جامعة مولاي إسماعيل
UNIVERSITÉ MOULAY ISMAÏL
كلية العلوم والتقنيات
FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES

Département : Sciences de l'ingénieur

Filière : Energies renouvelables

Option : Technologies solaire et éolienne (TSE)

Correction des travaux dirigés

Mécanique des fluides

Prof. AMRANI Abdel-illah

Année universitaire : 2025-2026

Travaux dirigés -Statique des fluides- Série :1

Notion de pression :

Exercice 1 :

Une porte fermée de 2 m^2 sépare 2 pièces. La pression dans l'une des 2 pièces vaut 0,01 atmosphère de moins que dans l'autre. Quelle est la force de pression résultante exercée sur la porte ?

Exercice 2 :

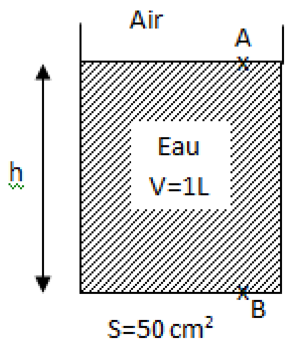
Sur une terrasse horizontale on dépose une couche de terre de 60 cm d'épaisseur. Sachant que la terre, supposée homogène, a une masse volumique ρ=1400 Kg/m^3, calculer la pression subie par la terrasse.

Pression dans un fluide incompressible au repos

Exercice 3 :

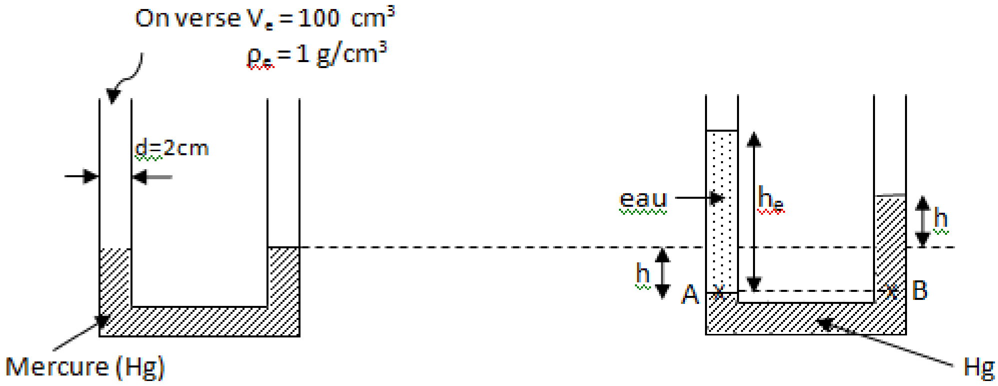
Un vase cylindrique, dont le fond plan et horizontal a une surface de 50 cm^2, contient un litre d'eau de masse volumique ρ = 1000Kg/m^3.

a) Calculer la différence de pression en un point du fond et un point de la surface libre.
b) Calculer la pression en un point du fond sachant que la pression atmosphérique au niveau de la surface libre vaut 1 atm.
c) On place sur la surface libre un piston de diamètre égal au diamètre intérieur du vase. En admettant qu'il puisse glisser sans frottement sur la paroi du vase, calculer la nouvelle valeur de la pression en un point du fond. On donne la masse du piston m = 2Kg.



Exercice 4 :

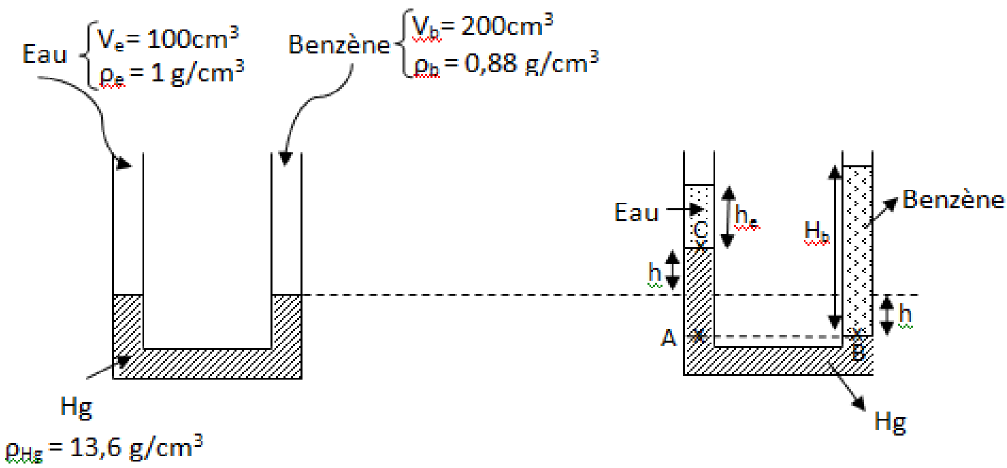
Dans l'une des branches d'un tube en U contenant du mercure on verse 100 cm^3 d'eau. Calculer le déplacement de la surface libre du mercure dans l'autre branche. On donne le diamètre interne du tube d = 2 cm et les masses volumiques du mercure : $\rho_m = 13,6$ g/cm^3 et de l'eau : $\rho_{eau} = 1$ g/cm^3.



