

# Circuits électriques Parcours électronique

## Chapitre 2 : Méthode d'analyse des circuits électriques

- Lois de base en régime sinusoïdal
- Théorème de Thévenin et de Norton
- Simplification de Kennelly

# LOIS DE BASE EN RÉGIME SINUSOÏDAL

Écriture des lois de Kirchhoff en régime sinusoïdal

Les lois de Kirchhoff restent valables dans l'ARQS.

Réécrivons-les en régime établi sinusoïdal, à l'aide de la notation complexe

règles simples du calcul algébrique sur les nombres complexes.

# LOIS DE BASE EN RÉGIME SINUSOÏDAL

## Loi des nœuds

Pour la même pulsation  $\omega$

termes en  $e^{j\omega t}$  se simplifient

$$\sum_k \epsilon_k i_k = \operatorname{Re} \left( \sum_k \epsilon_k \hat{i}_k \right)$$

$$= \operatorname{Re} \left( \sum_k \epsilon_k \hat{i}_{km} e^{j\omega t} \right)$$

# Loi des nœuds

termes en  $e^{j\omega t}$  se simplifient

Donc

$$\text{Re}\left(e^{j\omega t} \sum_k \epsilon_k \hat{i}_{km}\right) = 0$$

$$\sum_k \epsilon_k \hat{i}_{km} = 0$$

$\epsilon_k = 1$  si le courant  $i_k$  est orienté vers le nœud

$\epsilon_k = -1$  si le courant  $i_k$  est orienté vers le sens contraire du nœud.

## Loi des mailles

La somme algébrique des tensions aux bornes des branches d'une maille décrite dans un sens arbitraire est nulle :

$$\begin{aligned}
 \sum_k \epsilon_k u_k &= \operatorname{Re} \left( \sum_k \epsilon_k \hat{u}_k \right) \\
 &= \operatorname{Re} \left( \sum_k \epsilon_k \hat{u}_{km} e^{j\omega t} \right) \\
 &= \operatorname{Re} \left( e^{j\omega t} \sum_k \epsilon_k \hat{u}_{km} \right) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

## Loi des mailles

La somme algébrique des tensions aux bornes des branches d'une maille décrite dans un sens arbitraire est nulle :

$$\sum_k \epsilon_k \hat{u}_{km} = 0$$

$\epsilon_k = 1$  si la tension  $u_k$  est dans sens que la maille

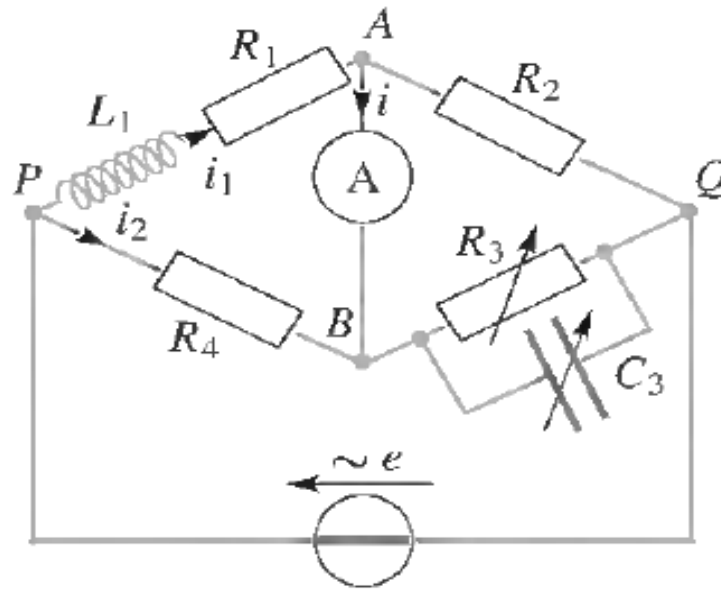
$\epsilon_k = -1$  si la tension  $u_k$  est dans le sens opposée de la maille.

# LOIS DE BASE EN RÉGIME SINUSOÏDAL

## Application à la détermination d'impédances

En régime stationnaire

pont de Wheatstone permet de déterminer la résistance d'un résistor inconnu.



En régime sinusoïdal établi le montage est alors appelé pont de Maxwell



# LOIS DE BASE EN RÉGIME SINUSOÏDAL

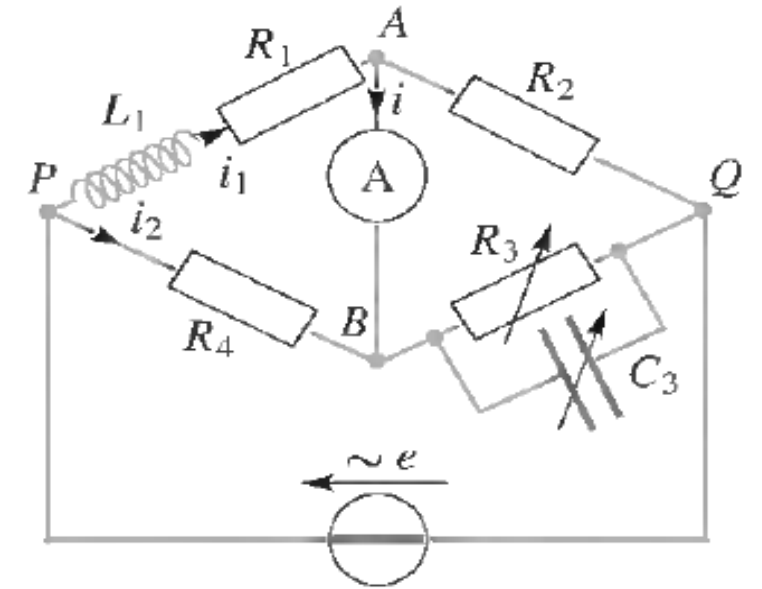
## Application à la détermination d'impédances

