \pm \frac{\pi}{2} \text{rad}$; pour de tels composants la puissance active P est nulle, alors que la puissance instantanée ne l'est pas : elle est tantôt positive, tantôt négative, car le dipôle emmagasine de l'énergie puis la restitue au cours d'une période.

Précisément, la puissance instantanée reçue par un condensateur s'écrit :

$$P_i(t) = u(t)i(t) = uC \frac{du}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Cu^2 \right)$$

Soit le taux de variation de l'énergie stockée par le condensateur.

De même, la puissance instantanée reçue par une bobine idéale a pour expression :

$$P_i(t) = u(t)i(t) = iL \frac{di}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Li^2 \right)$$

Soit le taux de variation de l'énergie stockée par la bobine. Seule la partie résistive d'un dipôle absorbe de la puissance active. En effet, pour un dipôle quelconque, d'impédance $Z = R + jX$, la puissance reçue a pour expression :

$$P = \frac{1}{2} u_m i_m \cos(\varphi) = \frac{1}{2} R i_m^2 = \frac{1}{2} \frac{R}{R^2 + X^2} u_m^2$$

Cette puissance s'annule, quelle que soit la valeur de X , pour $R = 0$. Notons que la réactance X influe en général sur la valeur de u_m ou i_m et donc sur la puissance dissipée, bien que la dissipation ne se produise qu'au niveau des parties résistives.

3. Puissance apparente et puissance réactive

3.1. Puissance apparente

La puissance moyenne reçue par un dipôle, $P = UI \cos(\varphi)$ (P , ne peut pas dépasser la valeur $S = UI$, laquelle fournit une estimation rapide de l'équipement indispensable en tension et en courant. Pour distinguer cette quantité S de la puissance active P exprimée en watt, on l'appelle puissance apparente et on l'exprime en voltampère (VA).

3.2. Exemple :

Un transformateur est un appareil permettant, grâce au phénomène d'induction entre un circuit primaire et un circuit secondaire, une modification de la tension sinusoïdale sans variation de puissance. Sur sa plaque signalétique sont inscrites les caractéristiques suivantes : 230 V au primaire, 12 V au secondaire et 60 VA, ce qui correspond dans le secondaire à $U_s = 12V$ et $I_s = \frac{S}{U} = 5A$. Ce transformateur pourra donc débiter dans le circuit secondaire un courant maximal de 5 A. Dans ce cas, la puissance disponible dépendra de l'impédance de la charge connectée aux bornes du circuit secondaire ; elle est généralement inférieure à 60 W et égale à cette valeur lorsque la charge est purement résistive.

3.3. Puissance réactive

Il est utile d'introduire, en dehors de la puissance active et de la puissance apparente, une autre puissance qui exprime les rôles des composants, tels qu'un condensateur ou une bobine. Ainsi, définit-on la puissance réactive Q selon :

$$Q = \frac{1}{2} u_m i_m \sin(\varphi) = UI \sin(\varphi)$$

Pour la distinguer de la puissance active et de la puissance apparente, on l'exprime en voltampère- réactif (VAR).

La puissance réactive d'un résistor est nulle, car ce dipôle n'introduit aucune différence de phase entre la tension et le courant. En revanche, celles d'une bobine d'inductance L et d'un condensateur de capacité C valent respectivement :

$$Q = UI \sin(\varphi) = UI = L\omega I^2 \text{ et } Q = UI \sin(\varphi) = \frac{-I^2}{C\omega}$$

Ce concept de puissance réactive permet de caractériser le type d'installation :

- si $Q > 0$, le système reçoit de la puissance réactive, puisque $\sin(\varphi) > 0$;
l'installation est de type inductif,
- si $Q < 0$, le système fournit de la puissance réactive, puisque $\sin(\varphi) < 0$;
l'installation est de type capacitif.

Notons que les puissances active, apparente et réactive, sont reliées par la relation simple suivante : $S^2 = P^2 + Q^2$

ce que l'on retient sous la forme d'un triangle de puissances où les trois puissances sont les trois côtés d'un triangle rectangle d'angle φ voir figure 3.1.

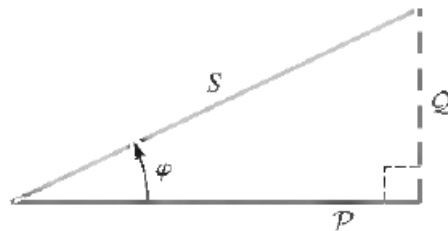


Figure 3.1

3.4. Exemple

Sur le transformateur d'une guirlande de sapin de Noël, qui comporte 180 petites lampes connectées en série, on peut lire les informations suivantes :

PR/Entrée : 230 V - 50 Hz SEC/Sortie 24 V - 850 mA - 20,4 VA

En outre, il est indiqué que chaque lampe consomme une puissance de 0.112 W. Ainsi, le transformateur est constitué d'un circuit Primaire (PR) aux bornes duquel la tension sinusoïdale du secteur de valeur efficace 230 V et de fréquence 50 Hz est appliquée. Aux bornes du Secondaire (SEC), la tension efficace est de 24 V, l'intensité de 0,85 A, d'où la puissance apparente de 20,4 VA.

Nous déduisons facilement :

$$\cos(\varphi) = \frac{P}{S} = \frac{180 \times 0.112 W}{20.4 VA} = 0.988 \text{ et } \tan(\varphi) = \frac{1}{\cos^2(\varphi)} - 1 = 0.155$$

$$\text{Or } P = \frac{U_S^2}{R} \text{ alors } R = \frac{U_S^2}{P} = \frac{24^2}{20.15} = 28.5 \Omega$$

4. Puissance complexe

La notation complexe, qui est un intermédiaire de calcul très commode, n'a pas été utilisée dans l'analyse énergétique précédente, car cette dernière fait apparaître des grandeurs quadratiques. Cependant, on peut l'introduire en remarquant les égalités suivantes :

$$\frac{1}{2} \text{Re}(\hat{u}_m \hat{i}_m^*) = \frac{1}{2} \text{Re}(u_m e^{j\varphi_u} e^{j\omega t} i_m e^{-j\varphi_i} e^{-j\omega t}) = \frac{1}{2} \text{Re}(u_m i_m e^{j(\varphi_u - \varphi_i)}) = \frac{1}{2} u_m i_m \cos(\varphi)$$

et

$$\frac{1}{2} \text{Im}(\hat{u}_m \hat{i}_m^*) = \frac{1}{2} \text{Im}(u_m e^{j\varphi_u} e^{j\omega t} i_m e^{-j\varphi_i} e^{-j\omega t}) = \frac{1}{2} \text{Im}(u_m i_m e^{j(\varphi_u - \varphi_i)}) = \frac{1}{2} u_m i_m \sin(\varphi)$$

$\hat{i}_m^*$ est le conjugué du complexe $\hat{i}_m$

$$P = \text{Re}(\hat{P}), Q = \text{Im}(\hat{P}), S = |\hat{P}| \text{ avec } \hat{P} = P + jQ = \frac{1}{2} \hat{u}_m \hat{i}_m^*$$

Nous désignons la puissance complexe reçue par le dipôle considéré. Pour un dipôle d'impédance $Z = R + jX$, ou d'admittance $Y = G + jB$, Nous déduisons :

$$\hat{P} = \frac{1}{2} \hat{u}_m \hat{i}_m^* = \frac{1}{2} Z |\hat{i}_m|^2 = Z I^2 = R I^2 + jX I^2 \text{ ou encore}$$

$$\hat{P} = \frac{1}{2} \hat{u}_m \hat{i}_m^* = \frac{1}{2} \hat{u}_m Y^* \hat{u}_m^* = \frac{1}{2} Y^* |\hat{u}_m|^2 = Y^* U^2 = G U^2 - jB U^2$$

4.1. Remarque

La partie réelle de la puissance complexe est la puissance moyenne réelle (puissance active) et non la puissance instantanée réelle.

