Université Moulay Ismail
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année universitaire 2019-2020
SMA Semestre VI
Distributions

Correction de la Série d'exercices N^0 2

Exercice 1.

Q1. Montrer que l'application qui à φ fait correspondre $T(\varphi) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\displaystyle\int_{|x|>\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}dx$ est bien définie sur $\mathcal{C}_c^\infty(I\!R)$.

R1. Soient $\varepsilon > 0$, K un compact de $I\!R$ et $\varphi \in \mathcal{C}_K^\infty(I\!R)$. Comme il existe $r > 0$ tel que $K \subset [-r, r]$, on a :

$$\int_{|x|>\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}dx = \int_{r\geq|x|>\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}dx.$$

D'autre part, (*cf.* série 1, Ex.1.2), il existe $\psi \in \mathcal{C}^\infty(I\!R)$ telle que pour tout $x \in I\!R$ on ait :

$$\varphi(x) = \varphi(0) + x\psi(x).$$

$$\int_{r\geq|x|>\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}dx = (\int_{-r}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{r})\frac{\varphi(0) + x\psi(x)}{x}dx = \int_{I\!R}\chi_\varepsilon^r(x)\psi(x)dx,$$

où l'on a noté χ_ε^r l'indicatrice de sous ensemble de $I\!R$ suivant $[-r, -\varepsilon] \cup [\varepsilon, r]$. La dernière égalité résultant du fait que la fonction

$$x \mapsto \frac{\varphi(0)}{x}$$

est impaire et le sous-ensemble $[-r, -\varepsilon] \cup [\varepsilon, r]$ est symétrique par rapport à l'origine. Comme pour tout $x \in I\!R$, $|\chi_\varepsilon^r(x)\psi(x)| \leq \chi_{[-r,r]}(x)|\psi(x)|$, que $\chi_{[-r,r]}|\psi| \in \mathcal{L}^1(I\!R)$ et que $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\chi_\varepsilon^r(x)\psi(x) = \chi_{[-r,r]}\psi(x)$, le théorème de la convergence dominée (de Lebesgue) assure que l'on :

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{|x|>\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}dx = \int_{I\!R}\lim_{\varepsilon\to 0+}\chi_\varepsilon^r(x)\psi(x)dx = \int_{-r}^{r}\psi(x)dx.$$

Il en résulte que T est bien définie sur $\mathcal{C}_c^\infty(I\!R)$ et que c'est une forme linéaire.

Q2. Montrer que $T \in \mathcal{D}'(I\!R)$. On notera $\mathrm{Vp}(\frac{1}{x})$ cette distribution que l'on appellera valeur principale de $\frac{1}{x}$.

R2. Soit $K \Subset I\!R$ un compact de $I\!R$ et $\varphi \in \mathcal{C}_K^\infty(I\!R)$. D'après ce qui précède, Il existe $r > 0$ et $\psi \in \mathcal{C}^\infty(I\!R)$ tels que

$$T(\varphi) = \int_{-r}^{r}\psi(x)dx.$$

Comme

$$|T(\varphi)| \leq \int_{-r}^{r}|\psi(x)|dx$$

on obtient, grâce à Hölder,

$$|T(\varphi)| \leq (\int_{-r}^{r}dx)\sup_{x\in[-r,r]}|\psi(x)|.$$

Or $\psi(x) = x\varphi'(c_x)$, où c_x est le réel entre 0 et x de la formule des accroissements finis. On a donc :

$$|T(\varphi)| \leq 2r \sup_{x\in[-r,r]} |\varphi'(x)|.$$

Donc, pour tout compact K de $I\!R$, il existe $C = 2r$ et $m = 1$ tels que pour tout $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_K(I\!R)$ on ait :

$$|T(\varphi)| \leq C \max_{0\leq k\leq m} \sup_K |\varphi^{(k)}(x)|.$$

Donc T vérifie l'inégalité de continuité et $T \in \mathcal{D}'(I\!R)$.

Q3. Montrer que la fonction $x \mapsto \ln|x|$ est dans $\mathcal{L}^1_{loc}(I\!R)$. On notera $\Lambda_{\ell n}$ la distribution associée.

R3. La fonction $x \to \ln|x|$ est continue dans $I\!R^*$ et admet des primitives dans $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$. Donc, elle est intégrable sur tout compact contenu dans l'un des deux intervalles $I\!R^*_+$ et $I\!R^*_-$. Il reste le cas où le compact K de $I\!R$ contient 0.

