Université Moulay Ismail
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année universitaire 2019-2020
SMA Semestre VI
Distributions

Série d'exercices N^0 1

Exercice 1.

1. Rappeler la formule de Taylor avec reste intégral.
2. Montrer que pour tout $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(I\!R)$ vérifiant $\varphi(0) = 0$ il existe $\psi \in \mathcal{C}^\infty(I\!R)$ telle que $\varphi(x) = x\psi(x)$ pour tout $x \in I\!R$.

Exercice 2. On considère la fonction ρ définie par :

$$\rho(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t}} & \text{si } t > 0, \\ 0 & \text{si } t \leq 0. \end{cases}$$

1. Montrer que $\rho \in \mathcal{C}^\infty(I\!R)$.
2. Montrer qu'il existe $\rho_1 \in \mathcal{C}_c^\infty(I\!R)$ telle que $\text{supp}\rho_1 = [-1, 1]$.
3. Montrer qu'il existe une fonction croissante $\theta \in \mathcal{C}^\infty(I\!R)$ telle que :

$$\theta(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 0, \\ 0 & \text{si } t \leq 0. \end{cases}$$

4. Soient $a, b, c, d \in I\!R$ vérifiant $a < c < d < b$. Montrer qu'il existe $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(I\!R)$ telle que
   (a) $\psi(t) = 1$ pour tout $t \in]c, d[$,
   (b) $\text{supp}(\psi) \subset]a, b[$,
   (c) $0 \leq \psi(t) \leq 1$ pour tout $t \in I\!R$.

Exercice 3. Soient $f, g \in L^1(I\!R)$. Le produit de convolution de f et g est défini pour presque tout $x \in I\!R$ par :

$$(f * g)(x) = \int_{I\!R} f(x - y)g(y)dy.$$

1. Montrer que la fonction ainsi définie est dans $L^1(I\!R)$.
2. Supposons que $g \in \mathcal{C}_c^\infty(I\!R)$. Montrer que $f * g \in \mathcal{C}^\infty(I\!R)$ et que si f est continue alors

$$\text{supp}(f * g) \subset \text{supp}(f) + \text{supp}(g).$$

3. On suppose que $f \in L^1(I\!R)$ et que $g \in L^p(I\!R)$, où $1 \leq p \leq +\infty$. Montrer que $f*g \in L^P(I\!R)$ et que l'on a :

$$\|f * g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^p}.$$

Exercice 4. Soit $f \in L^1_{loc}(I\!R)$. Montrer que si pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(I\!R)$,

$$\int_{I\!R} f(t)\varphi(t)dt = 0,$$

alors $f = 0$.