Tout(e) étudiant(e) ayant une (ou des) questions sur cette correction ou autre est prié de me rédiger sa problématique via Whatsapp au N° 0694583317. Je lui enverrai (in chaa allah) les réponses par son Whatsapp. Rigueur et patience aident à mener à bout tout travail aussi difficile que soit-il. Tourner la page SVP

Série n^{o}5

Exercice1: Etudier la convergence des séries suivantes :

$$S_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \text{ , } S_2 = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n^2+1}{n^2} \text{ , } S_3 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{\sqrt{n}} \text{ , } S_4 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n+1)\,4}{(7n^2+1)^3}$$

$$S_5 = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(ne^{\frac{1}{n}} - n \right) \text{ , } S_6 = \sum_{n=0}^{+\infty} \ln\left(1 + e^{-n}\right) \text{ , } S_7 = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2}$$

Exercice2: Déterminer la nature des séries numériques dont les termes généraux sont les suivants :

$$u_n = \frac{1}{n\cos^2 n} \text{ , } v_n = \frac{1}{[\ln(n)]^n} \text{ , } w_n = \frac{\tan^n\left(\frac{\pi}{7}\right)}{3^{n+2}}$$

$$x_n = \frac{1}{n\ln(n)}, \; y_n = \frac{1}{n(\ln n)^2} \text{ , } z_n = \frac{1}{(\ln 2)^2 + (\ln 3)^2 + ... + (\ln n)^2}$$

Exercice3: Montrer que la série de terme général

$$w_n = \frac{(-1)^n}{\ln(1+\sqrt{n})}$$

est convergente mais non absolument convergente (dite semi-convergente).

Exercice4: 1) Montrer que les deux séries suivantes sont absolument convergentes: $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}$

2) En déduire que la série: $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left[\sum_{k=0}^{k=n} \frac{(-1)^{n-k}}{k!2^{n-k}} \right]$ est absolument convergente et déterminer sa valeur.

Université My Ismail **Année Univer. 2019-2020**
F. S. T. Errachidia **Parcours MIP. S2 Analy2**
Départ. de Maths **Resp. Mustapha Laayouni**

Crrection de la série n^{o}5

Exercice1: Etudier la convergence des séries suivantes :

$$S_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \, , \, S_2 = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n^2+1}{n^2} \, , \, S_3 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{\sqrt{n}} \, , \, S_4 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n+1)\,4}{(7n^2+1)^3}$$

$$S_5 = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(n e^{\frac{1}{n}} - n \right) \, , \, S_6 = \sum_{n=0}^{+\infty} \ln\left(1 + e^{-n}\right) \, , \, S_7 = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2}$$

Solotion: • Notons s_n la somme partielle d'ordre n de la série consideée.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

converge si et seulement si, (s_n) converge si et seulement si, (s_n) est de Cauchy. Or

$$\begin{aligned} |s_{2n} - s_n| &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{n+n} \\ &\geqslant \frac{1}{n+n} + \frac{1}{n+n} + ... + \frac{1}{n+n} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{0.1}$$

Ce qui empèche (s_n) d'être de Cauchy. Donc $S_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ est divergente.

• D'après le cours, si une érie $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ converge alors son terme général u_n tend vers zéro quant n tend vers l'infini. Cela peut être revu facilement puisque, $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ converge si et seulement si, sa suite $(s_n)_n$ des sommes partielles converge , si et seulement si, $(s_n)_n$ est de Cauchy si et seulement si, $\lim_{n;m\to+\infty}(s_m - s_n) = 0$ ce qui implique $\lim_{n\to+\infty}(s_{n+1} - s_n) = 0 = \lim_{n\to+\infty}(u_n)$.

Ainsi pour

$$u_n = \frac{n^2+1}{n^2}$$

puisque $\lim_{n\to+\infty}(u_n) = 1 \neq 0$. Donc S_2 diverge.

- Concernant $S_3 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{\sqrt{n}}$, on a $\frac{1}{2}S_3$ est une série numérique de Riemann $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ avec $\alpha = \frac{1}{2} < 1$. Donc S_3 diverge.