Exercice 5 :

Dans un tube en U contenant du mercure on verse, à gauche 100 cm^3 d'eau et à droite 200 cm^3 de benzène.

a) Montrer que la surface de séparation eau-mercure est au-dessus de celle de benzène-mercure.
b) Calculer la distance des deux surfaces de séparation. On donne le diamètre interne du tube d = 2 cm et la masse volumique du mercure : $\rho_m = 13,6$ g/cm^3, du benzène $\rho_b = 0,88$ g/cm^3 et de l'eau $\rho_{eau} = 1$ g/cm^3.

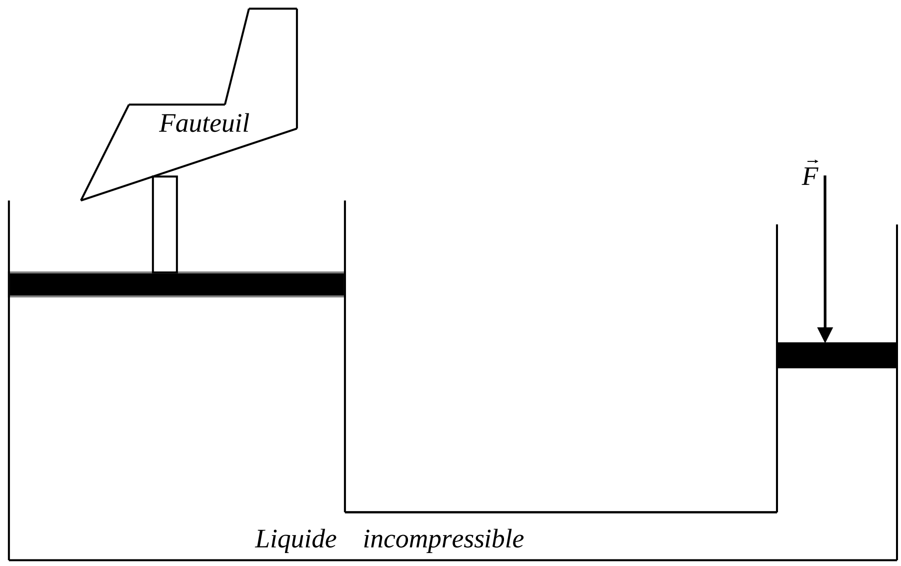


Exercice 6 : Principe de Pascal

Lorsque les pressions exercées sur les fluides sont importantes, l'effet de la pesanteur peut être négligé. Si le fluide est incompressible (ρ = constante), la pression exercée en un point du liquide se transmet intégralement en tout point de celui-ci. La pression est identique en tout point du fluide. Une application importante de ce principe est la presse hydraulique (ou vérin hydraulique).

Un vérin hydraulique, similaire à celui de la figure ci bas, a des pistons de section 1500 cm^2 pour le piston de gauche et 75 cm^2 pour le piston de droite. Il est employé pour soulever un fauteuil de dentiste pesant 150 Kg. On donne $g = 9{,}81 m/s^2$.

a) Quelle force faut-il exercer sur le piston de droite pour soulever le fauteuil ?
b) Quelle distance le petit piston doit-il parcourir pour que le fauteuil soit levé de 10cm ?



Exercice 7 : (Fluide compressible)

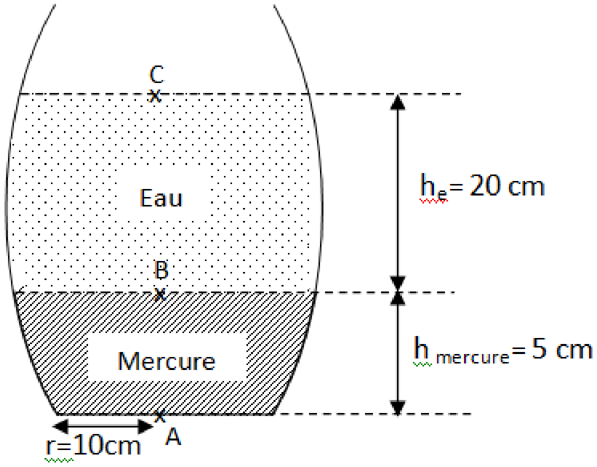
a) Déterminer la variation de pression de l'atmosphère terrestre en fonction de la hauteur z au dessus du niveau de la mer, en supposant que g demeure constante et que la masse volumique de l'air est proportionnelle à la pression (loi des gaz parfaits).
b) A quelle hauteur de l'air équivaut-elle à la moitié de sa valeur au niveau de la mer ?