On a $\int_K |\ln|x||dx \leq \int_{-r}^r |\ln|x||dx = \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \displaystyle\int_{r\geq|x|>\varepsilon} |\ln|x||dx$, avec $0 < \varepsilon < r < 1$.
Un petit calcul donne alors

$$\int_{r\geq|x|>\varepsilon} |\ln|x||dx = 2(r - r\ln(r) + \varepsilon\ln(\varepsilon) - \varepsilon)$$

et

$$\int_{|x|<r} |\ln(|x|)|\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{r\geq|x|>\varepsilon} |\ln|x||dx = 2(r - r\ln(r)).$$

Ce qui précède montre que la fonction $x \mapsto \ln(|x|)$ est localement intégrable dans $I\!R$.

Q4. Montrer que la dérivée (au sens des distributions) de Λ_{ln} est la distribution $\mathrm{Vp}(\frac{1}{x})$.

R4. Soit $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_c(I\!R)$. On a :

$$\Lambda'_{\ell n}(\varphi) = -\int_{I\!R} \ln(|x|)\varphi'(x)dx.$$

La fonction $x \mapsto \ln(|x|)\varphi'(x)$ étant localement intégrable dans $I\!R$, pour toute famille de compacts $(K_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ telle que

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} K_\varepsilon = K \text{ Oups!}$$

on a :

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{K_\varepsilon} \ln(x)\varphi'(x)dx = \int_K \ln(|x|)\varphi'(x)dx.$$

En particulier si le compact $K = [-r, r]$ et la famille définie pour tout $\varepsilon > 0$ par $K_\varepsilon = [-r, -\varepsilon] \cup [\varepsilon, r]$, où $0 < r < 1$.
On a

$$\int_{-r}^{-\varepsilon} \ln(|x|)\varphi'(x)dx = \int_{-r}^{-\varepsilon} \ln(-x)\varphi'(x)dx = \ln(\varepsilon)\varphi(-\varepsilon) - \int_{-r}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}dx$$

et

$$\int_\varepsilon^r \ln(|x|)\varphi'(x)dx = \int_\varepsilon^r \ln(x)\varphi'(x)dx = -\ln(\varepsilon)\varphi(\varepsilon) - \int_\varepsilon^r \frac{\varphi(x)}{x}dx,$$

donc

$$-\int_{K_\varepsilon} \ln(x)\varphi'(x)dx = \ln(\varepsilon)(\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon)) + \int_{r\geq|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}dx$$

et

$$\Lambda'_{\ell n}(\varphi) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{r\geq|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}dx = \mathrm{Vp}(\frac{1}{x})(\varphi).$$

Q5. Retrouver 2. en utilisant 4.

R5. Il s'agit de montrer que $\mathrm{Vp}(\frac{1}{x}) \in \mathcal{D}'(I\!R)$ en utilisant les faits que $\Lambda_{\ell n} \in \mathcal{D}'(I\!R)$ et que $\Lambda'_{\ell n} = \mathrm{Vp}(\frac{1}{x})$

Soit $K \Subset I\!R$ et $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_K(I\!R)$. On a

$$< \mathrm{Vp}(\frac{1}{x}), \varphi > = < \Lambda'_{\ell n}, \varphi > = - < \Lambda_{\ell n}, \varphi' > .$$

Donc,

$$| < \mathrm{Vp}(\frac{1}{x}), \varphi > | = | < \Lambda_{\ell n}, \varphi' > | = | \int_K \ln(x)\varphi'(x)dx| \leq (\int_K |\ln(x)|\mathrm{d}x) \sup_{x\in K} |\varphi'(x)|.$$

Ceci montre l'inégalité de continuité pour $\mathrm{Vp}(\frac{1}{x})$.

Q5. Trouver l'ordre de $\mathrm{Vp}(\frac{1}{x})$, ainsi que celui de Λ_{ln}.

R5. Il est clair que l'ordre de $\Lambda_{\ell n}$ est 0 et que l'ordre de $\mathrm{Vp}(\frac{1}{x})$ est inférieur ou égal à 1. Montrons qu'il ne peut être égal à zéro.

Pour ce faire, considérons une suite $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ et à support compact telles que pour tout $n \geq 1$, $0 \leq \varphi_n \leq 1$ $\mathrm{supp}\varphi \subset [\frac{1}{n}, \frac{4}{n}]$, $\varphi = 1$ sur $[\frac{2}{n}, \frac{3}{n}]$. Alors,

$$< \mathrm{Vp}(\frac{1}{x}), \varphi_n > \geq \frac{n}{4} \sup |\varphi_n(x)| = \frac{n}{4}.$$

Donc, l'ordre de $\mathrm{Vp}(\dfrac{1}{x})$ est 1.

