

Courbure des courbes et des surfaces

AZIZ EL KACIMI

Cité des Géométries - Gare numérique de Jeumont

Groupe de travail

Mathématiques de la route !



Les grands plaisirs de la route !

1. Courbes

Dans tout ce texte J désigne un intervalle ouvert de la droite réelle \mathbb{R} et \mathbb{E} l'espace vectoriel \mathbb{R}^3 muni de son produit scalaire usuel :

$$\langle u, u' \rangle = xx' + yy' + zz'$$

où $u = (x, y, z)$ et $u' = (x', y', z')$.

1.1. Définition

Une **courbe paramétrée** de \mathbb{E} est une application de classe C^∞ :

$$\gamma : t \in J \longmapsto (x(t), y(t), z(t)) \in \mathbb{E}.$$

On dira que la paramétrisation γ est **régulière** si $\gamma'(t) \neq 0$ pour tout $t \in J$; dans ce cas la courbe est dite **régulière**.

Exemples

1) **Une droite** $\gamma : t \in \mathbb{R} \mapsto ta + b \in \mathbb{E}$ où $a, b \in \mathbb{E}$ avec $a \neq 0$.

2) La même droite mais avec une représentation différente :

$$\gamma(\theta) = (\operatorname{tg}\theta)a + b$$

toujours avec $a \neq 0$.

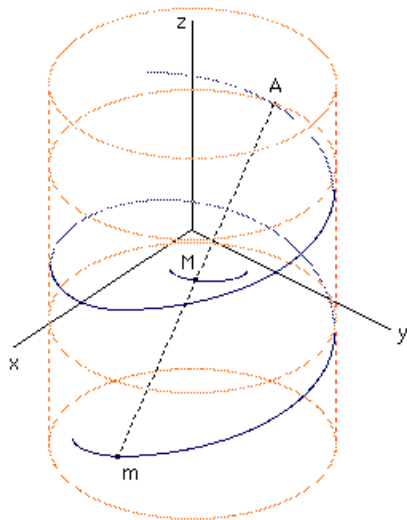
3) Un **cercle** de rayon R dans le plan horizontal $z = 0$:

$$\gamma : t \in \mathbb{R} \mapsto R(\cos t, \sin t, 0) \in \mathbb{E}.$$

4) Une **hélice circulaire** de rayon R :

$$\gamma : t \in \mathbb{R} \mapsto R(\cos t, \sin t, \alpha t) \in \mathbb{E}$$

avec $\alpha \in \mathbb{R}$.



Géométriquement, on s'intéresse à l'image de l'application $\gamma : J \longrightarrow \mathbb{R}$ et non à la paramétrisation qui n'est jamais unique. Mais cette non unicité nous donne en fait la liberté de choisir une paramétrisation qui puisse convenir à l'étude d'un problème particulier. Si $J_0 \xrightarrow{f} J$ est un difféomorphisme on a :

$$\frac{d}{dt}\gamma(f(t)) = f'(t)\gamma'(f(t)).$$

Donc $\gamma : J \longrightarrow \mathbb{E}$ est régulière si, et seulement si, $\gamma \circ f : J_0 \longrightarrow \mathbb{E}$ l'est ! On dira que f est un *changement de paramétrisation*.

1.2. Définition

Soient $\gamma : J \longrightarrow \mathbb{E}$ une courbe paramétrée et $t_0 \in J$. Alors la *longueur de l'arc* de γ à partir de t_0 est le nombre :

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\gamma'(u)| du.$$

On peut noter que si $f : v \in J_0 \longrightarrow u = f(v) \in J$ est un difféomorphisme qui préserve l'orientation (c'est-à-dire qui vérifie $f'(v) > 0$ pour tout $v \in J_0$) alors :

$$|\gamma'(u)| du = |\gamma'(f(v))| f'(v) dv = \left| \frac{d}{dt} \gamma(f(v)) \right|$$