4.2. Grandeurs efficaces complexes

Ce qui précède suggère de définir des grandeurs complexes efficaces, associées aux tensions et aux intensités sinusoïdales :

$$\hat{U} = \frac{\hat{u}_m}{\sqrt{2}} = U e^{j\varphi_u} \text{ et } \hat{I} = \frac{\hat{i}_m}{\sqrt{2}} = I e^{j\varphi_i} \text{ ce qui donne alors :}$$

$$\hat{u}(t) = \sqrt{2} \hat{U} e^{j\omega t} \quad \hat{i}(t) = \sqrt{2} \hat{I} e^{j\omega t} \text{ et } P = \text{Re}(\hat{U} \hat{I}^*)$$

4.3. Théorème de Boucherot

Dans un circuit électrique, certains dipôles générateurs fournissent de la puissance électrique que des éléments résistifs dissipent par effet Joule et que d'autres, tels les condensateurs et les bobines, emmagasinent sous des formes différentes. Le théorème P. Boucherot établi en 1900, s'exprime comme suit. Dans un réseau électrique, parcouru par des courants sinusoïdaux, la

somme des puissances actives est nulle, ainsi que la somme des puissances réactives. Pour l'établir, commençons par l'exemple simple d'un réseau constitué de quatre nœuds, numérotés 1, 2, 3, 4, et disposés comme le montre la figure 3.2.

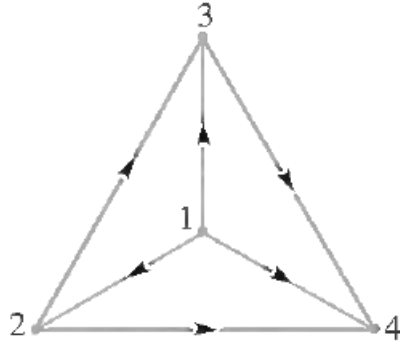


Figure 3.2.

En régime quasi stationnaire sinusoïdal, la puissance complexe du réseau est la somme des puissances complexes sur toutes les branches :

$$\begin{aligned}\hat{P} &= \sum_b \hat{P}_b = \frac{1}{2} \sum_b \hat{u}_{mb} \hat{i}_{mb}^* = \sum_b \hat{U}_b \hat{I}_b^* \\ &= \hat{U}_{12} \hat{I}_{12}^* + \hat{U}_{23} \hat{I}_{23}^* + \hat{U}_{34} \hat{I}_{34}^* + \hat{U}_{13} \hat{I}_{13}^* + \hat{U}_{14} \hat{I}_{14}^* + \hat{U}_{24} \hat{I}_{24}^*\end{aligned}$$

Si l'on introduit les potentiels électriques efficaces complexes aux nœuds, $\hat{V}_1$, $\hat{V}_2$, $\hat{V}_3$ et $\hat{V}_4$ les différents termes de puissance entre crochets s'écrivent respectivement, en introduisant les potentiels efficaces complexes :

$$\begin{aligned}\hat{P} &= (\hat{V}_1 - \hat{V}_2) \hat{I}_{12}^* + (\hat{V}_2 - \hat{V}_3) \hat{I}_{23}^* + (\hat{V}_3 - \hat{V}_4) \hat{I}_{34}^* + (\hat{V}_1 - \hat{V}_3) \hat{I}_{13}^* + (\hat{V}_1 - \hat{V}_4) \hat{I}_{14}^* + (\hat{V}_2 \\ &\quad - \hat{V}_4) \hat{I}_{24}^* \\ &= \hat{V}_1 (\hat{I}_{12}^* + \hat{I}_{13}^* + \hat{I}_{14}^*) + \hat{V}_2 (-\hat{I}_{12}^* + \hat{I}_{23}^* + \hat{I}_{24}^*) + \hat{V}_3 (-\hat{I}_{23}^* + \hat{I}_{34}^* - \hat{I}_{13}^*) \\ &\quad + \hat{V}_4 (-\hat{I}_{34}^* - \hat{I}_{14}^* - \hat{I}_{24}^*)\end{aligned}$$

D'après la loi des nœuds, les sommes sur les intensités sont nulles, d'où : $\hat{P} = \sum_b P_b = 0$

Or $\hat{P} = \sum_b \hat{P}_b = \sum_b (P_b \cos(\varphi_b) + j P_b \sin(\varphi_b)) = 0$

4.4. Exemple

dans un local industriel, alimenté sous une tension efficace de 230 V, sont branchées en parallèle cinq lampes, consommant une puissance de 100 W chacune, et deux moteurs de puissances actives $P_1 = 5KW$ et $P_1 = 6KW$; les facteurs de puissance de ces moteurs valent respectivement $\cos(\varphi_1) = 0.84$ et $\cos(\varphi_2) = 0.75$.

Dans le but de déterminer le facteur de puissance de l'ensemble, calculons les puissances active P_g et réactive Q_g du générateur d'alimentation à l'entrée du réseau. D'après le théorème de Boucherot, on a :

$$P_g + 5 \times 100 + 5\,000 + 6000 = 0 \text{ d'où } P_g = -11.5 \text{ kW et}$$

$$Q_g + 5 \times 0 + 5\,000 \times \tan(\arccos 0,84) + 6000 \times \tan(\arccos 0,75) = 0 \text{ d'où}$$

$$Q_g = -8,5 \text{ kVAR} \text{ On en déduit, à l'aide du triangle des puissances (Fig. 2.14),}$$

$$\tan(\varphi_g) = Q_g/P_g = 0.74 \text{ et}$$

$$\cos(\varphi_g) = 0,80.$$

5. Distribution de puissance électrique

Tout distributeur de puissance électrique, cherche à diminuer les pertes de puissance le long des lignes conductrices en raison de l'effet Joule. Sur la figure 3.3, on a schématisé cette distribution : on désigne par r la résistance des lignes, Z la charge, I l'intensité efficace du courant dans la ligne et U la tension efficace aux bornes de la charge.

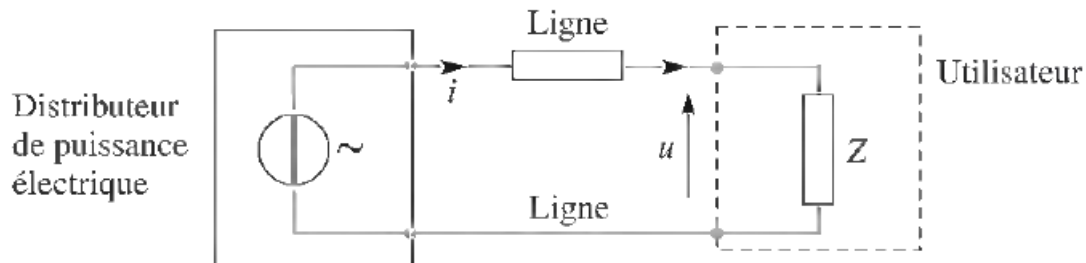


Figure 3.3.

Les installations électriques industrielles ne sont pas purement résistives mais possèdent un effet inductif non négligeable dû aux enroulements des moteurs ($\text{Im}(Z) > 0$). Aussi est-il judicieux d'étudier, pour une puissance utile P_u fixée consommée par l'utilisateur, l'influence du facteur de puissance sur la perte de puissance P_i occasionnée par les lignes de transport. On a :

$$P_i = rI^2 \text{ et } P_u = UI\cos(\varphi) \text{ donc :}$$

$$P_i = r \frac{P_u^2}{U^2 \cos^2(\varphi)}$$

Ainsi, la puissance P_i perdue dans la ligne est inversement proportionnelle au carré de la tension fournie à l'utilisateur et au carré du facteur de puissance de son installation. Afin de minimiser

les pertes en lignes, sans modifier la puissance reçue par l'utilisateur, le distributeur impose à ses clients un facteur de puissance minimal de 0,90. En cas de non-respect de ce minimum, il applique une tarification pénalisante. Si une installation électrique possède un facteur de puissance trop faible, on connecte, en parallèle ou en série avec l'installation, un condensateur qui compense l'effet inductif et amène le facteur de puissance à une valeur proche de 1.

