Université Moulay Ismail
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année universitaire 2019-2020
SMA Semestre VI
Distributions

Série d'exercices N^0 2

Exercice 1.

1. Montrer que l'application qui à φ fait correspondre $T(\varphi) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx$ est bien définie sur $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. On notera $\mathrm{Vp}(\frac{1}{x})$ cette distribution que l'on appellera valeur principale de $\frac{1}{x}$.
3. Montrer que la fonction $x \mapsto \ln|x|$ est dans $\mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R})$. On notera $\Lambda_{\ell n}$ la distribution associée.
4. Montrer que la dérivée (au sens des distributions) de Λ_{ln} est la distribution $\mathrm{Vp}(\frac{1}{x})$.
5. Retrouver 2. en utilisant 4.
6. Trouver l'ordre de $\mathrm{Vp}(\frac{1}{x})$ et ainsi que celui de Λ_{ln}.

Exercice 2. On considère pour tout $n \geq 1$ la fonction localement intégrable dans $\mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ par

$$f_n(x) = \frac{\chi_{]-\infty,-\frac{1}{n}]}(x) + \chi_{[\frac{1}{n},+\infty[}(x)}{x},$$

où χ_I désigne l'indicatrice du sous-ensemble I de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que la suite $(\Lambda_{f_n})_{n\geq 1}$ converge, dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, vers $\mathrm{Vp}\frac{1}{x}$ lorsque n tend vers $+\infty$.
2. Pour $\varepsilon > 0$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$f_\varepsilon^+(x) = \frac{1}{x + i\varepsilon} \quad \text{et} \quad f_\varepsilon^-(x) = \frac{1}{x - i\varepsilon}.$$

   Montrer que f_ε^+ et f_ε^- sont continues et bornées dans $\mathbb{R}$. Donc, localement intégrables.
3. Soit $(\varepsilon_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels strictement positifs qui converge vers 0. Notons $T_n = \Lambda_{f^+_{\varepsilon_n}}$ et $S_n = \Lambda_{f^-_{\varepsilon_n}}$. Montrer que les suites $(T_n)_{n\geq 1}$ et $(S_n)_{n\geq 1}$ convergent vers des distributions que l'on déterminera.

Exercice 3. On désigne par Log la fonction définie sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ par

$$\mathrm{Log}(z) = \ln(|z|) + i\arg(z), \text{où } 0 < \arg(z) < \pi.$$

1. Montrer que pour tout $y > 0$, la fonction $x \mapsto \mathrm{Log}(x + iy)$ est localement intégrable.
2. En considérant y dans $z = x + iy$ comme un paramètre, montrer que

$$\lim_{y\to 0^+} \mathrm{Log} z = \Lambda_{\ell n} + i\pi\Lambda_{\hat{H}} \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \tag{1}$$

   où H est la fonction de Heaviside et $\hat{f}(x) = -f(-x)$ pour une fonction réelle de la variable réelle.

3. En calculant la dérivée du membre de droite de l'égalité (1), montrer que l'on a :

$$\frac{1}{x+i0} = \lim_{y \to 0^+} \frac{1}{x+iy} = \mathrm{Vp}(\frac{1}{x}) - i\delta.$$

Exercice 4. Soit f une fonction réelle de la variable réelle de classe $\mathcal{C}^n$. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u(x) = |x| f(x)$.

Justifier le fait que l'on peut associer à u une distribution régulière Λ_u et calculer la dérivée n^{ieme} de cette distribution.