Un Résumé sur le "Produit semi-direct" de 2 groupes (Exercice 19, série 1)

$\boxed{1}$

- $(Aut(K), \circ)$ est un groupe.
- $\varphi : H \longrightarrow Aut(K)$ homomorphisme de groupes (i.e) $\varphi(xy) = \varphi(x) \circ \varphi(y)$
- L'existence de φ est assurée, prendre par exemple : $\forall x \in H,\ \varphi(x) = id_K$.

  (φ est alors l'homomorphisme trivial)

- On définit sur $K \times H$ la loi "$\cdot$" par :

$$(k, h) \cdot (k', h') = \left(k(\varphi(h)(k')),\ hh'\right)$$

qui est une loi de composition interne d'élément neutre (e_K, e_H), associative et l'inverse de (k, h) est

$$(k, h)^{-1} = \left(\varphi(h)^{-1}(k^{-1}),\ h^{-1}\right)$$

Ainsi $(K \times H, \cdot)$ est un groupe noté "$(K \times_\varphi H, \cdot)$" ou "$(K \rtimes_\varphi H, \cdot)$".

$$\begin{cases} K_0 = K\times\{e_H\} \triangleleft K\times_\varphi H \\ H_0=\{e_K\}\times H \triangleleft K\times_\varphi H. \end{cases}$$

$$\begin{cases} K_0\simeq K \\ H_0\simeq H \end{cases}$$

$\forall z\in K\times_\varphi H, \exists!(k_0,h_0)\in K_0\times H_0$

tel que $z=k_0h_0$;

et $\begin{cases} K\times_\varphi H = K_0H_0 \\ K_0\cap H_0=\{(e_K,e_H)=e_{K\times_\varphi H}\}. \end{cases}$

Si $\varphi : H \longrightarrow Aut(K)$ "trivial"

$h \longmapsto \varphi(h)=id_K$

Dans ce cas $(K\times_\varphi H,\cdot)$ est le groupe produit cartésien des groupes K et H.

$K\times_\varphi H$ est abélien si, et seulement si, K et H sont abéliens et φ trivial.

Soit G un groupe, $\begin{cases} K \triangleleft G \\ H \text{ s/g de } G \\ K \cap H = \{e\} \\ G = HK \end{cases}$

$\boxed{3}$

alors G est canoniquement isomorphe à $K \times_\varphi H$

où $\varphi : H \longmapsto Aut(K)$

$h \longmapsto \varphi(h) : K \longmapsto K$

$k \longmapsto hkh^{-1}$.

L'isomorphisme canonique est

$f : G = KH = HK \longmapsto K \times_\varphi H$.

$kh \longmapsto (k, h)$

Si $\psi : H \longmapsto Aut(K)$ est un homomorphisme de groupes.

s'il existe $\alpha \in Aut(H)$ tel que $\psi = \varphi \circ \alpha$.

Alors $K \times_\varphi H \simeq K \times_\psi H$.

$(k, h) \simeq (k, \alpha(h))$.

Si $u \in Aut(K)$ tel que $\varphi(h) = u\psi(h)u^{-1}, \forall h \in H$,

alors $K \times_\varphi H \simeq K \times_\psi H$.

$(k, h) \simeq (u(k), h)$

● Des exemples très importants de "Produit semi-direct de groupes"

$\boxed{4}$

Soit G un groupe abélien, $f : G \longmapsto G$
$x \longmapsto -x$

et $\varphi : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longmapsto Aut(G)$ homomorphisme de groupes.

$\bar{0} \longmapsto \varphi(\bar{0}) = id_G$

$\bar{1} \longmapsto \varphi(\bar{1}) = f$

En prenant $n \geq 2$ et $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Un groupe est dit diédral de degré n, on le note D_n, s'il est isomorphe à

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times_\varphi \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

Un groupe est dit diédral de degré infini s'il est isomorphe à $\mathbb{Z} \times_\varphi \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, on le note D_∞.

On a les caractérisations suivantes :

a) Soit $n \geq 2$ et G un groupe. 5

G est un groupe diédral de degré n ((ie)

$G \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times_{\varphi} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$) si, et seulement si,

$\exists (a,b) \in G^2$ tel que $o(a)=n$, $o(b)=2$,

$o(ab)=2$ et G est engendré par $\{a,b\}$.

b) G est un groupe diédral de degré infini

((ie) $G \simeq \mathbb{Z} \times_{\varphi} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$) si, et seulement si,

$\exists (a,b) \in G^2$ tel que $o(a)$ est infini,

$o(b)=o(ab)=2$ et G est engendré par $\{a,b\}$.