Donnons les facteurs de puissance de quelques appareils usuels :

- lampe à incandescence ; $\cos(\varphi) = 1$
- four à induction compensé par condensateurs (prévus par le constructeur) : $\cos(\varphi) = 0.85$
- lampes à fluorescence avec compensation : $\cos(\varphi) = 0.93$
- poste de soudure à l'arc, sans compensation : $\cos(\varphi) = 0.5$

Afin de diminuer les pertes en ligne, le distributeur augmente, à l'aide de transformateurs, la tension efficace sur les lignes de transport entre la source de production et l'agglomération à desservir; cette tension peut atteindre 400 kV. À proximité du consommateur, la tension est abaissée, en plusieurs étapes, jusqu'à environ 230 V , grâce à des transformateurs abaisseurs de tension. Ce procédé fut proposé pour la première fois en 1887 par N. Tesla.

À l'entrée des installations industrielles, le distributeur utilise des wattmètres pour mesurer la puissance électrique active consommée ainsi que des VAR mètres, précisément dans le but de contrôler le facteur de puissance de l'installation.

5.1. Exemple

Une installation électrique est équivalente à un dipôle d'impédance $Z = R + jX$ avec $X > 0$, en raison de son caractère inductif. Elle est alimentée par le réseau de distribution $U = 230$ V et $f = 50$ Hz. Le courant efficace consommé est de 16 A pour une puissance disponible de 3 kW. Déterminons le facteur de puissance $\cos(\varphi)$ ainsi que R et la capacité du condensateur qu'il faut placer en parallèle sur l'installation pour obtenir un facteur de puissance de 1. Nous avons :

$P = UI\cos(\varphi)$ ce qui donne

$$\cos(\varphi) = \frac{P}{UI} = \frac{3000}{230 \times 16} = 0.82$$

Or $P = RI^2$ et $U = |Z|I$ on trouve :

$$R = 11.7\Omega, X = 14.4\Omega \text{ et } |Z| = 8.4\Omega$$

Pour que le facteur de puissance ait sa valeur maximale, il faut que la capacité C du condensateur, connecté en parallèle, réalise une susceptance (partie imaginaire de l'admittance) de l'ensemble nulle :

$$\text{Im}(Y_e) = 0 \text{ avec}$$

$$Y_e = jC\omega + 1/(R + jX) \text{ nous déduisons}$$

$$C = 129\mu F$$

6. Circuits pont de Wheatstone

6.1. Pont de Wheatstone

Le pont de Wheatstone est le nom donné à une combinaison de quatre résistances connectées pour donner une valeur centrale nulle.

Le circuit en forme de diamant du pont de Wheatstone dont le concept a été développé par Charles Wheatstone peut être utilisé pour mesurer avec précision des valeurs de résistance inconnues, ou comme moyen d'étalonner des instruments de mesure, des voltmètres, des ampèremètres, etc., en utilisant une résistance variable et une formule mathématique simple.

Bien qu'aujourd'hui, les multimètres numériques constituent le moyen le plus simple de mesurer une résistance. Le pont de Wheatstone peut être utilisé pour comparer une résistance inconnue à celle d'une résistance connue afin de déterminer sa valeur permettant de mesurer de très faibles valeurs de résistances dans la plage des milli-Ohms ($m\Omega$).

Le circuit en pont de Wheatstone (ou pont de résistance) peut être utilisé dans un certain nombre d'applications et aujourd'hui, avec des amplificateurs opérationnels modernes, nous pouvons utiliser le circuit en pont de Wheatstone pour interfacer divers transducteurs et capteurs à ces circuits amplificateurs.

Le circuit du pont de Wheatstone n'est rien de plus que deux simples arrangements série-parallèle de résistances connectées entre une borne d'alimentation en tension et la masse produisant une différence de tension nulle entre les deux branches parallèles lorsqu'elles sont équilibrées. Un circuit en pont de Wheatstone possède deux bornes d'entrée et deux bornes de sortie composées de quatre résistances configurées selon un agencement familier en forme de diamant, comme illustré. C'est typique de la façon dont le pont de Wheatstone est dessiné voir figure 3.4.

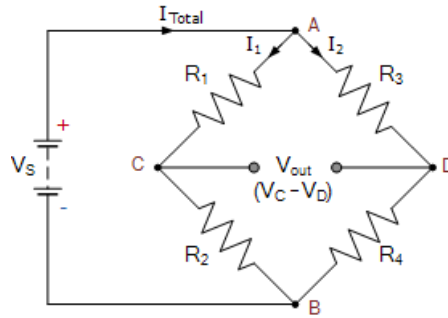


Figure 3.4: Pont de Wheatstone

Lorsqu'il est équilibré, le pont de Wheatstone peut être analysé simplement comme deux cordes en série en parallèle. Il se produit sur les résistances en série une chute de courant I_R et ou une chute de tension U_R , tel que défini par la loi d'Ohm. Soit le circuit série de la figure 3.5.

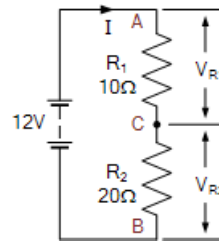


Figure 3.5.

Comme les deux résistances sont en série, le même courant (i) les traverse toutes les deux. Par conséquent, le courant circulant à travers ces deux résistances en série est donné par :

$$I = V \div R = 12V \div (10\Omega + 20\Omega) = 0.4A$$

Au point C, nous relevons la chute de tension aux bornes de la résistance inférieure, R_2 : $V_{R2} = I \times R_2 = 0.4A \times 20\Omega = 8V$

Nous pouvons alors voir que la tension source V_S est divisée entre les deux résistances série en proportion directe de leurs résistances comme $V_{R1} = 4V$ et $V_{R2} = 8V$. C'est le principe de la division de tension,

Maintenant, si nous ajoutons un autre circuit de résistances en série utilisant les mêmes valeurs de résistance en parallèle avec le premier, nous aurions le circuit de la figure 3.6.

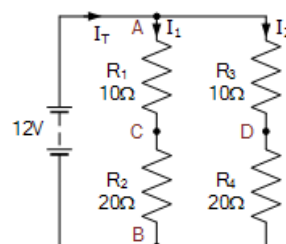


Figure 3.6.

Comme le deuxième circuit série a les mêmes valeurs résistives du premier, la tension au point D, qui est également la chute de tension aux bornes de la résistance, R_4 sera la même à 8 volts. Notons que la différence de tension entre le point C et le point D sera de zéro volt puisque les deux points ont la même valeur de 8 volts que : Lorsque cela se produit, les deux côtés du réseau de ponts parallèles sont dits équilibrés car la tension au point C est la même valeur que la tension au point D, leur différence étant nulle.

Voyons maintenant ce qui se passerait si nous inversions la position des deux résistances R_3 et R_4 dans la deuxième branche parallèle par rapport à R_1 et R_2 . Voir figure 3.7.

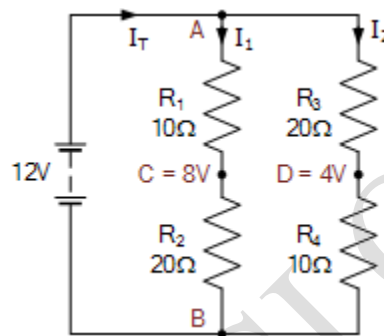


Figure 3.7

Avec les résistances R_3 et R_4 inversées, le même courant circule à travers la combinaison en série et la tension au point D, qui est également la chute de tension aux bornes de la résistance, R_4 sera : $V_{R4} = 0,4A \times 10\Omega = 4V$ donc la différence de tension entre les points C et D sera de 4 volts comme : Le résultat de l'échange des deux résistances est que les deux côtés ou « bras » du réseau parallèle sont différents car ils produisent des chutes de tension différentes. Lorsque cela se produit, le réseau parallèle est dit déséquilibré car la tension au point C est à une valeur différente de la tension au point D.