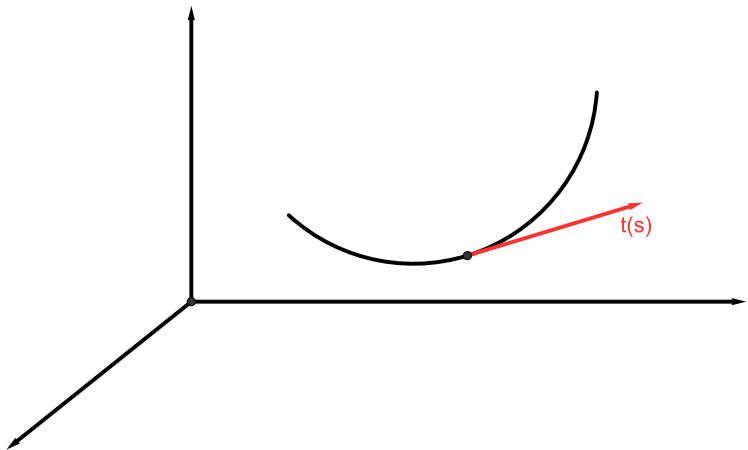
et donc l'intégrale dans la définition 1.2 ne dépend pas du choix de la paramétrisation. On peut aussi noter que la longueur de l'arc $s(t)$ est elle-même une paramétrisation régulière puisque :

$$\frac{ds}{dt} = |\gamma'(t)| \neq 0.$$

Si $\gamma : J \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est une courbe paramétrée par la longueur de l'arc :

$$\mathbf{t}(s) = \frac{d\gamma}{ds}$$

est le **vecteur unitaire tangent** à la courbe γ .



2. Courbure d'une courbe

*Les courbes que nous considérerons
par la suite seront paramétrées
par la longueur de l'arc !*

Soit $\gamma : J \longrightarrow \mathbb{E}$ une courbe. Comme on a supposé qu'elle est paramétrée par la longueur de l'arc, la norme du vecteur \mathbf{t} reste constamment égale à 1. Ce qui pourrait éventuellement changer, c'est sa "direction", ce qui va en fait "mesurer l'écart" entre la courbe γ et le fait qu'elle soit un morceau de droite !

2.1. Définition

On appelle *courbure* de γ au point $\gamma(s)$ le nombre :

$$\kappa(s) = |\mathbf{t}'(s)|.$$

2.2. Exemples

1 - Soit $\gamma : s \in \mathbb{R} \mapsto sa + b \in \mathbb{R}$ la paramétrisation (par la longueur de l'arc) d'une droite. Alors on a forcément $\mathbf{t} = a$ (tous deux de norme 1). Par suite :

$$\kappa(s) = \mathbf{t}' = 0.$$

2 - Soit $\gamma : s \in \mathbb{R} \mapsto R \left(\cos \frac{s}{R}, \sin \frac{s}{R}, 0 \right) \in \mathbb{R}^2$ un cercle dans le plan (x, y) . On a $\mathbf{t}(s) = \left(-\sin \frac{s}{R}, \cos \frac{s}{R}, 0 \right)$ (c'est bien de norme 1) et par suite :

$$\kappa(s) = |\mathbf{t}'(s)| = \left| \frac{1}{R} \left(-\cos \frac{s}{R}, -\sin \frac{s}{R}, 0 \right) \right| = \frac{1}{R}.$$

Ce qui correspond à l'idée intuitive que l'on a de la courbure d'un cercle : plus le rayon est petit plus la courbure est grande et plus le virage est difficile à prendre !

3 - Faisons le calcul pour l'hélice circulaire de rayon R paramétrée par (la longueur de l'arc) :

$$\gamma(s) = R \left(\cos \left(\frac{s}{\sqrt{R^2 + \alpha^2}} \right), \sin \left(\frac{s}{\sqrt{R^2 + \alpha^2}} \right), \frac{\alpha s}{\sqrt{R^2 + \alpha^2}} \right).$$

avec $\alpha \in \mathbb{R}$. On a :

$$\mathbf{t}(s) = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \alpha^2}} \left(-\sin \left(\frac{s}{\sqrt{R^2 + \alpha^2}} \right), \cos \left(\frac{s}{\sqrt{R^2 + \alpha^2}} \right), \alpha \right)$$

et par suite :