Les résistances  $R_2$  et  $R_4$  sont connues

$R_3$  et  $C_3$  sont réglables

$e(t) = e_m \cos(\omega t)$  entre les points P et Q

l'ampèremètre de résistance  $R_a$  indique l'intensité  $i$  du courant dans la branche AB



# LOIS DE BASE EN RÉGIME SINUSOÏDAL

## Application à la détermination d'impédances

La loi des maille

$$Z_1 \hat{i}_1 + R_4 \hat{i}_2 = 0$$

$$-e + Z_2(\hat{i}_1 - \hat{i}) + Z_1 \hat{i}_1 = 0 \rightarrow \hat{i}_1 = \frac{e + Z_2 \hat{i}}{Z_1 + Z_2}$$

$$-e + Z_3(\hat{i}_1 + \hat{i}) + Z_4 \hat{i}_2 = 0 \rightarrow \hat{i}_2 = \frac{e - Z_3 \hat{i}}{Z_3 + Z_4}$$

Le pont est équilibré si l'ampèremètre n'est traversé par aucun courant  $\rightarrow \hat{i} = 0$

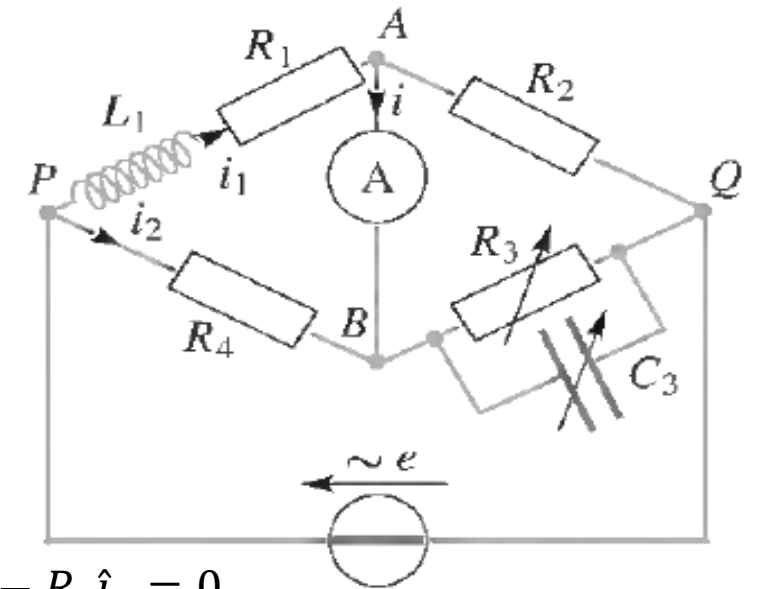
$$Z_1 Z_3 = Z_2 Z_4$$

$$(R_1 + jL_1\omega) \times R_3 / (1 + jR_3C_3\omega) = R_2 R_4$$

$$R_2 R_4 + jR_3 C_3 R_2 R_4 = R_1 R_3 + jL_1 \omega R_3$$

$$R_2 R_4 = R_1 R_3$$

$$L_1 = R_2 R_4 C_3$$



# LOIS DE BASE EN RÉGIME SINUSOÏDAL

## Théorème de Millman

en régime sinusoïdal dans l'ARQS

on utilise les amplitudes complexes des tensions

Au nœud A d'un circuit, la tension  $\hat{u}_{mA} = \frac{\sum_k (Y_k (\hat{u}_{mk} + \epsilon_k \hat{e}_{km}) + \epsilon'_k \hat{i}_{km})}{\sum_k Y_k}$

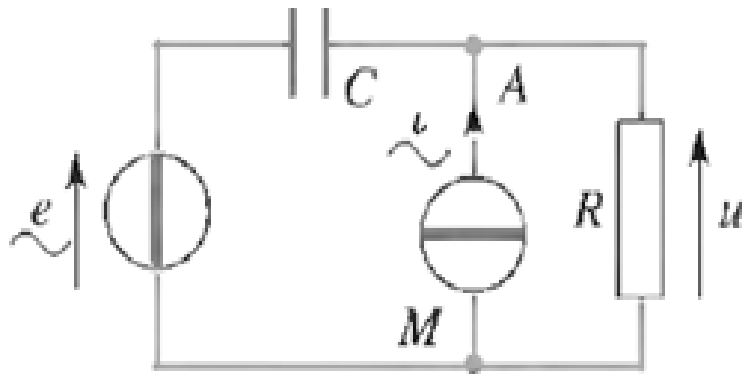
Pour les f.e.m orientées vers le nœud A  $\epsilon_k = 1$

Pour les courants dirigés vers le nœud A  $\epsilon'_k = 1$

# LOIS DE BASE EN RÉGIME SINUSOÏDAL

## Exemple

les générateurs de tension et de courant fournissent des signaux de même fréquence  $f$ , déphasé de  $\frac{\pi}{2} rad$