Nous pouvons ensuite voir que le rapport de résistance de ces deux bras parallèles, ACB et ADB, entraîne une différence de tension de 0 volt (symétrique) et la tension d'alimentation maximale (asymétrique), et c'est le principe de base du circuit du pont de Wheatstone. Donc un circuit en pont de Wheatstone peut être utilisé pour comparer une résistance R_X inconnue avec d'autres résistances de valeur connue, par exemple R_1 et R_2 , ont des valeurs fixes, et R_3 pourrait être variable. Si nous connectons un voltmètre, un ampèremètre ou classiquement un galvanomètre entre les points C et D, puis nous faisons varier la résistance R_3 jusqu'à ce que les compteurs lisent zéro, les deux bras du pont seraient équilibrés et la valeur de R_X (en remplacement de R_4) connue comme indiqué .

6.2. Analyse du circuit pont de Wheatstone

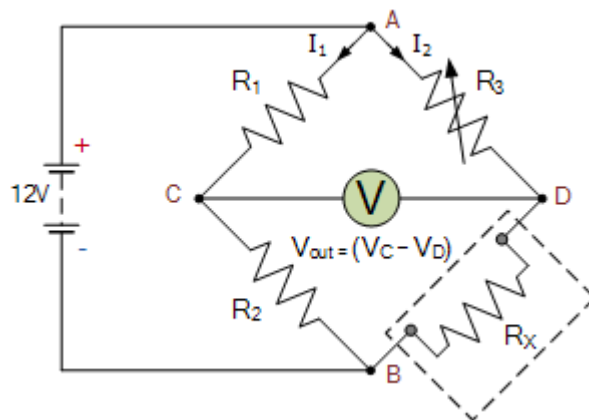


Figure 3.8

En remplaçant R_4 de la figure 3.8 par une résistance de valeur connue ou inconnue dans le bras de détection du pont de Wheatstone correspondant à R_X et en ajustant la résistance opposée, R_3 pour « équilibrer » le réseau du pont, cela entraînera une sortie de tension nulle. Nous pouvons alors voir que l'équilibre se produit lorsque :

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_X} = 1 \text{ équilibre}$$

L'équation du pont de Wheatstone nécessaire pour donner la valeur de la résistance inconnue, R_X à l'équilibre, est donnée comme suit :

$$V_{out} = (V_C - V_D) = (V_{R2} - V_{R4}) = 0$$

$$R_C = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \text{ et } R_D = \frac{R_3}{R_3 + R_4} \text{ à l'équilibre : } R_C = R_D \text{ donc } \frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{R_3}{R_3 + R_4}$$

$$\text{Ce qui donne : } R_4 = \frac{R_2 R_3}{R_1} = R_X$$

Où les résistances, R_1 et R_2 sont des valeurs connues ou prédéfinies.

6.3. Exemple 1

Soit le pont de Wheatstone déséquilibré de la figure 3.9.

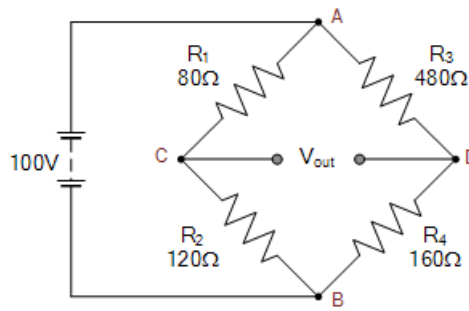


Figure 3.9

Calculez la tension de sortie aux points C et D et la valeur de la résistance R4 nécessaire pour équilibrer le circuit en pont

Pour le bras ACB: $V_C = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_S = \frac{120\Omega}{80\Omega + 120\Omega} 100V = 60V$

Pour le bras ABD: $V_D = \frac{R_4}{R_3 + R_4} V_S = \frac{160\Omega}{480\Omega + 160\Omega} 100V = 25V$

La tension aux points C-D est donnée par : $V_{out} = V_C - V_D = 60V - 25V = 35V$

La valeur de la résistance R4 nécessaire pour équilibrer le pont est donnée comme suit:

$$R_4 = \frac{R_2 R_3}{R_1} = \frac{120\Omega \times 480\Omega}{80\Omega} = 720\Omega$$

Nous avons vu plus haut que le pont de Wheatstone possède deux bornes d'entrée (A-B) et deux bornes de sortie (C-D). Lorsque le pont est équilibré, la tension aux bornes de sortie est de 0 volt. Cependant, lorsque le pont est déséquilibré, la tension de sortie peut être positive ou négative en fonction de la direction du déséquilibre.

6.4. Application : Détecteur de lumière du pont de Wheatstone

Les circuits en pont équilibré trouvent de nombreuses applications électroniques utiles, par exemple pour mesurer les changements d'intensité lumineuse, de pression ou de contrainte. Les types de capteurs résistifs qui peuvent être utilisés dans un circuit en pont de Wheatstone comprennent : les capteurs photo-résistifs (LDR), les capteurs de position (potentiomètres), les capteurs piézo-résistifs (jauges de contrainte) et les capteurs de température (thermistances), etc.

Il existe de nombreuses applications du pont de Wheatstone pour détecter toute une gamme de grandeurs mécaniques et électriques, mais une application très simple du pont de Wheatstone consiste à mesurer la lumière à l'aide d'un dispositif photo-résistif. L'une des résistances du

réseau du pont est remplacée par une résistance dépendante de la lumière, ou LDR. Un LDR, également connu sous le nom de cellule photoélectrique au sulfure de cadmium (Cds), est un capteur résistif passif qui convertit les changements dans les niveaux de lumière visible en un changement de résistance et donc en tension. Les résistances dépendantes de la lumière peuvent être utilisées pour surveiller et mesurer le niveau d'intensité lumineuse, ou pour savoir si une source lumineuse est allumée ou éteinte.

Une cellule typique au sulfure de cadmium (CdS) telle que la résistance dépendante de la lumière ORP12 a généralement une résistance d'environ un mégohm ($M\Omega$) dans l'obscurité ou une lumière faible, d'environ $900\ \Omega$ à une intensité lumineuse de 100 Lux (typique d'une pièce bien éclairée), jusqu'à environ $30\ \Omega$ en plein soleil. Ensuite, à mesure que l'intensité lumineuse augmente, la résistance diminue. En connectant une résistance dépendante de la lumière au circuit en pont de Wheatstone de la figure 3.10, nous pouvons surveiller et mesurer tout changement dans les niveaux de lumière, comme indiqué.

6.5. Détection de lumière

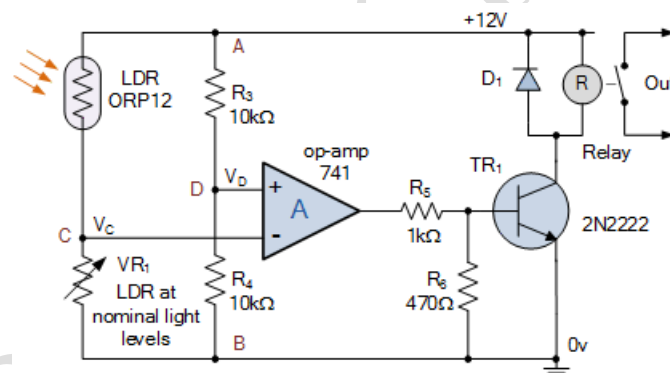


Figure 3.10

La cellule photoélectrique LDR est connectée au circuit du pont de Wheatstone comme indiqué pour produire un interrupteur sensible à la lumière qui s'active lorsque le niveau de lumière détecté passe au-dessus ou en dessous de la valeur prédéfinie déterminée par VR_1 , soit un potentiomètre $22k$ ou $47k\Omega$.