On donne P_0 et ρ_0 , la pression et la masse volumique de l'air au niveau de la mer

Forces de pression exercées par un fluide sur une paroi solide

Exercice 8 :

Un vase de forme quelconque, dont le fond plan et horizontal est un cercle de rayon r = 10 cm, contient du mercure sur une hauteur de 5 cm et de l'eau sur une hauteur de 20 cm. Calculer l'intensité de la force de pression s'exerçant sur le fond. On donne la masse volumique du mercure : $\rho_m = 13{,}6\ g/cm^3$.



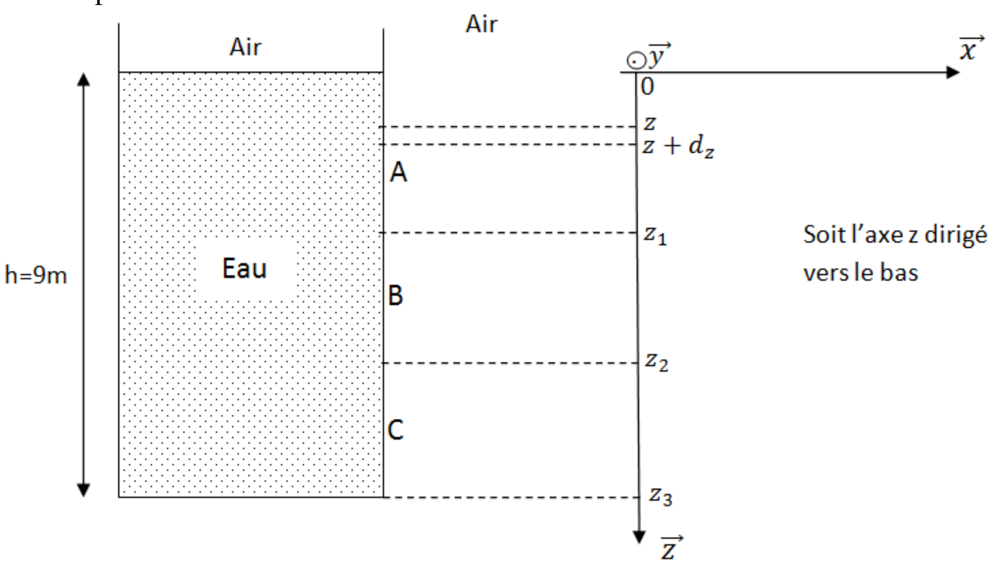
Exercice 9 :

Un bassin contenant de l'eau sur une profondeur h = 9 m est fermé par une porte verticale constituée par 3 panneaux plans superposés l'un au-dessus de l'autre.

a) Calculer la force de pression subie par chaque panneau. En déduire la force de pression totale exercée sur la porte.

b) Quelle doit être la hauteur de chaque panneau pour que chacun supporte le même effort ?

c) Chaque panneau doit être renforcé au centre de poussée. Calculer la position de ces renforts.



Exercice 10 :

On considère un solide demi cylindrique de rayon a et de longueur L. Ce solide se repose au fond d'un bassin contenant de l'eau au repos jusqu'à une profondeur H. L'eau est considérée incompressible de densité ρ (Voir figure 1).

a) Déterminer la force hydrostatique exercée par l'eau sur la surface externe du solide.

b) Vérifier que le module de cette force s'écrit sous la forme: $\left|\vec{F}\right| = \left|P_{Fond}.S_0 - \rho g V\right|$, où S_0 est l'aire de la surface de contact du solide avec le fond, V est le volume du solide et P_{Fond} la pression exercée par le fond sur le solide.

c) Considérons maintenant le même solide en équilibre et en suspension dans l'eau à la même profondeur H. (Voir figure 2)

Quelle est la force hydrostatique exercée par l'eau sur tout le contour du solide ? En déduire le principe d'Archimède.