Soit  $e(t) = e_m \sin(\omega t) \longrightarrow \hat{e}(t) = u_m e^{j(\omega t)} = e_m e^{j\omega t}$

$$\hat{i}(t) = i_m e^{j\omega t} e^{j\frac{\pi}{2}} = j i_m e^{j\omega t}$$

# LOIS DE BASE EN RÉGIME SINUSOÏDAL

## Exemple

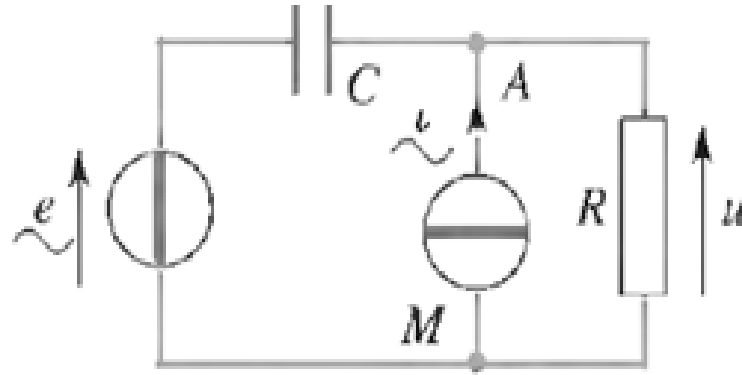
la tension  $u(t)$  en appliquant le théorème de Millman en A

$$\hat{u} = \frac{j\hat{e}C\omega + \hat{i}}{jC\omega + 1/R} = \frac{\hat{e}_m C\omega + \hat{i}_m}{C\omega - j/R} e^{j\omega t}$$

$$u_m = |\hat{u}| = \frac{e_m C\omega + i_m}{(C\omega)^2 + 1/R^2)^{1/2}}$$

Soit  $u(t) = u_m \cos(\omega t + \varphi)$

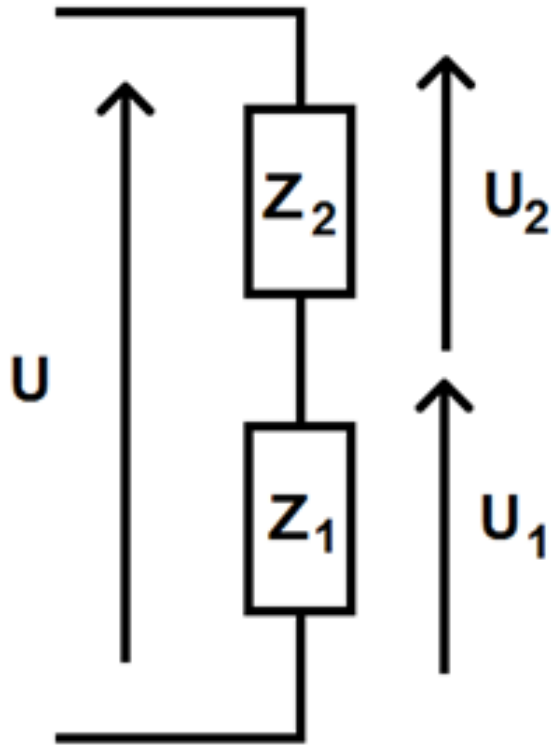
$$\varphi = \arctan\left(\frac{1}{RC\omega}\right)$$



# LOIS DE BASE EN RÉGIME SINUSOÏDAL

## Diviseurs de tension et de courant

### Diviseurs de tension



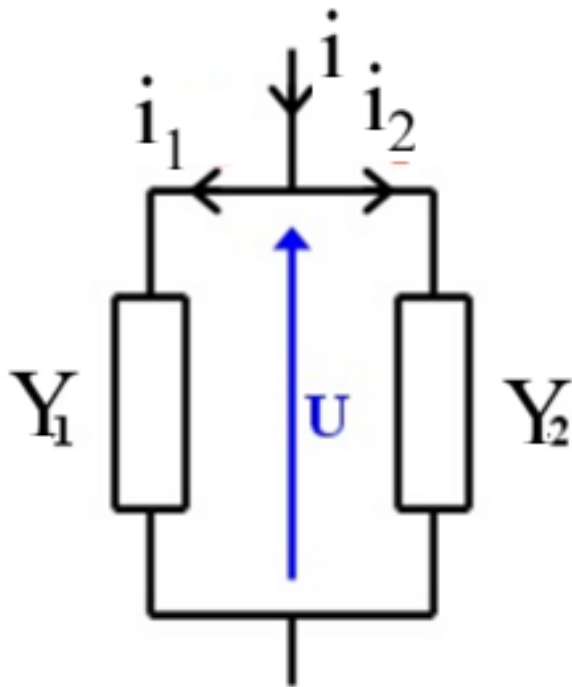
$$\hat{u}_2 = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} \hat{u}$$