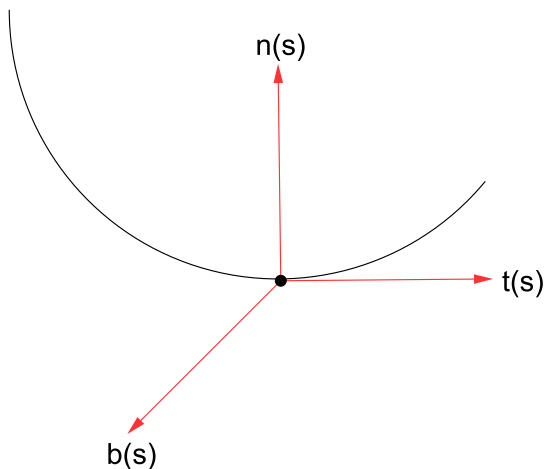
$$\kappa(s) = |\mathbf{t}'(s)| = \frac{R}{R^2 + \alpha^2}.$$

2.3. Repère de Serret-Frenet

Soit $\gamma : J \longrightarrow \mathbb{E}$ une courbe. En dérivant $|\mathbf{t}(s)|^2 = |\gamma'(s)|^2 = 1$ on obtient $\mathbf{t}'(s) \cdot \mathbf{t}(s) = 0$; le vecteur \mathbf{t}' est donc orthogonal à $\mathbf{t}(s)$. Si $\kappa(s) \neq 0$, on a un vecteur bien défini $\mathbf{n}(s)$ tel que $\mathbf{t}'(s) = \kappa(s)\mathbf{n}(s)$; c'est le *vecteur unitaire normal* à la courbe au point $\gamma(s)$. Le *vecteur unitaire binormal* est défini par :

$$\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \wedge \mathbf{n}(s).$$

Le triplet $(\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s))$ est un repère orthonormé direct (d'origine le point $\gamma(s)$) appelé *repère de Serret-Frenet* de la courbe au point $\gamma(s)$.



Les vecteurs $t(s)$ et $n(s)$ engendrent le plan osculateur
et $n(s)$ et $b(s)$ le plan normal à la courbe

2.4. La torsion d'une courbe

En dérivant $\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \wedge \mathbf{n}(s)$ membre à membre on obtient :

$$\mathbf{b}'(s) = \mathbf{t}'(s) \wedge \mathbf{n}(s) + \mathbf{t}(s) \wedge \mathbf{n}'(s) = \mathbf{t}(s) \wedge \mathbf{n}'(s).$$

Donc $\mathbf{b}'(s)$ est orthogonal à $\mathbf{t}(s)$; comme il est aussi orthogonal à $\mathbf{b}(s)$, il est colinéaire à $\mathbf{n}(s)$. Il existe donc $\tau(s) \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\mathbf{b}'(s) = -\tau(s)\mathbf{n}(s).$$

Le nombre $\tau(s)$ est appelé *torsion* de γ au point $\gamma(s)$.

On vérifie facilement que :

$$\frac{d}{ds} \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}$$

3. Le théorème fondamental

Avant de l'énoncer voyons d'abord ce que peut être la meilleure signification de la courbure et la torsion d'une courbe.

3.1. Proposition

Soit $\gamma : J \longrightarrow \mathbb{E}$ une courbe de courbure κ et de torsion τ . Alors :

- $\kappa \equiv 0$ si, et seulement si, la courbe est un *morceau de droite*.
- $\tau \equiv 0$ si, et seulement si, la courbe est *contenue dans un plan*.

Peut-on trouver une courbe $\gamma : J \longrightarrow \mathbb{E}$ à courbure et torsion prescrites ? Oui, la réponse est donnée par le :

3.2. Théorème

Soient $s \in J \mapsto \kappa(s) \in \mathbb{R}_+^$ et $s \in J \mapsto \tau(s) \in \mathbb{R}$ deux fonctions différentiables. Alors il existe une courbe $\gamma : J \rightarrow \mathbb{E}$ paramétrée par la longueur de l'arc ayant κ comme courbure et τ comme torsion. Si $\sigma : J \rightarrow \mathbb{E}$ est une autre courbe répondant à la question, il existe une isométrie affine positive $D : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ telle que $\sigma = D \circ \gamma$.*

3.3. Exemple

On sait d'après le théorème 3.2 que la torsion d'une courbe contenue dans un plan est nulle. Nous laisserons donc de côté ce type de courbe.