L'ampli-op est connecté en tant que comparateur de tension avec la tension de référence V_D , appliquée à la broche non inverseuse. Dans cet exemple, comme R_3 et R_4 ont la même valeur de $10\ k\Omega$, la tension de référence réglée au point D sera donc égale à la moitié de V_{CC} . C'est $V_{CC}/2$.

Le potentiomètre V_{R1} règle la tension du point de déclenchement V_C , appliquée à l'entrée inverseuse et est réglée au niveau de lumière nominal requis. Le relais s'allume lorsque la tension au point C est inférieure à la tension au point D.

Le réglage de V_{R1} règle la tension au point C pour équilibrer le circuit en pont au niveau ou à l'intensité de lumière requis. Le LDR peut être n'importe quel dispositif au sulfure de cadmium présentant une impédance élevée à de faibles niveaux de lumière et une faible impédance à des niveaux de lumière élevés.

Notez que le circuit peut être utilisé pour agir comme un circuit de commutation « activé par la lumière » ou un circuit de commutation « activé par l'obscurité » simplement en transposant les positions LDR et R_3 dans la conception.

Le pont de Wheatstone a de nombreuses utilisations dans les circuits électroniques autres que la comparaison d'une résistance inconnue avec une résistance connue. Lorsqu'il est utilisé avec des amplificateurs opérationnels, le circuit en pont de Wheatstone peut être utilisé pour mesurer et amplifier de petits changements de résistance, R_X dus, par exemple, à des changements d'intensité lumineuse comme nous l'avons vu ci-dessus.

Mais le circuit en pont convient également pour mesurer le changement de résistance d'autres quantités changeantes, donc en remplaçant le capteur de lumière LDR photo-résistif ci-dessus par une thermistance, un capteur de pression, une jauge de contrainte et d'autres transducteurs similaires, ainsi qu'en échangeant les positions de le LDR et le V_{R1} , nous pouvons les utiliser dans une variété d'autres applications de ponts de Wheatstone.

De plus, plusieurs capteurs résistifs peuvent être utilisés dans les quatre bras (ou branches) du pont formé par les résistances R_1 à R_2 pour réaliser des montages de circuits en « pont complet », « demi-pont » ou « quart de pont assurant une compensation thermique. ou équilibrage automatique du pont de Wheatstone.

Chapitre 4 : Analyse des circuits RLC

1. Introduction

Les circuits RLC constitués de résistances (R), d'inductances (L) et de capacités (C) — occupent une place centrale dans l'étude des systèmes électriques et électroniques. Leur analyse permet de comprendre une grande variété de phénomènes fondamentaux, tels que les régimes transitoires, les régimes sinusoïdaux établis, la résonance ou encore le filtrage de signaux.

Dans ce chapitre, nous étudierons les comportements dynamiques des circuits RLC dans différentes configurations : série, parallèle, ou mixtes. Nous analyserons la réponse de ces circuits à des excitations sinusoïdales, en mettant en évidence les relations de phase entre la tension et le courant, ainsi que les conditions particulières de résonance.

L'objectif est de maîtriser les méthodes d'analyse permettant de calculer les grandeurs électriques caractéristiques (impédance, courant, tension, puissance) et de comprendre l'influence des paramètres R, L et C sur le comportement global du circuit. Ces notions sont essentielles dans de nombreuses applications, allant du traitement du signal aux télécommunications, en passant par l'électronique de puissance et les systèmes de commande.

Ce chapitre constitue donc une étape fondamentale pour la compréhension et la modélisation des systèmes électriques complexes.

2. Circuit RLC série

Les circuits RLC en série sont constitués d'une résistance, d'une capacité et d'une inductance, toutes les deux connectées en série sur une alimentation alternative. Notons que dans une résistance ohmique pure, les formes d'onde de tension sont en phase avec le courant. Dans une inductance pure, la forme d'onde de tension est en retard de 90° par rapport au courant. Dans une capacité pure, la forme d'onde de tension est en retard par rapport au courant de 90° .

Cette différence de phase, φ dépend de la valeur réactive des composants utilisés, la réactance (X) est nulle si l'élément du circuit est résistif, positive si l'élément du circuit est inductif et négative s'il est capacitif. Dans le tableau suivant nous donnons les impédances résultantes sur le tableau 4.1

Tableau 4.1

Circuit Element	Resistance, (R)	Reactance, (X)	Impedance, (Z)
-----------------	-----------------	----------------	----------------

Resistor	R	0	$Z_R = R, \varphi = 0^\circ$
Inductor	0	ωL	$Z_L = j\omega L, \varphi = 90^\circ$
Capacitor	0	$1/\omega C$	$Z_C = 1/j\omega C, \varphi = -90^\circ$

Au lieu d'analyser chaque élément passif séparément, nous pouvons combiner les trois dans un circuit RLC en série. L'analyse d'un circuit RLC en série est la même que celle des circuits doubles séries R_L et R_C que nous avons examinés précédemment, sauf que cette fois, nous devons prendre en compte les amplitudes de Z_L et Z_C pour trouver la réactance globale du circuit. Les circuits RLC série sont des circuits du second ordre car ils contiennent deux éléments de stockage d'énergie, une inductance L et une capacité C . Soit le circuit RLC de la figure 4.1

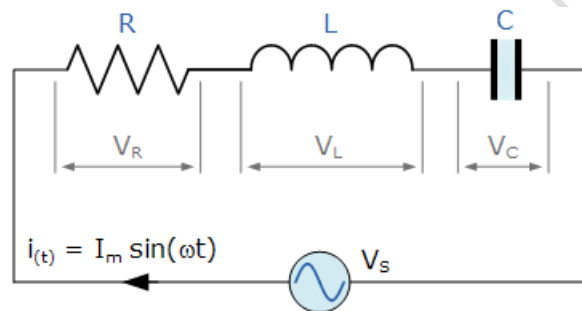


Figure 4.1.

2.1. Diagramme de Phase du circuit RLC série

Le circuit série RLC ci-dessus comporte une seule boucle, le courant instantané circulant dans la boucle étant le même pour chaque élément du circuit. Étant donné que Z_L et Z_C des réactances inductives et capacitatives sont fonction de la fréquence d'alimentation, la réponse sinusoïdale d'un circuit RLC en série varie avec la fréquence, f et les chutes de tension individuelles aux bornes de chaque élément du circuit des éléments R , L et C seront déphasées les unes par rapport aux autres, comme défini par : $i(t) = I_{max} \sin(\omega t)$. La réponse du circuit série RLC de la figure 4.2, cela peut être représenté comme suit :

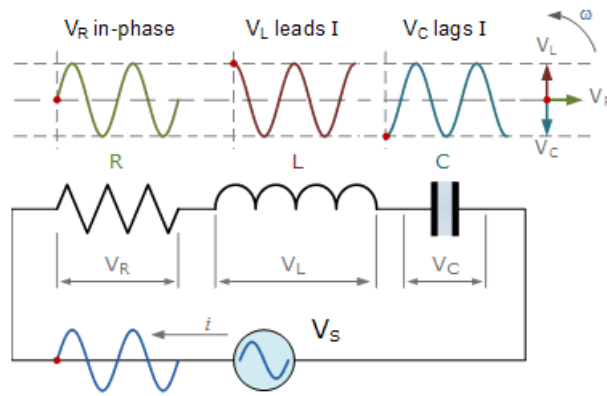


Figure 4.2

L'amplitude de la tension source aux bornes des trois composants dans un circuit RLC en série est composée des trois tensions de composants individuels, V_R , V_L et V_C , le courant étant commun aux trois composants. Les diagrammes vectoriels auront donc le vecteur courant comme référence, les trois vecteurs tensions étant tracés par rapport à cette référence comme indiqué par la figure 4.3.