$$\hat{u}_1 = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} \hat{u}$$

# LOIS DE BASE EN RÉGIME SINUSOÏDAL

## Diviseurs de tension et de courant

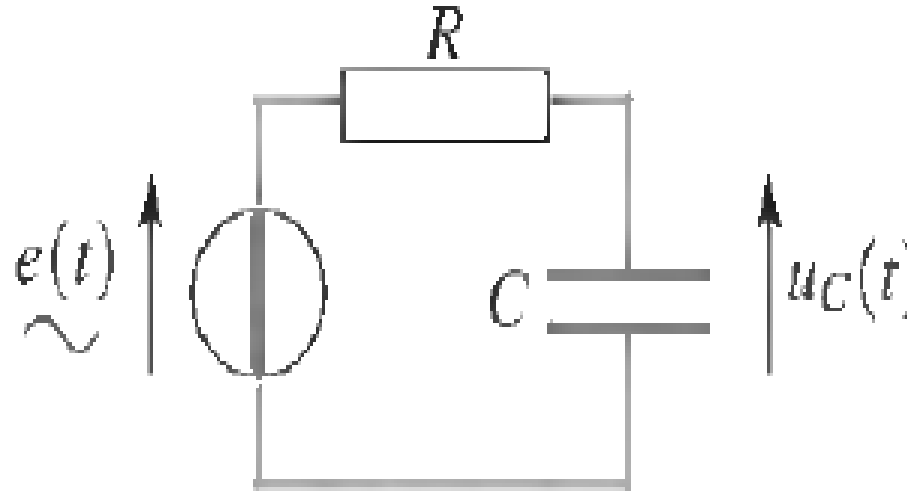
### Diviseurs de courant



$$\hat{i}_1 = \frac{Y_1}{Y_1 + Y_2} \hat{i}$$

$$\hat{i}_2 = \frac{Y_2}{Y_1 + Y_2} \hat{i}$$

## Exemple :

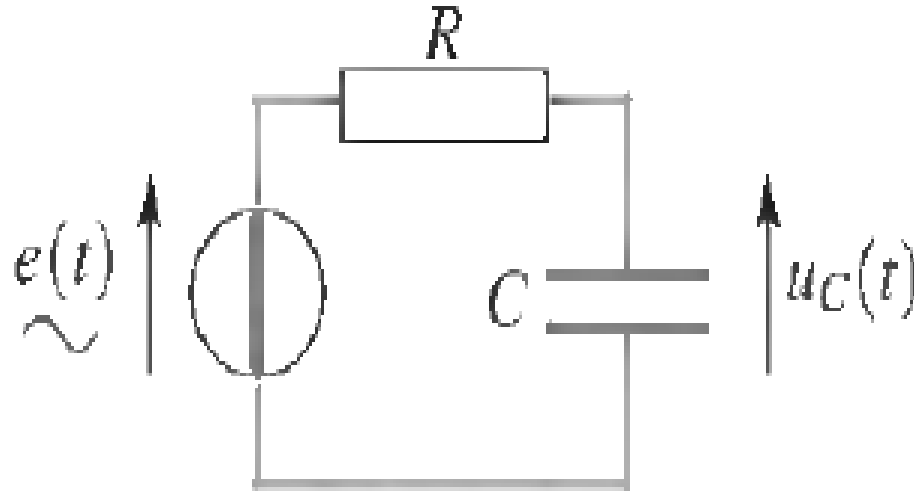


En notation complexe

$$\begin{aligned}\hat{u}_C &= \frac{Z_C}{Z_C + R} \hat{e}_m = \frac{1/jC}{\omega 1/jC\omega + R} \hat{e}_m \\ &= \frac{1}{1 + jRC\omega} \hat{e}_m \\ &= \frac{1}{1 + j\tau\omega} \hat{e}_m\end{aligned}$$



*Exemple :*



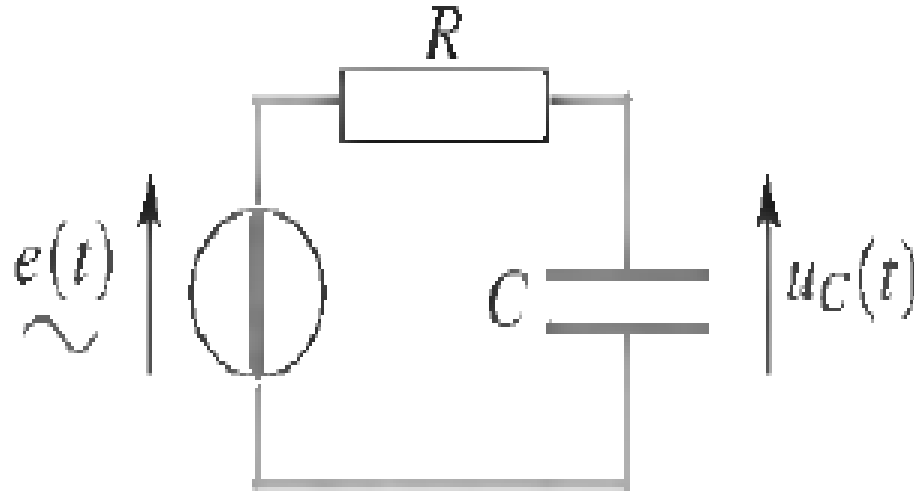
$$u_C = \left| \frac{1}{1 + j\tau\omega} \hat{e}_m \right| = \frac{1}{(1 + (\tau\omega)^2)^{1/2}} e_m$$

$$\text{Soit } \tau = RC = 500\Omega \times 2.2 \cdot 10^{-6}F = 1.1ms$$

$$\varphi = \arg(\hat{u}_C) = \arg\left(\frac{1}{1 + jRC\omega} \hat{e}_m\right) = -\arctan(\tau\omega)$$

$$0 \text{ (régime stationnaire)} < \varphi < \frac{\pi}{2} \text{ (haute fréquence)}$$