Exercice 2. On considère pour tout $n \geq 1$ la fonction localement intégrable dans $I\!R$ définie pour tout $x \in I\!R^*$ par

$$f_n(x) = \frac{\chi_{[\frac{1}{n},+\infty[}(x) + \chi_{]-\infty,-\frac{1}{n}]}(x)}{x}.$$

Q1. Montrer que la suite $(\Lambda_{f_n})_{n\geq 1}$ converge, dans $\mathcal{D}'(I\!R)$, vers $\mathrm{Vp}(\frac{1}{x})$ lorsque n tend vers $+\infty$.

R1. S'inspirer de l'exercice précédent pour faire cette exercice.

Soient $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_c(I\!R)$ et $n \geq 1$. On a

$$< \Lambda_{f_n}, \varphi > = \int_{I\!R} f_n(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = \int_{|x|>\frac{1}{n}} \frac{\varphi(x)}{x}\mathrm{d}x$$

et la définition de $\mathrm{Vp}(\frac{1}{x})$ permet de conclure.

Q2. Pour $\varepsilon > 0$ et $x \in I\!R$, on pose

$$f_\varepsilon^+(x) = \frac{1}{x + i\varepsilon} \quad \text{et} \quad f_\varepsilon^-(x) = \frac{1}{x - i\varepsilon}.$$

Montrer que f_ε^+ et f_ε^- sont continues et bornées dans $I\!R$. Donc, localement intégrables.

R2. Comme pour tout $\varepsilon > 0$ et $x \in I\!R$, $x+i\varepsilon \neq 0$, $x-i\varepsilon \neq 0$ et que les fonctions $x \mapsto x+i\varepsilon$ et $x \mapsto x+i\varepsilon$ sont continues, f_ε^+ et f_ε^- sont continues dans $I\!R$, (c'est suffisant pour quelles soient localement intégrables). On peut donc leur associer des distributions régulières $\Lambda_{f_\varepsilon^+}$ et $\Lambda_{f_\varepsilon^-}$.

Q3. Soit $(\varepsilon_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels strictement positifs qui converge vers 0. Notons $T_n = \Lambda_{f_{\varepsilon_n}^+}$ et $S_n = \Lambda_{f_{\varepsilon_n}^-}$. Montrer que les suites $(T_n)_{n\geq 1}$ et $(S_n)_{n\geq 1}$ convergent vers des distributions que l'on déterminera.

R3. Montrons que $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \Lambda_{f_\varepsilon}$ existe dans $\mathcal{D}'$.
Soient $\varphi \in \mathcal{D}(I\!R)$ et $r > 0$ tels que supp$\varphi \subset [-r, r]$. Pour $\varepsilon > 0$ on a :

$$< \Lambda_{f_\varepsilon}, \varphi >= \int_{-r}^{r} \frac{\varphi(x)}{x+i\varepsilon}\mathrm{d}x = \int_{-r}^{r} x\frac{\varphi(x)}{x^2+\varepsilon^2}\mathrm{d}x - i\varepsilon \int_{-r}^{r} \frac{\varphi(x)}{x^2+\varepsilon^2}\mathrm{d}x.$$

Comme il existe ψ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que pour tout $x \in I\!R$, $\varphi(x) = \varphi(0) + x\psi(x)$, les égalités précédentes deviennent :

$$< \Lambda_{f_\varepsilon}, \varphi >= \varphi(0) \int_{-r}^{r} \frac{x}{x^2+\varepsilon^2}\mathrm{d}x + \int_{-r}^{r} \frac{x^2\psi(x)}{x^2+\varepsilon^2}\mathrm{d}x - i\varepsilon \int_{-r}^{r} \frac{\varphi(x)}{x^2+\varepsilon^2}\mathrm{d}x.$$

On a $\varphi(0) \displaystyle\int_{-r}^{r} \frac{x}{x^2+\varepsilon^2}\mathrm{d}x = 0$ car la fonction $x \mapsto \dfrac{x}{x^2+\varepsilon^2}$ est impaire,
l'application du théorème de convergence dominée montre que