- Le terme général u_n de S_4 est

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{(2n+1)\,4}{(7n^2+1)^3} \\ &\sim_\infty \frac{8n}{7^3 n^6} \\ &= \frac{8}{7^3 n^5} = v_n \end{aligned}$$

$u_n \geqslant 0$, $v_n \geqslant 0$, pour tout $n \geqslant 0$ et la série numérique $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ est de Riemann avec $\alpha = 5 > 1$ donc $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ converge. le principe des équivalences montre que S_4 est convergente.

- Le terme général de S_5 vérifie

$$\begin{aligned} u_n &= ne^{\frac{1}{n}} - n \\ &\sim_\infty n(1+\frac{1}{n}) - n = 1 \end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{n \to +\infty} (u_n) = 1 \neq 0$$

d'où S_5 diverge.

• Le terme général de S_6 satisfait

$$\begin{aligned} u_n &= \ln\left(1 + e^{-n}\right) \\ &\sim_\infty e^{-n} = v_n \end{aligned}$$

De plus u_n et v_n sont tous positifs et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n$ convergent $(0 < e^{-1} < 1)$ donc le principe des équivalences montre que S_6 est convergente.

Le terme général de S_7 est

$$\begin{aligned} u_n &= \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} \\ &= \exp\left(-n^2 \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) \\ &= \exp\left(-n^2 \left[\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right]\right) \\ &\sim_\infty e^{-n} \end{aligned}$$

Comme S_6 la série S_7 converge.

Exercice2: Déterminer la nature des séries numériques dont les termes généraux sont les suivants :

$$u_n = \frac{1}{n \cos^2 n}, \; v_n = \frac{1}{[\ln(n)]^n}$$

$$w_n = \frac{\tan^n\left(\frac{\pi}{7}\right)}{3^{n+2}}, \; x_n = \frac{1}{n \ln(n)}$$

$$y_n = \frac{1}{n (\ln n)^2}, \; z_n = \frac{1}{(\ln 2)^2 + (\ln 3)^2 + ... + (\ln n)^2}$$

Correction Déterminons la nature des séries numériques dont les termes généraux sont les suivants :

$\circledast$ on a pour tout $n \geqslant 1$, $\cos(n) \neq 0$ Car dans le cas contraire on aura

$$\begin{aligned} \cos(n) &= 0 \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : n = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : \pi = \frac{2n}{1+2k} \end{aligned} \quad (0.2)$$

(0.2) signifie que $\pi \in \mathbb{Q}$, ce qui est impossible, donc pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = \dfrac{1}{n\cos^2(n)}$ est bien défini, de plus on a

$$\frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n\cos^2(n)}$$

d'aptès l'exercice.1, $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n}$ est divergente. Donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n\cos^2(n)}$ diverge.

$\star$ $v_n = \dfrac{1}{[\ln(n)]^n}$ est bien défini pour tout $n \geqslant 2$ et vérifie:

$$v_n > 0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} (v_n)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{[\ln(n)]}\right) = 0$$

Le critère de Cauchy montre que la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} \dfrac{1}{[\ln(n)]^n}$ est convergente.

$\star$ On $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) > 0$ donc la fonction tan est strictement croissante donc

$$0 \leqslant \frac{\pi}{7} \leqslant \frac{\pi}{4} \Rightarrow 0 \leqslant w_n = \frac{\tan^n\left(\frac{\pi}{7}\right)}{3^{n+2}} \leqslant \frac{1}{3^{n+2}} = \frac{1}{9}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

donc $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{\tan^n\left(\frac{\pi}{7}\right)}{3^{n+2}}$ est convergente.

$\star$ Pour étudier la convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 2} \dfrac{1}{n\ln(n)}$ nous considérons la fonction f définie pour tout $t \geqslant 2$ par:

$$f(t) = \frac{1}{t\ln(t)}$$

On a bien pour tout $t \geqslant 2$,

$$f'(t) = -\frac{\ln(t)+1}{(t\ln(t))^2} < 0$$

Par suite f est strictement décroissante sur $[2, +\infty[$ et

$$f(k+1) \leqslant f(t) \leqslant f(k), \forall t \in [k, k+1]\,,\ k = 2, 3, ...n-1$$

Par integration,

$$\int_k^{k+1} f(k+1)dt \leqslant \int_k^{k+1} f(t)dt \leqslant \int_k^{k+1} f(k)dt$$