*Exemple :*



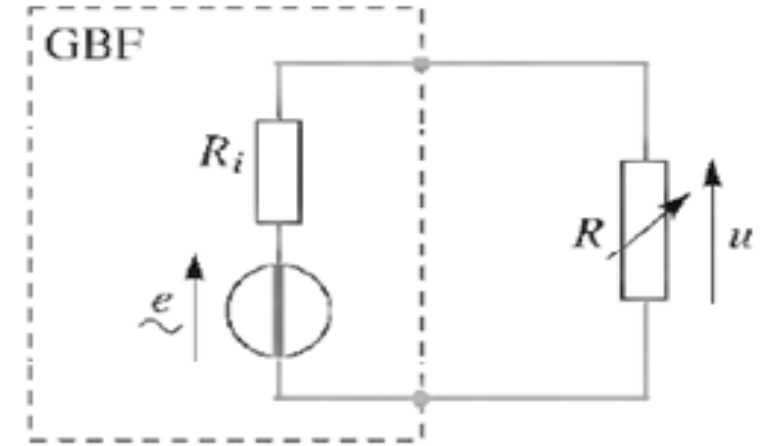
$$\begin{cases} u_{Cm} \approx e_m \text{ pour } \tau\omega \text{ très faible} \\ u_{Cm} \approx 0 \text{ pour } \tau\omega \text{ très grande} \end{cases}$$

$$u_C(t) = u_{Cm} \cos(\omega t + \varphi)$$

# LOIS DE BASE EN RÉGIME SINUSOÏDAL

## Application à la mesure de l'impédance interne d'un GBF méthode de la tension moitié

Après avoir relevé la f.e.m  $e_m$  du GBF  
on branche sur celui-ci une résistance variable



que l'on ajuste jusqu'à ce que la tension  $u$  à ses bornes soit égale à  $e_m/2$

La résistance variable est alors égale à la résistance interne du GBF

$$u = \frac{R}{R+R_i} e_m = \frac{e_m}{2} \longrightarrow R = R_i$$

# LOIS DE BASE EN RÉGIME SINUSOÏDAL

## Théorème de superposition

Ce théorème s'applique aux réseaux qui comportent plusieurs générateurs. Soit un circuit électrique composé de  $n$  sources indépendantes de tension et de courant:

$S_1, S_2, \dots, S_n$

Calculons par exemple le courant  $I_K$  circulant dans la branche  $K$ .

Appelons  $I_{K1}, I_{K2}, \dots, I_{Kn}$  les valeurs de cette grandeur créée individuellement dans cette branche par chaque source agissant seule.

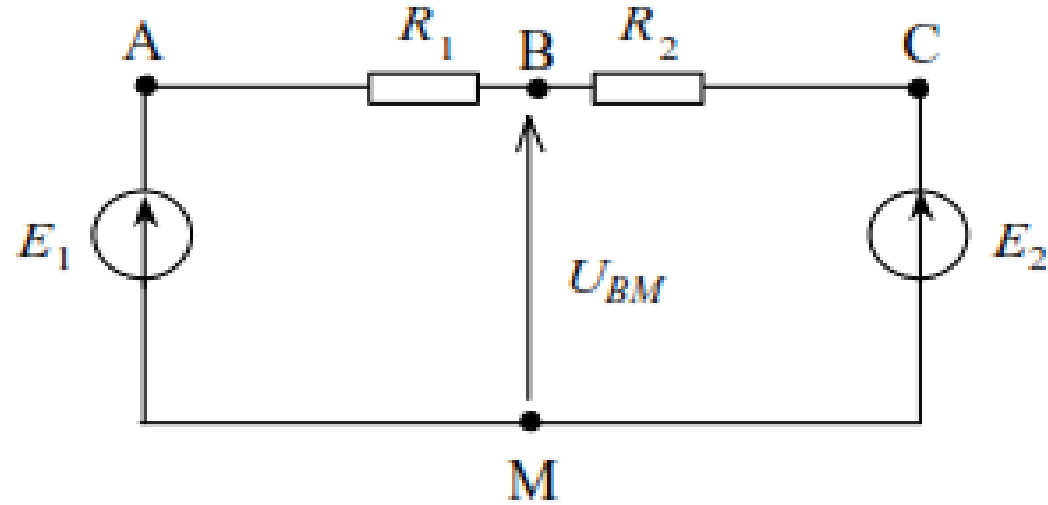
Les autres sources seront annulées.

$$\Rightarrow I_K = I_{K1} + I_{K2} + \dots + I_{Kn}$$



# LOIS DE BASE EN RÉGIME SINUSOÏDAL

## Exemple



En tenant compte des deux sources, nous obtenons :

$$U_{BM} = U_1 + U_2 = E_1 \frac{R_2}{R_1 + R_2} + E_2 \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