La torsion de l'hélice :

$$\gamma(s) = R \left(\cos \left(\frac{s}{\sqrt{R^2 + \alpha^2}} \right), \sin \left(\frac{s}{\sqrt{R^2 + \alpha^2}} \right), \frac{\alpha s}{\sqrt{R^2 + \alpha^2}} \right)$$

se calcule assez facilement. Elle est constante et donnée par la formule :

$$\tau = \frac{\alpha}{R^2 + \alpha^2}.$$

L'interprétation de son signe qu'on peut donner est la suivante. Supposons qu'on marche sur cette hélice en tournant dans le sens trigonométrique. Alors :

- Si $\tau > 0$ (i.e. $\alpha > 0$) on monte.
- Si $\tau < 0$ (i.e. $\alpha < 0$) on descend.

4. Surfaces

Soit U un ouvert de \mathbb{R}^2 . Les coordonnées d'un point de U seront notées (u, v) ; $(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v})$ sera la “base canonique” du module $\mathfrak{X}(U)$ des champs de vecteurs sur U .

4.1. Définition

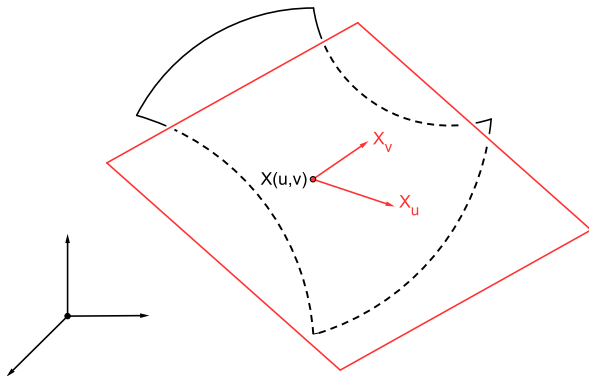
Une partie S de \mathbb{E} est une **surface régulière** si, pour tout point $p \in S$, il existe un voisinage V de p dans \mathbb{E} et un homéomorphisme de classe C^∞ :

$\mathbf{X} : (u, v) \in U \longrightarrow (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \in V \cap S$ de différentielle $d_{(u,v)}\mathbf{X}$ injective pour tout $(u, v) \in U$ i.e. la matrice :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}$$

est de rang 2.

Les images des champs de vecteurs $\frac{\partial}{\partial u}$ et $\frac{\partial}{\partial v}$ par la différentielle $d_{(u,v)}\mathbf{X}$ sont des champs tangents à S au point $p = \mathbf{X}(u, v)$ notés \mathbf{X}_u et \mathbf{X}_v ; ils engendrent (sur \mathbb{R}) un plan vectoriel noté $T_p S$ et appelé *plan tangent* à S au point p .



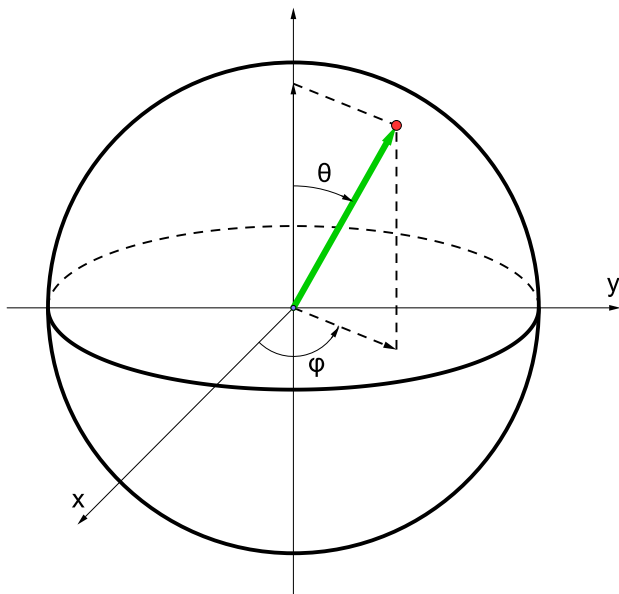
4.2. Exemples

i) La *sphère* \mathbb{S}^2 admet comme paramétrisation (locale) :