Par addition sachant que $\displaystyle\int_k^{k+1} c\,dt = c$, la relation de Chasles appliquée plusieurs fois donne

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k+1)\ln(k+1)} \leqslant \int_2^n f(t)dt \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}$$

D'où,

$$\int_2^n f(t)dt \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}$$

Par ailleurs

$$\int_2^n f(t)dt = [\ln(\ln(t))]_2^n = \ln\left(\frac{\ln(n)}{\ln(2)}\right)$$

On aura

$$\ln\left(\frac{\ln(n)}{\ln(2)}\right) \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}$$

Puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{\ln(n)}{\ln(2)}\right) = +\infty$; il s'en suit que $\displaystyle\sum_{k\geqslant 2} \frac{1}{k\ln(k)}$ diverge.

$\star$ Pour étudier la série de terme général $y_n = \dfrac{1}{n\ln^2(n)}$, considérons la fonction g définie pour $t \geqslant 2$ par

$$g(t) = \frac{1}{t\ln^2(t)}$$

qui satisfait

$$\begin{aligned} g'(t) &= -\frac{\ln^2(t) + \frac{2t}{t}\ln(t)}{t^2\ln^4(t)} \\ &= -\frac{\ln^2(t) + 2\ln(t)}{t^2\ln^4(t)} \\ &< 0, \forall t \geqslant 2 \end{aligned}$$

$$g'(t) = -\frac{\ln^2(t) + \frac{2t}{t}\ln(t)}{t^2\ln^4(t)}, \ \forall t \geqslant 2$$

Ainsi g est décroissante vérifiant

$$g(k+1) \leqslant g(t) \leqslant g(k), \ \forall t \in [k, k+1]\,, \ k = 2, 3, ...n-1$$

D'où

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k+1)\ln^2(k+1)} &\leqslant \int_2^n g(t)dt \\ &= \int_2^n \left[\frac{-1}{\ln(t)}\right]' dt \\ &= \left[\frac{-1}{\ln(t)}\right]_2^n \\ &= \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln n} \\ &\leqslant \frac{1}{\ln 2} \qquad (0.3) \end{aligned}$$

En plus tous les termes $\dfrac{1}{(k+1)\ln^2(k+1)}$ sont strictement positifs, donc

(0.3) implique que $\sum_{k=2} \frac{1}{(k+1)\ln^2(k+1)}$ converge. D'où

$$\sum_{k=2} \frac{1}{k\ln^2(k)} = \frac{1}{2\ln^2(2)} + \sum_{k=2} \frac{1}{(k+1)\ln^2(k+1)}$$

est convergente.

$\star$ Pour la séeie $\sum z_n$, soit h la fonction réelle définie pour tout $t \geqslant 2$ par $h(t) = (\ln t)^2$ qui évidement croissante pour les $t \geqslant 2$ donc:

$$h(k+1) \leqslant h(t) \leqslant h(k),\ \forall t \in [k, k+1]\,,\ k = 2, 3, ...n-1$$

L'intégrale étant une forme linéaire croissante, donc

$$\int_2^n h(k+1)dt \leqslant \int_2^n h(t)dt \leqslant \int_2^n h(k)dt,\ \forall t \in [k, k+1]\,,\ k = 2, 3, ...n-1$$

et $\int_2^n \kappa dt = \kappa$, $\forall \kappa \in \mathbb{R}$ donne

$$(\ln k)^2 \leqslant \int_k^{k+1} (\ln t)^2\, dt \leqslant (\ln(k+1))^2$$

Par addition membres à membres on aura

$$\sum_{k=2}^n (\ln k)^2 \leqslant \sum_{k=2}^n \int_k^{k+1} (\ln t)^2\, dt \leqslant \sum_{k=2}^n (\ln(k+1))^2$$

La relation de Chasle appliquée plusieurs fois nous donne:

$$\sum_{k=2}^n (\ln k)^2 \leqslant \int_2^n h(t)dt \leqslant \sum_{k=2}^n (\ln(k+1))^2$$

D'où

$$\begin{aligned} \int_2^n h(t)dt &\leqslant \sum_{k=2}^n (\ln(k+1))^2 \\ &\leqslant \sum_{k=2}^{n+1} (\ln(k))^2 \\ &= \frac{1}{z_{n+1}} \end{aligned} \tag{0.4}$$