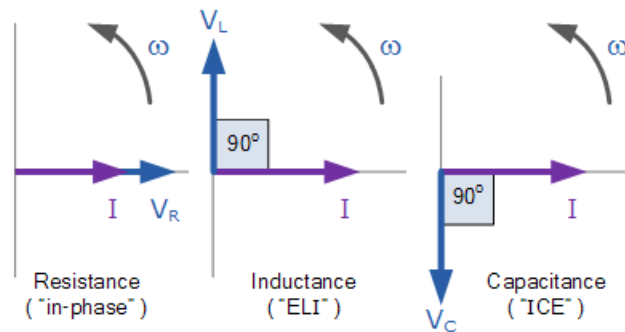


Figure 4.3

Cela signifie alors que nous ne pouvons pas simplement additionner V_R , V_L et V_C pour trouver la tension d'alimentation, V_S à travers les trois composants, car les trois vecteurs de tension pointent dans des directions différentes par rapport au vecteur courant. Par conséquent, nous devons trouver la tension d'alimentation, V_S comme la somme des phaseurs des trois tensions composantes combinées vectoriellement.

La loi de tension de Kirchhoff (KVL) pour les circuits en boucle et nodaux stipule que autour de toute boucle fermée, la somme des chutes de tension autour de la boucle est égale à la somme des champs électromagnétiques. Appliquer ensuite cette loi à ces trois tensions nous donnera l'amplitude de la tension source, V_S , soit :

$$V_S - V_R - V_L - V_C = V_S - RI - L \frac{di}{dt} - \frac{Q}{C} = 0 \text{ donc } V_S = RI + L \frac{di}{dt} + \frac{Q}{C}$$

2.2. Tensions instantanées pour un circuit RLC série

Le diagramme de phaseur pour un circuit RLC en série est produit en combinant les trois phaseurs individuels ci-dessus et en ajoutant ces tensions vectoriellement. Étant donné que le courant circulant dans le circuit est commun aux trois éléments du circuit, nous pouvons l'utiliser comme vecteur de référence avec les trois vecteurs de tension dessinés par rapport à celui-ci à leurs angles correspondants.

Le vecteur V_S résultant est obtenu en additionnant deux des vecteurs, V_L et V_C , puis en ajoutant cette somme au vecteur V_R restant. L'angle résultant obtenu entre V_S et i sera l'angle de phase des circuits comme indiqué sur la figure 4.5.

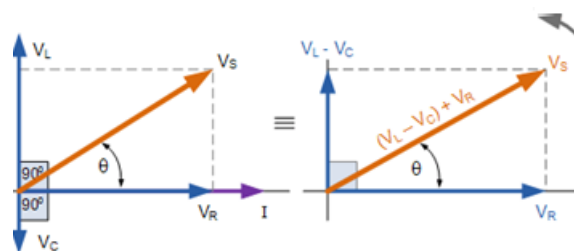


Figure 4.5.

Nous pouvons voir sur le diagramme de phase sur le côté droit ci-dessus que les vecteurs de tension produisent un triangle rectangulaire, comprenant l'hypoténuse V_S , l'axe horizontal V_R et l'axe vertical $V_L - V_C$. Le théorème de Pythagore sur ce triangle de tension donne :

$$V_S = \sqrt{V_R^2 + (V_L - V_C)^2}$$

L'équation ci-dessus, montre que la tension réactive finale est toujours positive, c'est-à-dire que la plus petite tension doit toujours être soustraite de la plus grande tension. Notons aussi que le courant a la même amplitude et la même phase dans tous les composants d'un circuit RLC série. Ensuite, la tension aux bornes de chaque composant peut également être décrite mathématiquement en fonction du courant qui le traverse et de la tension aux bornes de chaque élément :

$$\left. \begin{aligned} V_R &= i_R \sin(\omega t + 0^\circ) = i(t)R \\ V_L &= i_L Z_L \sin(\omega t + 90^\circ) = i(t)j\omega L \\ V_C &= i_L Z_C \sin(\omega t - 90^\circ) = -i(t)j/(\omega C) \end{aligned} \right) (3.1)$$

2.3. Impédance du circuit RLC série

En remplaçant ces valeurs dans l'équation de Pythagore (3.1) pour le triangle de tension, nous obtenons:

$$Z_{eqRLCSérie} = \sqrt{Z_R^2 + (Z_L - Z_C)^2}$$

Car : $v_S = Z_{eqRLCSérie}i = v_R + v_L + v_C = Ri + Z_L i + Z_C i = (R + Z_L + Z_C)i$

donc $|Z_{eqRLCSérie}| = |R + Z_L + Z_C|$

Ce résultat est facile à en tirer en utilisant le triangle de phase de la figure 4.6 :

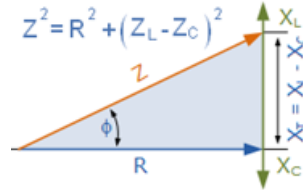


Figure 4.6.

L'impédance Z d'un circuit RLC en série dépend de la fréquence angulaire, ω , tout comme Z_L et Z_C . Si la réactance capacitive est supérieure à la réactance inductive, $Z_C > Z_L$, alors la réactance globale du circuit est capacitive, donnant un angle de phase avancé.

De même, si la réactance inductive est supérieure à la réactance capacitive, $Z_L > Z_C$, alors la réactance globale du circuit est inductive, donnant au circuit série un angle de phase en retard. Si les deux réactances sont identiques et que $Z_C = Z_L$, alors la fréquence angulaire pour laquelle il y a égalité est appelée fréquence de résonance et produit alors l'effet de résonance.

Ensuite, l'amplitude du courant dépend de la fréquence appliquée au circuit RLC série. Lorsque l'impédance Z est à son maximum, le courant est un minimum et de même, lorsque Z est à son minimum, le courant est au maximum. L'impédance RLC série $Z_{eqRLCSérie}$ peut être réécrite comme suit :

$$Z_{eqRLCSérie} = Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/C\omega)^2}$$

Remarquons que l'angle de phase ϕ entre la tension source, V_S et le courant, i est le même que pour l'angle entre Z et R dans le triangle d'impédance. Cet angle de phase peut être positif ou négatif selon que la tension source est en avance ou en retard par rapport au courant du circuit et peut être calculé mathématiquement à partir des valeurs ohmiques du triangle d'impédance comme :

$$\cos(\phi) = \frac{R}{Z} = \sin(\phi) = \frac{|Z_L - Z_C|}{Z} \text{ et } \tan(\phi) = \frac{|Z_L - Z_C|}{R}$$

3. Circuit RLC Parallèle

Un circuit résonant parallèle consiste en une combinaison RLC parallèle en parallèle avec une source de tension. Le circuit RLC parallèle est le contraire du circuit série que nous avons examiné dans le paragraphe précédent. L'analyse d'un circuit RLC parallèle peut être un peu plus difficile mathématiquement que celle du circuit RLC en série.

3.1. Courant et phase

Cette fois, au lieu que le courant soit commun aux composants du circuit, la tension appliquée est désormais commune à R, L et C. Nous devons donc chercher les courants de dérivation individuels à travers chaque élément. L'impédance totale, Z d'un circuit RLC parallèle est calculée en utilisant le courant du circuit similaire à celui d'un circuit parallèle. Notons que nous que l'admittance est utilisée à la place de l'impédance pour simplifier les calculs. Considérez le circuit RLC de la figure 4.7.

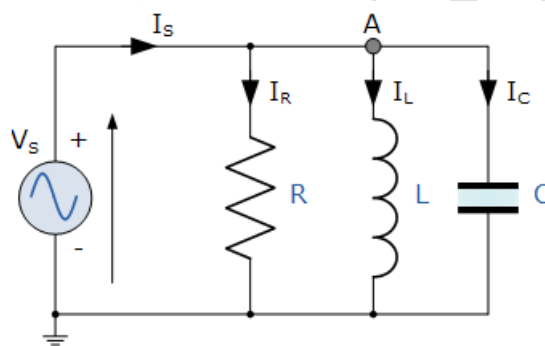


Figure 4.7: Circuit RLC parallèle

Dans le circuit RLC parallèle de la figure 4.7, la tension d'alimentation V_s est commune aux trois composants tandis que le courant d'alimentation I_s se compose de trois parties. Le courant circulant à travers la résistance, I_R , le courant circulant à travers l'inductance, I_L et le courant à travers le condensateur, I_C . Les courants circulant dans chaque branche sont différents les uns des autres ainsi que le courant d'alimentation, I_s .