$\mathbf{X} : (\varphi, \theta) \in]0, 2\pi[\times]0, \pi[\mapsto (x(\varphi, \theta), y(\varphi, \theta), z(\varphi, \theta)) \in \mathbb{E}$ avec :

$$\begin{cases} x(\varphi, \theta) = \cos \varphi \sin \theta \\ y(\varphi, \theta) = \sin \varphi \sin \theta \\ z(\varphi, \theta) = \cos \theta \end{cases}$$

Un calcul facile montre que \mathbf{X} est une représentation régulière de \mathbb{S}^2 privée du demi-cercle intersection de la sphère avec le demi-plan fermé défini par $y = 0$ et $x \geq 0$.



ii) Le **tore** \mathbb{T}^2 admet comme paramétrisation (locale) :

$\mathbf{X} : (\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x(\varphi, \theta), y(\varphi, \theta), z(\varphi, \theta)) \in \mathbb{E}$ avec :

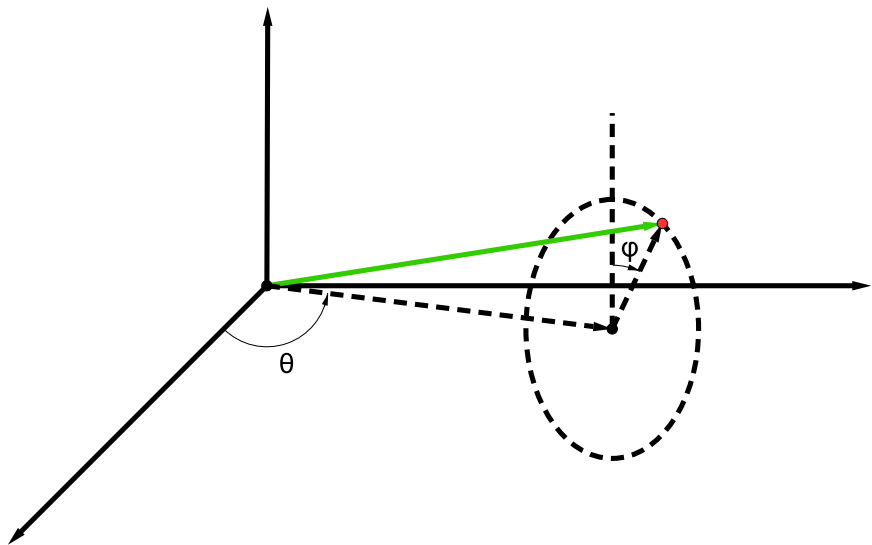
$$\begin{cases} x(\varphi, \theta) = (b + a \sin \varphi) \cos \theta \\ y(\varphi, \theta) = (b + a \sin \varphi) \sin \theta \\ z(\varphi, \theta) = a \cos \varphi \end{cases}$$

On vérifie facilement que les images \mathbf{X}_θ et \mathbf{X}_φ respectivement des champs $\frac{\partial}{\partial \theta}$ et $\frac{\partial}{\partial \varphi}$ par la différentielle $d_{(\theta, \varphi)} \mathbf{X}$ sont :

$$\begin{cases} \mathbf{X}_\theta = (-(b + a \sin \varphi) \sin \theta, (b + a \sin \varphi) \cos \theta, 0) \\ \mathbf{X}_\varphi = (a \cos \varphi \cos \theta, a \cos \varphi \sin \theta, -a \sin \varphi) \end{cases}$$

et que leur produit vectoriel $\mathbf{X}_\theta \wedge \mathbf{X}_\varphi$ est tel que

$|\mathbf{X}_\theta \wedge \mathbf{X}_\varphi| = a(b + a \sin \varphi) \neq 0$ pour tout (θ, φ) . Donc \mathbf{X} est régulière.