L'intégration par partie nous mène à:

$$\begin{aligned}
\int_2^n h(t)dt &= \left[t(\ln t)^2 - 2t\ln t + 2t\right]_2^n \\
&= n(\ln n)^2\left[1 - \frac{2n\ln n}{n(\ln n)^2} + \frac{2n}{n(\ln n)^2} + \frac{cte}{n(\ln n)^2}\right] \\
&= n(\ln n)^2\left[1 - \frac{2}{(\ln n)} + \frac{2}{(\ln n)^2} + \frac{cte}{n(\ln n)^2}\right] \\
&\sim_{+\infty} n(\ln n)^2 = \frac{1}{y_n} \qquad (0.5)
\end{aligned}$$

En combinant (0.4) et (0.5) on aura pour n assez grad

$$0 \leqslant z_{n+1} \leqslant y_n$$

Or $\sum\limits_{n\geqslant 2} y_n$ converge donc $\sum\limits_{n\geqslant 2} z_{n+1}$ converge.
conclusion la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} z_n$ est convergente.

Exercice3: Montrer que la série de terme général

$$w_n = \frac{(-1)^n}{\ln(1+\sqrt{n})}$$

est convergente mais non absolument convergente (dite semi-convergente).

Correction Son terme général $w_n = \dfrac{(-1)^n}{\ln(1+\sqrt{n})}$ vérifie bien

$$(-1)^n w_n = \frac{1}{\ln(1+\sqrt{n})} \geqslant 0$$

donc de signe constant ce qui signifie que $\sum\limits_{n\geqslant 2} w_n$ est une série altérnée.
Par ailleurs, $|w_n| = f(n)$ où f associe à tout $t \geqslant 2$ son image

$$f(t) = \frac{1}{\ln\left(1+\sqrt{t}\right)}$$

Donc

$$f'(t) = \frac{-1}{2\sqrt{t}\left(1+\sqrt{t}\right)} \times \frac{1}{\left[\ln\left(1+\sqrt{t}\right)\right]^2} < 0$$

donc f est décroissante et par suite $|w_{n+1}| = f(n+1) \leqslant f(n) = |w_n|$. d'ù $(|w_n|)_{n\geqslant 2}$ est décroissante et il est clair que $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$. Le critère des séries altérnées montre que $\sum\limits_{n\geqslant 2} w_n$ est convergente.

D'autre part, $\sqrt{n}|w_n| = \dfrac{\sqrt{n}}{\ln(1+\sqrt{n})} \to +\infty$. La définition de la limite montre qu'il existe $N \geqslant 1$ tel que

$$\begin{aligned} n \geqslant N \quad &\Rightarrow \quad \sqrt{n}|w_n| \geqslant 1... \\ &\Rightarrow \quad |w_n| \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \end{aligned} \tag{0.6}$$

Or la série de Riemann $\sum\limits_{n\geqslant 2} \dfrac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ diverge donc $\sum\limits_{n\geqslant 2} |w_n|$ diverge.

On a bien une série convergente mais non absolument convergente.

Exercice4: 1) Montrer que les deux séries suivantes sont absolument convergentes: $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{n!}$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{2^n}$

2) En déduire que la série: $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left[\sum\limits_{k=0}^{k=n} \dfrac{(-1)^{n-k}}{k!2^{n-k}}\right]$ est absolument convergente et déterminer sa valeur.

Solution: Soient $a_n = \dfrac{1}{n!} \geqslant 0$ et $b_n = \dfrac{(-1)^n}{2^n}$ il est évident que: $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{1}{n!} = e$ et que $\sum\limits_{n\geqslant 0} |b_n| = 2$ donc les séries de termes généraux a_n et b_n sont absolument convergentes avec $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{n!} = e$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{2^n} = \dfrac{1}{1-\frac{-1}{2}} = \dfrac{2}{3}$.

Donc leur produit de Cauchy est absolument convergent avec:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left[\sum_{k=0}^{k=n} \frac{(-1)^{n-k}}{k!2^{n-k}}\right] = \left[\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\right] \left[\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}\right] = \frac{2}{3}e$$