# LOIS DE BASE EN RÉGIME SINUSOÏDAL

## Théorème de Thévenin et de Norton

## Théorème de Thévenin

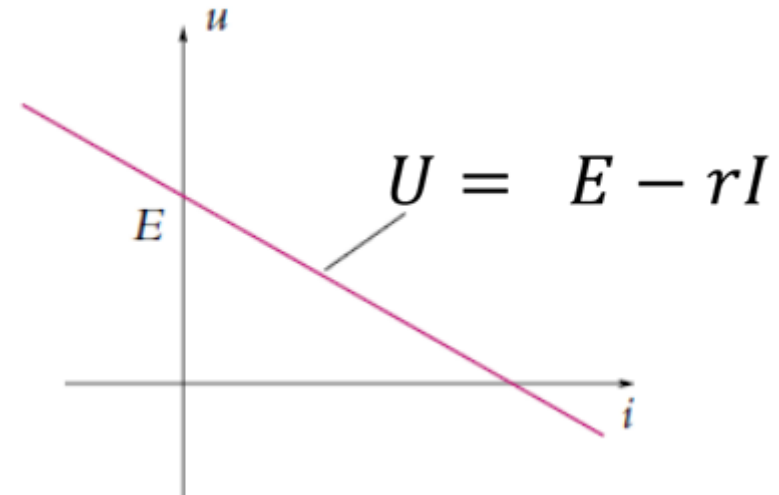
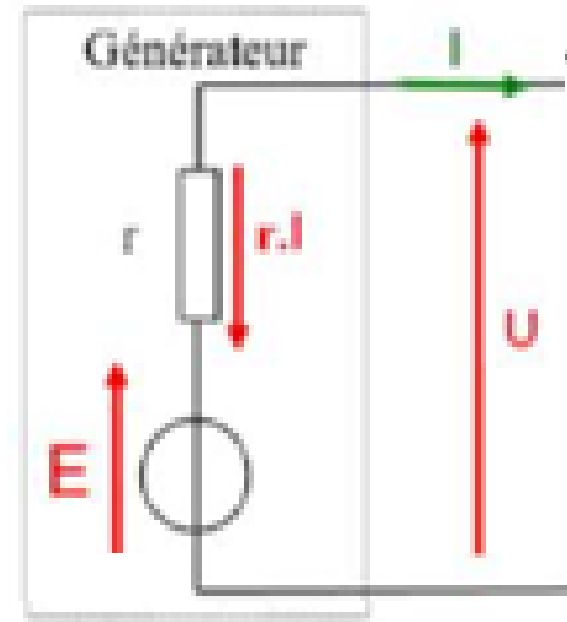
## Générateur de tension réel