5. Courbures des surfaces

5.1. Application de Gauss

Soit $\mathbf{X} : U \longrightarrow S$ une paramétrisation régulière au voisinage d'un point $p = \mathbf{X}(u, v)$ d'une surface orientable S dans \mathbb{E} . Les deux vecteurs tangents \mathbf{X}_u et \mathbf{X}_v sont linéairement indépendants. Par suite leur produit vectoriel $\mathbf{X}_u \wedge \mathbf{X}_v$ est non nul et on peut donc définir le *vecteur normal unitaire* :

$$N(p) = \frac{\mathbf{X}_u \wedge \mathbf{X}_v}{|\mathbf{X}_u \wedge \mathbf{X}_v|}.$$

En procédant ainsi au voisinage de chaque point de S , on définit une application :

$$N : p \in S \longmapsto N(p) \in \mathbb{S}^2$$

où \mathbb{S}^2 est la sphère unité de \mathbb{E} . Elle est appelée *application de Gauss* de S .

On montre qu'elle est de classe C^∞ . Sa différentielle $d_p N$ est une application linéaire de $T_p S$ dans $T_{N(p)} \mathbb{S}^2$; comme ces deux espaces sont parallèles, $d_p N$ peut être interprétée comme un endomorphisme de l'espace vectoriel $T_p S$.

5.2. Seconde forme fondamentale

On munit l'espace vectoriel $T_p S$ du produit scalaire induit par celui de \mathbb{E} qu'on notera $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$. La collection $\{\langle \cdot, \cdot \rangle_p\}_{p \in S}$ varie de façon différentiable en fonction de p ; c'est précisément ce qu'on appelle la *métrique riemannienne* induite sur S . On montre alors que, pour tout $p \in S$, l'endomorphisme $d_p N$ est *auto-adjoint* i.e. vérifie $\langle d_p N(\eta), \varepsilon \rangle_p = \langle \eta, d_p N(\varepsilon) \rangle_p$ pour tous vecteurs $\eta, \varepsilon \in T_p S$.

Comme l'endomorphisme $d_p N$ est auto-adjoint, il permet alors de définir une **forme quadratique** sur $T_p S$:

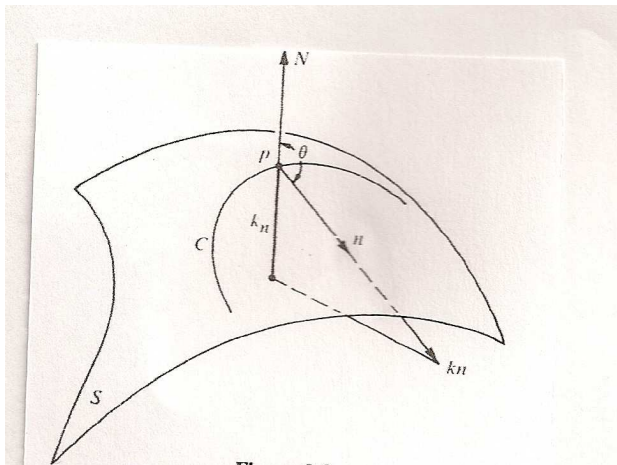
$$\Phi_p(\eta) = -\langle d_p N(\eta), \eta \rangle_p$$

qu'on appelle **seconde forme fondamentale** de la surface S .

5.3. Courbure normale

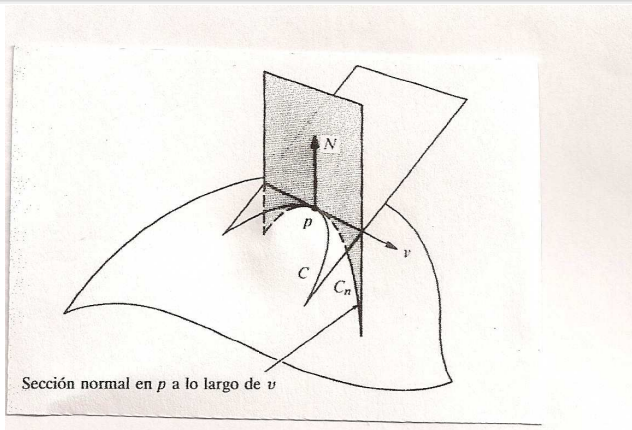
Soient maintenant $\gamma : J \longrightarrow S$ une courbe paramétrée par la longueur de l'arc (J étant un intervalle de \mathbb{R} contenant l'origine) et $p = \gamma(0)$. Notons n et N les vecteurs normaux en p respectivement à la courbe γ et à la surface S , θ l'angle (n, N) et κ la courbure de γ au point p . Le nombre $k_n = \kappa \cos \theta$ est appelée **courbure normale** de γ en p . On montre en fait que :

$$\Phi_p(\gamma'(0)) = k_p.$$



5.4. Théorème de Meusnier

Toutes les courbes tracées sur S et ayant la même droite tangente en $p \in S$ ont la même courbure normale k_n en ce point.