Comme le circuit RLC série, nous allons résoudre ce circuit en utilisant la méthode de la phase ou du vecteur mais cette fois le diagramme vectoriel aura la tension comme référence avec les trois vecteurs de courant tracés par rapport à la tension. Le diagramme de phase pour un circuit RLC parallèle est produit en combinant les trois phases individuelles pour chaque composant et en ajoutant les courants de façon vectorielle.

Étant donné que la tension aux bornes du circuit est commune aux trois éléments du circuit, nous utilisons cette tension comme vecteur de référence avec les trois vecteurs de courant. En

effet, le courant vectoriel résultant I_s est obtenu en additionnant deux des vecteurs, I_L et I_C , puis en ajoutant cette somme au vecteur I_R . L'angle résultant obtenu entre v et I_s nous donne l'angle de phase des circuits comme voir figure 4.8

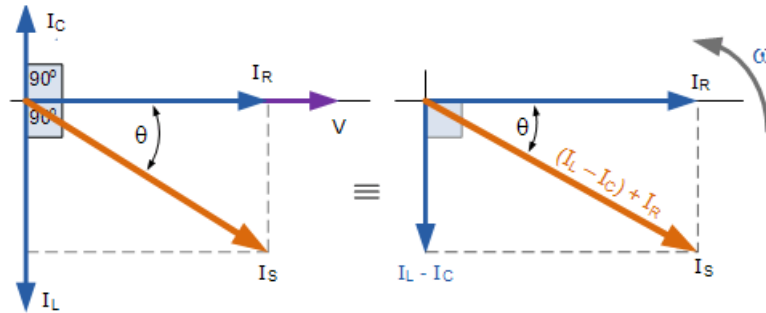


Figure 4.8: Diagramme de phase du circuit RLC parallèle

Nous constatons sur le diagramme de phase sur le côté droit de la figure 4.8 que les vecteurs de courant produisent un triangle rectangulaire, composé de l'hypoténuse I_s , de l'axe horizontal I_R et de l'axe vertical $I_L - I_C$, ce qui forme un triangle de courant. Le théorème de Pythagore sur ce triangle de courant nous donne l'amplitude des courants de branche le long des axes x et y puis ensuite le courant d'alimentation total I_s : $I_s^2 = I_R^2 + (I_L - I_C)^2$ donc :

$$I_s = \sqrt{I_R^2 + (I_L - I_C)^2} = \sqrt{\left(\frac{V}{R}\right)^2 + \left(\frac{V}{L} - \frac{V}{C}\right)^2} = \frac{V}{Z} = Y \cdot V$$

Avec : $Y = 1/Z$

Étant donné que la tension aux bornes du circuit est commune aux trois éléments du circuit, le courant traversant chaque branche peut être déterminé à l'aide de la loi du courant de Kirchhoff (KCL). N'oubliez pas que la loi actuelle de Kirchhoff ou loi de jonction stipule que le courant total entrant dans une jonction ou un nœud est exactement égal au courant sortant de ce nœud :

$$i_s - i_R - i_L - i_C = i_s - \frac{v}{R} - \frac{1}{L} \int v dt - C \frac{dv}{dt} = 0$$

En prenant la dérivée, en divisant l'équation ci-dessus par C, nous obtenons l'équation du second ordre suivante :

$$\frac{di_s}{dt} = \frac{d^2v}{dt^2} + \frac{dv}{RCdt} + \frac{v}{LC}$$

Dans ce type de circuit alternatif nous distinguons trois composantes : X_L , X_C et R avec la combinaison de ces trois valeurs donnant aux circuits l'impédance, Z. Notons que la tension a la même amplitude et la même phase dans tous les composants d'un circuit RLC parallèle et

l'impédance aux bornes de chaque composant peut également être décrite mathématiquement en fonction du courant qui le traverse et de la tension aux bornes de chaque élément :

$R = \frac{V}{I_R}$, $X_L = \frac{V}{I_L}$ et $X_C = \frac{V}{I_C}$, nous obtenons :

$$Y = \frac{1}{Z} = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C}\right)^2}$$

Vous remarquerez que l'équation finale d'un circuit RLC parallèle produit des impédances complexes pour chaque branche parallèle car chaque élément devient l'inverse de l'impédance, $1/Z$. L'inverse de l'impédance est communément appelé Admittance Y .

Dans les circuits alternatifs parallèles, il est généralement plus pratique d'utiliser l'admittance pour résoudre des impédances de branche complexes, en particulier lorsque deux ou plusieurs impédances de branche parallèles sont impliquées. L'admittance totale du circuit peut simplement être trouvée par l'addition des admittances parallèles. Alors l'impédance totale, Z du circuit sera donc $1/Y$. Voir figure 4.9 :

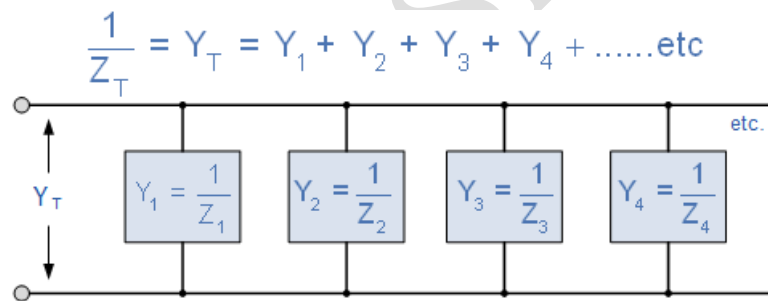


Figure 4.9: Admittance circuit parallèle

L'unité de mesure pour l'admittance est le Siemens, abrégé en $S \equiv \Omega^{-1}$. Les admittances sont additionnées dans des branches parallèles, tandis que les impédances sont additionnées dans des branches en série. Sachant que la réciproque d'impédance est aussi constitué de deux composantes G (conductance) et B (Susceptibilité) comme dans le cas de l'impédance qui est constituée de deux composantes, R (résistance) et X (réactance). Alors l'inverse de la résistance est appelée Conductance et l'inverse de la réactance est appelé Susceptibilité.

Les unités utilisées pour la conductance, l'admittance et la Susceptibilité sont toutes les mêmes, à savoir Siemens (S), qui peut également être considérée comme l'inverse d'Ohms ou Ω^{-1} , mais le symbole utilisé pour chaque élément est différent :

3.1.1. Admittance Y :

L'admittance est l'inverse de l'impédance Z et porte le symbole Y unité S. Dans les circuits alternatifs, l'admittance est définie comment un courant circule lorsqu'une tension est appliquée en tenant compte de la différence de phase entre la tension et le courant. L'admittance d'un circuit parallèle est le rapport entre le courant et la tension de.

3.1.2. Conductance G :

La conductance est l'inverse de la résistance, R et porte le symbole G . La conductance est définie comment un courant circule dans une résistance lorsqu'une tension est appliquée à ses bornes une résistance (ou un ensemble de résistances) permet au courant de circuler lorsqu'une tension alternative ou continue est appliquée.

3.1.3. Susceptibilité B :

La Susceptibilité est l'inverse d'une réactance pure, X de symbole B . Dans les circuits alternatifs, la Susceptibilité est définie comme la facilité avec laquelle une réactance (ou un ensemble de réactances) permet à un courant alternatif de circuler lorsqu'une tension d'une valeur donnée la fréquence est appliquée.