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{-r}^{r} \frac{x^2\psi(x)}{x^2+\varepsilon^2}\mathrm{d}x = \int_{-r}^{r} \psi(x)\mathrm{d}x =< \mathrm{Vp}(\frac{1}{x}), \varphi >$$

et grâce au changement de variable $x \leftarrow z = \dfrac{x}{\varepsilon}$,

$$\varepsilon \int_{-r}^{r} \frac{\varphi(x)}{x^2+\varepsilon^2}\mathrm{d}x = \int_{-\frac{r}{\varepsilon}}^{\frac{r}{\varepsilon}} \frac{\varphi(\varepsilon z)}{z^2+1}\mathrm{d}z$$

qui donne, en faisant tendre ε vers 0,

$$i\varepsilon \int_{-r}^{r} \frac{\varphi(x)}{x^2+\varepsilon^2}\mathrm{d}x \to i\varphi(0) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}z}{z^2+1} = \pi\varphi(0).$$

Il en résulte que lorsque ε tend vers 0^+,

$$\Lambda_{f_\varepsilon^+} \to \mathrm{Vp}(\frac{1}{x}) - i\pi\delta.$$

De la même manière, on montre que, lorsque ε tend vers 0^+,

$$\Lambda_{f_\varepsilon^-} \to \mathrm{Vp}(\frac{1}{x}) + i\pi\delta.$$

Exercice 3. On désigne par Log la fonction définie sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ par

$$\mathrm{Log}(z) = \ln(|z|) + i \arg(z), \text{où } 0 < \arg(z) < \pi.$$

Q1. Montrer que pour tout $y > 0$, la fonction $x \mapsto \mathrm{Log}(x + iy)$ est localement intégrable.

R1. Par définition et pour tout $y > 0$, la fonction $x \mapsto \mathrm{Log}(x+iy)$ est la somme des fonctions $x \mapsto \ln(|x|)$ qui est localement intégrable dans $\mathbb{R}$ et $x \mapsto \arg(x + iy)$ qui est continue, donc localemant intégrable, où

$$\arg(x+iy) = \begin{cases} \arctan(y/x) & \text{si} \quad x > 0 \\ \pi - \arctan(y/|x|) & \text{si} \quad x < 0. \end{cases}$$

Donc, pour tout $y > 0$, $x \mapsto \mathrm{Log}(x + iy)$ est localement intégrable dans $\mathbb{R}$.

Q2. En considérant y dans $z = x + iy$ comme un paramètre, montrer que

$$\lim_{y\to 0^+} \mathrm{Log}z = \Lambda_{\ell n} + i\pi\Lambda_{\hat{H}} \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \tag{1}$$

où H est la fonction de Heaviside et $\hat{f}(x) = -f(-x)$ pour une fonction réelle de la variable réelle.

R2. Notons T_y la distribution régulière associée à la fonction localement intégrable $x \mapsto \mathrm{Log}(x + iy)$. On a pour tout $y > 0$ et $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} < T_y, \varphi >= &\ \textstyle\int_{\mathbb{R}}(\ln(|x|) + i \arg(x + iy))\varphi(x)\mathrm{d}x \\ = &\ < \Lambda_{\ell n}, \varphi > +i \textstyle\int_{\mathbb{R}} \arg(x + iy))\varphi(x)\mathrm{d}x. \end{aligned}.$$

Or

$$\begin{aligned} \textstyle\int_{\mathbb{R}} \arg(x+iy)\varphi(x)\mathrm{d}x = &\ \textstyle\int_0^{+\infty} \arctan(y/x)\varphi(x)\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^0 (\pi + \arctan(y/x))\varphi(x)\mathrm{d}x \\ = &\ \textstyle\int_{\mathbb{R}} \arctan(y/x)\varphi(x)\mathrm{d}x + \pi \int_{-\infty}^0 \varphi(x)\mathrm{d}x \end{aligned}.$$

Remarquons maintenant que l'on a : pour tout $x \neq 0$

$$|\arctan(y/x)\varphi(x)| \leq \frac{\pi}{2}|\varphi(x)|$$

et

$$\lim_{y\to 0^+} \arctan(y/x)\varphi(x) = 0.$$

Le théorème de la convergence dominée implique alors que l'on pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\lim_{y\to 0^+} < T_y, \varphi >= \int_{\mathbb{R}} \ln(|x|)\varphi(x)\mathrm{d}x + i\pi \int_{-\infty}^0 \varphi(x)\mathrm{d}x.$$

Donc,

$$\lim_{y\to 0^+} T_y = \Lambda_{\ell n} + i\pi(\Lambda_1 - \Lambda_H) \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

Q.3 En calculant la dérivée du membre de droite de l'égalité (1), montrer que l'on a :

$$\frac{1}{x + i0} = \lim_{y\to 0^+} \frac{1}{x + iy} = \mathrm{Vp}(\frac{1}{x}) - i\delta.$$