5.5. Les courbures d'une surface

Comme la différentielle $d_p N$ de l'application de Gauss est auto-adjointe, il existe une base orthonormée (e_1, e_2) de $T_p S$ telle que $d_p N(e_1) = -k_1 e_1$ et $d_p N(e_2) = -k_2 e_2$. En plus les nombres k_1 et k_2 (on suppose $k_1 \geq k_2$) sont respectivement le **maximum** et le **minimum** de la seconde forme fondamentale restreinte au cercle unité de l'espace euclidien $T_p S$.

Définition.

La **courbure normale maximale** k_1 et la **courbure normale minimale** k_2 sont appelées ***courbures principales*** de S au point p . Les directions des vecteurs e_1 et e_2 sont appelées ***directions principales*** de S au point p .

Définition.

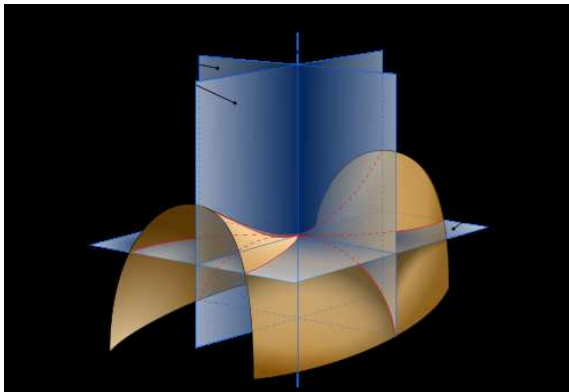
Le **déterminant** K_p de l'application $d_p N$ est appelé ***courbure de Gauss*** de S en p . La **moitié** H_p de la trace de $d_p N$ est appelée ***courbure moyenne*** de S en p . Ainsi on a :

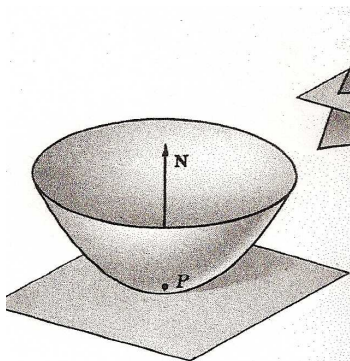
$$K_p = k_1 k_2 \quad \text{et} \quad H_p = \frac{k_1 + k_2}{2}.$$

Le point $p \in S$ est dit :

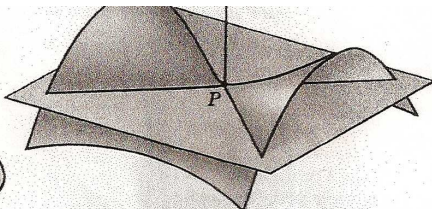
- 1 - ***elliptique*** si $K_p > 0$;
- 2 - ***hyperbolique*** si $K_p < 0$;
- 3 - ***parabolique*** si $K_p = 0$ avec $d_p N \neq 0$;
- 4 - ***plan*** si $d_p N = 0$.

On dira que la surface S est ***minimale*** si $H_p = 0$ pour tout $p \in S$.