La Susceptibilité a le signe opposé à la réactance, donc la Susceptibilité capacitive B_C est positive, en valeur tandis que la Susceptibilité inductive B_L est négative, en valeur:

$$B_L = \frac{1}{X_L} \text{ et } B_C = \frac{1}{X_C} \text{ dont l'unité est le Siemens (S)}$$

On peut donc définir la susceptibilité inductive et capacitive comme étant :

$$B_L = -jB \text{ et } B_C = +jB$$

Dans les circuits en série AC (*Alternatif Curent*), l'impédance Z qui a deux composantes, la résistance R et la réactance, X et à partir de ces deux composantes, nous pouvons construire un triangle d'impédance. De même, dans un circuit RLC parallèle, l'admittance Y a également deux composantes, la conductance, G et la susceptibilité, B . Cela permet de construire un triangle d'admittance qui a un axe de conductance horizontal, G et un axe de susceptibilité vertical, jB , comme indiqué dans la figure 4.10.

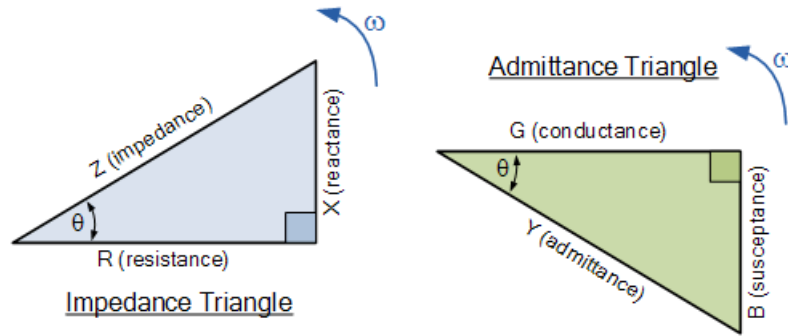


Figure 4.10 : Triangle d'admittance pour un circuit RLC parallèle

À partir de la figure 4.10 nous utilisons Pythagore pour calculer les amplitudes des trois côtés ainsi que l'angle de phase, comme indiqué :

$$Y = \sqrt{G^2 + (B_L - B_C)^2} \text{ avec } Y = \frac{1}{Z}, G = \frac{1}{R}, B_L = \frac{1}{\omega L} \text{ et } B_C = \omega C$$

Nous déduisons alors à la fois l'admittance du circuit et l'impédance par rapport à l'admittance :

$$Y = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2} \text{ et } Z = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2}}$$

3.1.4. Facteur de puissance

Par définition le facteur de puissance est : $\cos(\varphi) = \frac{G}{Y}$ et $\tan(\varphi) = -\frac{B}{G}$

Comme l'admittance Y d'un circuit RLC parallèle est une quantité complexe, l'admittance correspondant à la forme générale de l'impédance $Z = R + jX$ pour les circuits en série s'écrit $Y = G - jB$ pour les circuits parallèles où le $\text{Re}(G)$ est la conductance et $\text{Im}(B)$ est la susceptibilité : $Y = G + jB$.

3.2. Exemples de circuit RLC parallèle

1) Sur la figure 4.11 une résistance de $1 \text{ k}\Omega$, une bobine de 142 mH et un condensateur de $160 \mu\text{F}$ sont tous connectés en parallèle sur une alimentation de 240 V de fréquence 60 Hz . Calculez l'impédance du circuit RLC parallèle et le courant de l'alimentation.

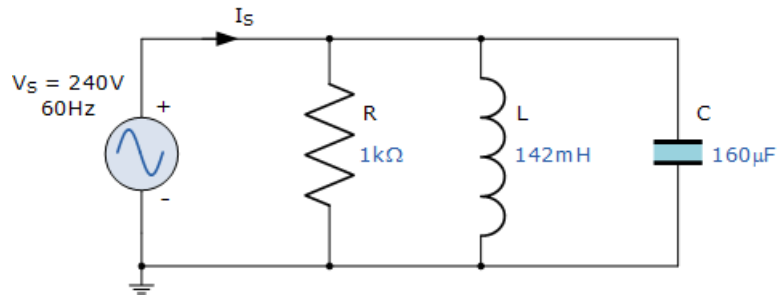


Figure 4.11 : Impédance d'un circuit RLC parallèle

Dans un circuit AC, la résistance n'est pas affectée par la fréquence donc $= 1k\Omega$, la Réactance inductive, $X_L = \omega L = 2\pi fL \approx 53.54\Omega$, la réactance capacitive $X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi fC} \approx 16.58\Omega$. Nous calculons l'impédance du circuit :

$$Z = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{1000\Omega}\right)^2 + \left(\frac{1}{53.54\Omega} - \frac{1}{16.58\Omega}\right)^2}} \approx 24\Omega$$

Le courant d'alimentation est $I_s = \frac{V_s}{Z} = \frac{240V}{24\Omega} = 10A$

2) Sur la figure 4.12 une résistance de 50Ω , une bobine de 20 mH et un condensateur de $5\mu\text{F}$ sont tous connectés en parallèle sur une alimentation de 50 V de fréquence 100 Hz . Calculez l'impédance du circuit RLC parallèle et le courant de l'alimentation et les courants dans chaque branche du circuit et déduire les conductances et les susceptibilités du circuit.

Dans un circuit AC, la résistance n'est pas affectée par la fréquence donc $= 50\Omega$, la Réactance inductive, $X_L = \omega L = 2\pi fL \approx 12.6\Omega$, la réactance capacitive $X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi fC} \approx 318.3\Omega$. Nous calculons l'impédance du circuit :

$$Z = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{50\Omega}\right)^2 + \left(\frac{1}{12.6\Omega} - \frac{1}{318.3\Omega}\right)^2}} \approx 12.7\Omega$$

Le courant d'alimentation est $I_s = \frac{V_s}{Z} = \frac{50V}{12.7\Omega} = 3.87A$.

Le courant dans R est $I_R = \frac{V_s}{R} = \frac{50V}{50\Omega} = 1.0A$.

Le courant dans L est $I_L = \frac{V_s}{X_L} = \frac{50V}{12.6\Omega} = 3.9A$.

Le courant dans C est $I_C = \frac{V_s}{X_C} = \frac{50V}{318.3\Omega} = 0.16A$

La conductance : $G = \frac{1}{R} = \frac{1}{50\Omega} = 20\text{mS}$

La susceptibilité inductive est : $B_L = \frac{1}{X_L} = \frac{1}{12.6\Omega} = 80\text{mS}$

La susceptibilité capacitive est : $B_C = \frac{1}{X_C} = \frac{1}{1318.3\Omega} = 3\text{mS}$

L'admittance est : $Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{12.7\Omega} = 78\text{mS}$

La phase du circuit est : $\cos(\varphi) = \frac{G}{Y} = \frac{20\text{mS}}{78\text{mS}} = 0.256$ donc $\varphi = \cos^{-1}(0.256) = 75.3^\circ$

Sur la figure 4.12 nous représentons les triangles de phase des courants dans les branches du circuit RLC parallèle et de l'admittance Y :

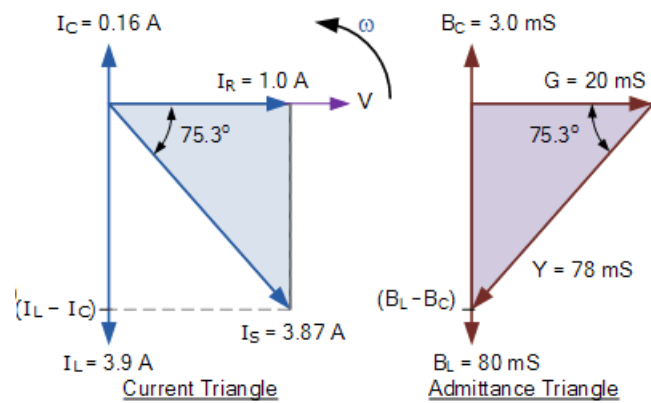


Figure 4.12: triangle de phase des courants et de l'admittance dans un circuit RLC parallèle