Loi des mailles

$$U - E + rI = 0$$

f.é.m

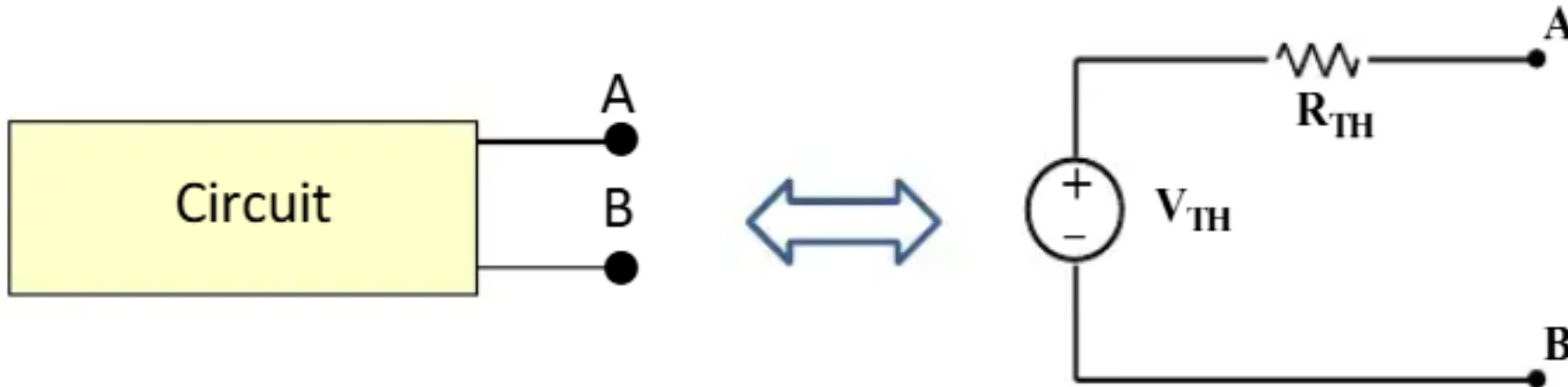
résistance interne du générateur



# LOIS DE BASE EN RÉGIME SINUSOÏDAL

## Théorème de Thévenin et de Norton

### Théorème de Thévenin

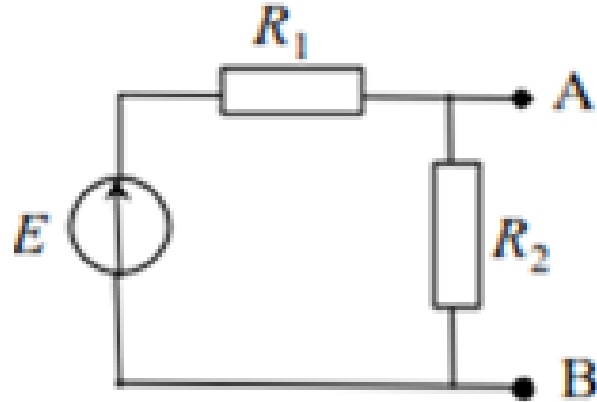


$V_{TH}$  = tension mesurée entre A et B

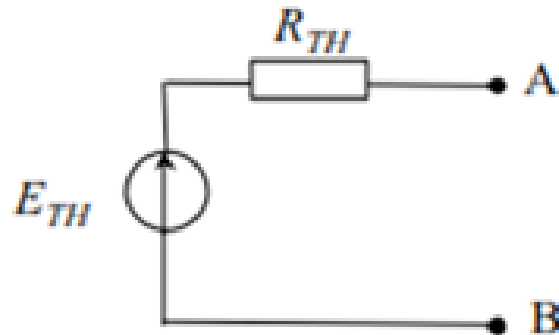
$R_{TH}$  = résistance mesurée entre A et B en l'absence de toute source idéale de tension ou de courant

## Exemple

Considérons un circuit électrique linéaire placé entre deux points A et B.



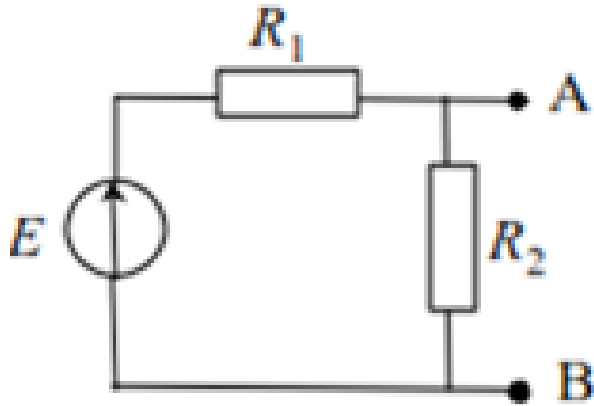
Remplacez ce circuit par un générateur équivalent de Thévenin de force électromotrice  $E_{TH}$  et de résistance interne  $R_{TH}$ .





## Exemple

La tension de Thévenin est la tension obtenue à vide entre A et B. Cette tension obtenue aux bornes de  $R_2$  se calcule en appliquant le théorème du pont diviseur.



$$E_{TH} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E$$

La résistance  $R_{TH}$  est obtenue en passivant la source de tension  $E$ . Il suffit de remplacer la source  $E$  par un court-circuit.

$$R_{TH} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

# LOIS DE BASE EN RÉGIME SINUSOÏDAL

## Théorème de Thévenin et de Norton

### Théorème de Norton

#### Générateur de courant réel

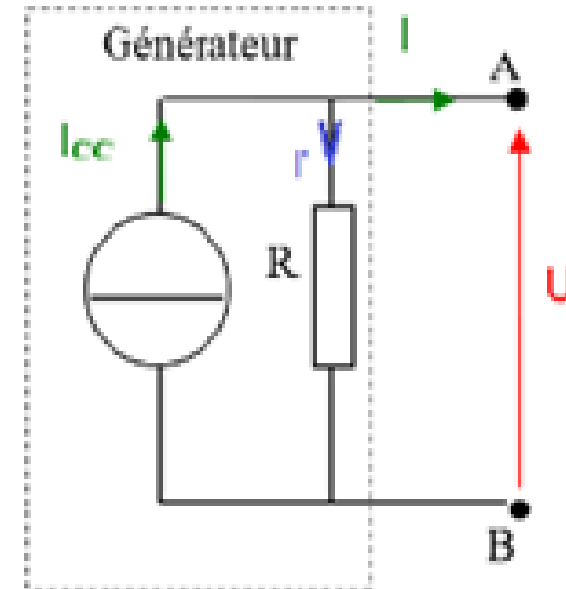
Loi des mailles

$$U - RI' = 0$$

courant débité par le générateur

$$I = I_{CC} - I' = I_{CC} - \frac{U}{R}$$

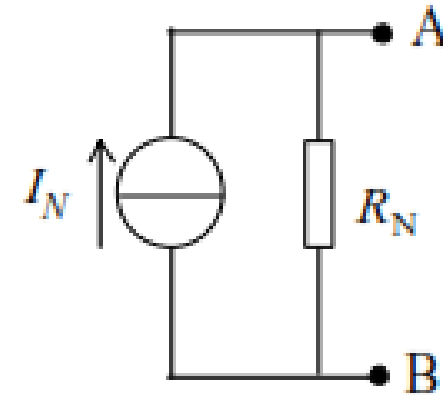
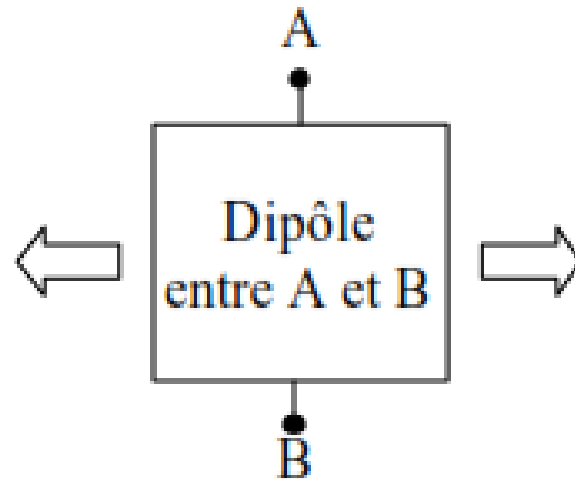
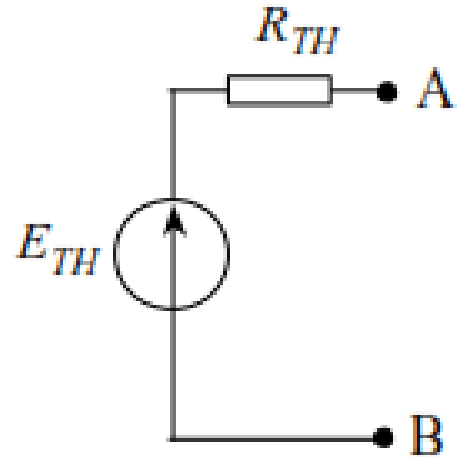
10/25/2025