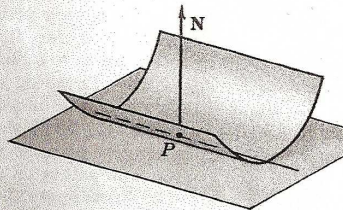




(a) $LN - M^2 > 0$



(b) $LN - M^2 < 0$

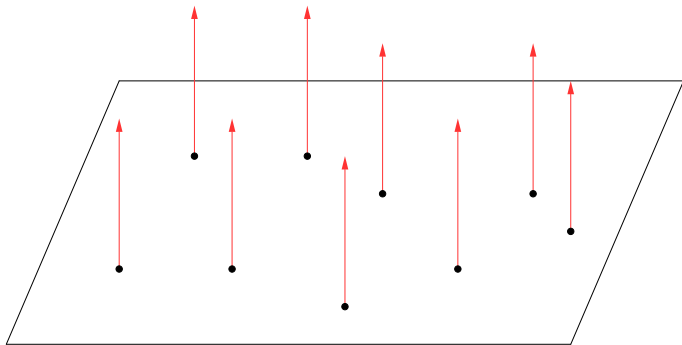


(c) $LN - M^2 = 0,$
 $L^2 + M^2 + N^2 \neq 0$

5.6. Exemples de calcul

i) - Courbure d'un plan

L'application de Gauss est **constante**, donc de dérivée nulle. Par suite la **courbure de Gauss** et la **courbure moyenne** sont **nulles** !



ii) - Courbure de la sphère \mathbb{S}^2

On rappelle que la sphère \mathbb{S}^2 est définie par l'équation :

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

et donc le champ de vecteurs normal est donné au point $p = (x, y, z)$ sur une courbe γ tracée sur \mathbb{S}^2 par $N(p) = (-x(t), -y(t), -z(t))$. Par suite $d_p N = (-x'(t), -y'(t), -z'(t))$. Ce qui donne :

$$d_p N(\eta) = -\eta$$

pour tout $\eta \in T_p \mathbb{S}^2$. Comme $T_p \mathbb{S}^2$ est de dimension 2, $K_p = 1$ pour tout point $p \in \mathbb{S}^2$.

iii) - Courbure du tore \mathbb{T}^2

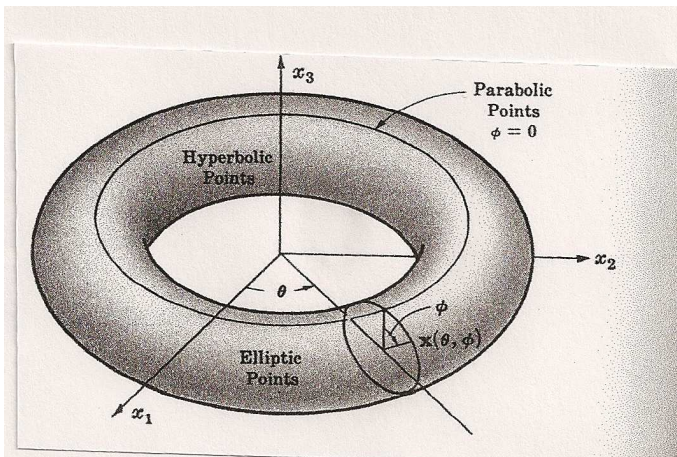
On reprend le paramétrage :

$$\begin{cases} x(\varphi, \theta) = (b + a \sin \varphi) \cos \theta \\ y(\varphi, \theta) = (b + a \sin \varphi) \sin \theta \\ z(\varphi, \theta) = a \cos \varphi \end{cases}$$

Le calcul donne :

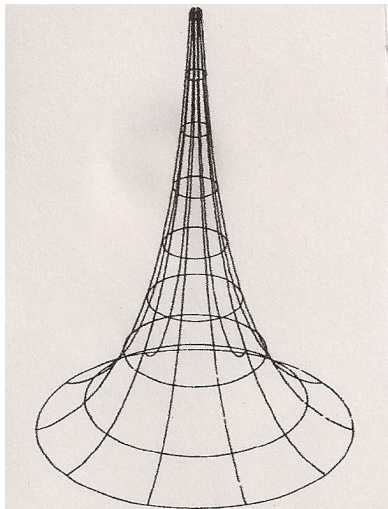
$$K_p = a(b + \sin \varphi) \sin \varphi.$$

On voit bien sur cette expression (et sur le dessin qui suit aussi) qu'il y a des points **elliptiques**, des points **hyperboliques** et des points **paraboliques**.



iv) - Courbure de la pseudosphère

$$K_p = -1.$$



Pour chacune de ces trois surfaces on a :

$$\int_S K(p) d\mu(p) = 0.$$

La courbure totale est nulle !



||



||