# LOIS DE BASE EN RÉGIME SINUSOÏDAL

## Théorème de Thévenin et de Norton

### Théorème de Norton



$$R_N = R_{TH}$$

$$I_N = \frac{E}{R_{TH}}$$

# LOIS DE BASE EN RÉGIME SINUSOÏDAL

## Simplification de Kennelly

Pour passer de la structure triangle ( $ABC$ )

à la structure étoile ( $OABC$ ) nous procédons

déconnectons le point A, égalité des impédances entre B et C

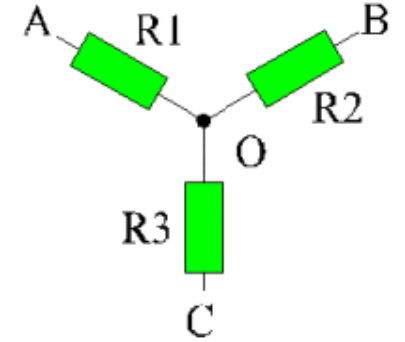
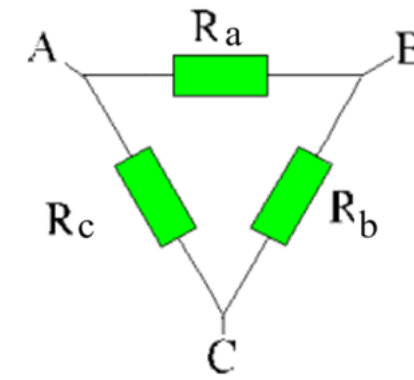
$$R_2 + R_3 = R_b // (R_a + R_c) = \frac{R_b(R_a + R_c)}{R_a + R_b + R_c}$$

déconnectons le point B, égalité des impédances entre A et C

$$R_1 + R_3 = R_c // (R_a + R_b) = \frac{R_c(R_a + R_b)}{R_a + R_b + R_c}$$

déconnectons le point C, égalité des impédances entre A et B

$$R_1 + R_2 = R_a // (R_c + R_b) = \frac{R_a(R_c + R_b)}{R_a + R_b + R_c}$$



$$R_1 = \frac{R_a R_c}{R_a + R_b + R_c}$$

$$R_2 = \frac{R_a R_b}{R_a + R_b + R_c}$$

$$R_3 = \frac{R_b R_c}{R_a + R_b + R_c}$$

# LOIS DE BASE EN RÉGIME SINUSOÏDAL

## Simplification de Kennelly

Pour la transformation inverse :

Relions B et C et nous écrivons alors :  $R_a // R_c = R_1 + R_2 // R_3 = Z_a$

Relions C et A et nous écrivons alors :  $R_a // R_b = R_2 + R_1 // R_3 = Z_b$

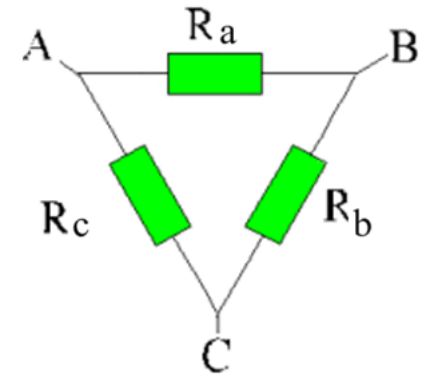
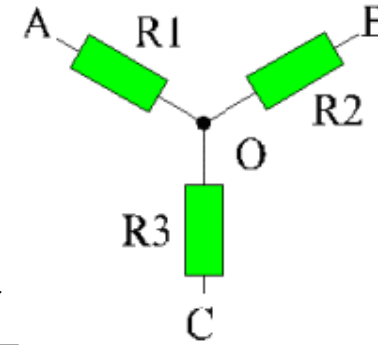
Relions B et A et nous écrivons alors :  $R_c // R_b = R_3 + R_1 // R_2 = Z_c$

Combinons

$$\frac{1}{Z_a} + \frac{1}{Z_b} - \frac{1}{Z_c} = \frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_c} + \frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_b} - \frac{1}{R_c} - \frac{1}{R_b} = \frac{2}{R_a} = \frac{2R_2}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}$$

$$\frac{1}{Z_a} - \frac{1}{Z_b} + \frac{1}{Z_c} \quad \rightarrow \quad R_b = \frac{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}{R_2}$$

$$-\frac{1}{Z_a} + \frac{1}{Z_b} + \frac{1}{Z_c} \quad \rightarrow \quad R_c = \frac{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}{R_3}$$



$$R_a = \frac{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}{R_1}$$

**FIN**