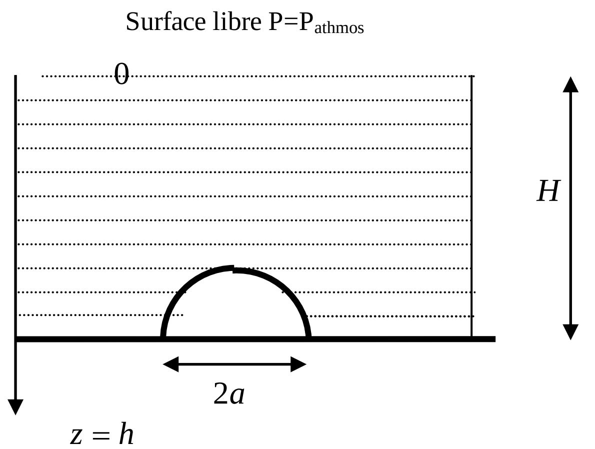


Figure 1

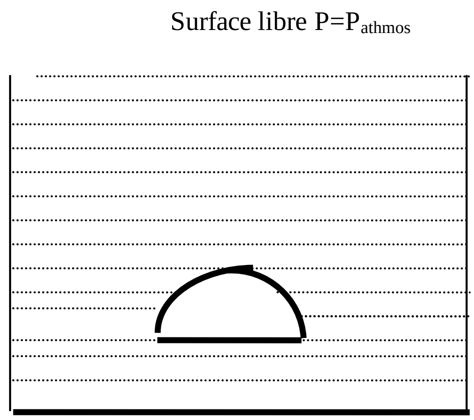


Figure 2

Poussée d'Archimède

Exercice 11 :

L'immersion complète d'un corps dans un liquide que contient une éprouvette cylindrique entraîne un déplacement de la surface libre du liquide de 4 cm. Sachant que le diamètre intérieur de l'éprouvette est de 4 cm et que la masse volumique du liquide est de 0,8 g/cm^3, on demande l'intensité de la poussée d'Archimède.

Exercice 12 :

Quelle est la fraction immergée d'un iceberg dans la mer ? Même question pour le liège dans du mercure.

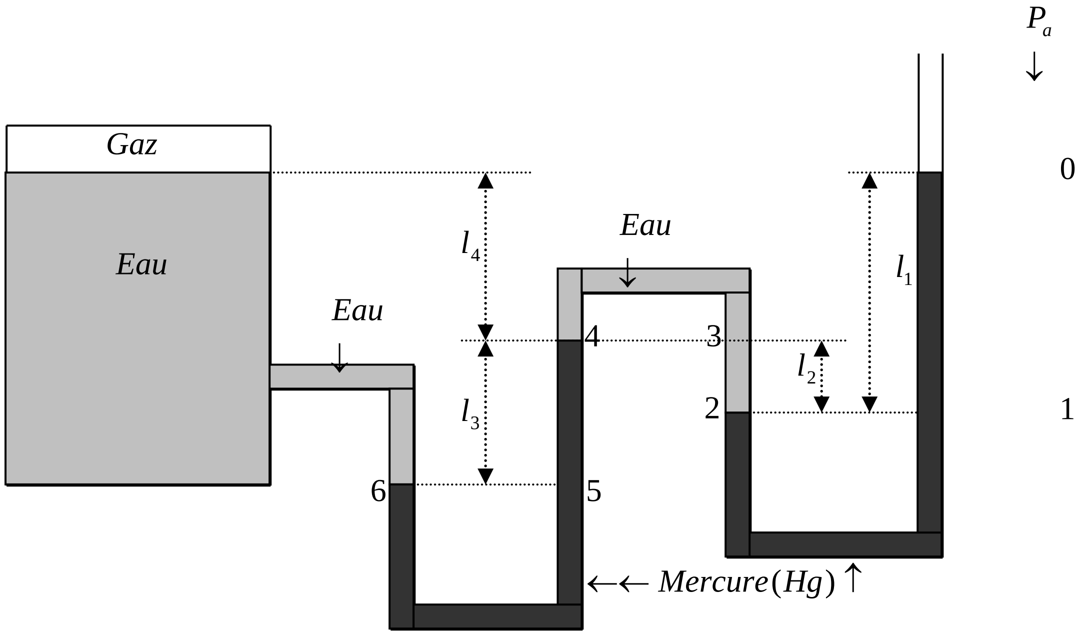
$\rho_{eau de mer} = 1025 Kg/m^3$, $\rho_{glace} = 920 Kg/m^3$, $\rho_{liège} = 250 Kg/m^3$ et $\rho_{mercure} = 13600 Kg/m^3$

Exercice 13 :

Un ballon, de volume 900 m^3, est gonflé avec de l'hélium ; le poids total du ballon (enveloppe et gaz) vaut 1800 N. Calculer la valeur de la force ascensionnelle ; Quelle masse peut-il soulever ? On donne $\rho_{air} = 1{,}3 Kg/m^3$ *et* $g = 10 m/s^2$.

Exercice 14 :

On considère un réservoir fermé contenant de l'eau jusqu'à une certaine hauteur. Le reste du volume est occupé par un gaz. De ce réservoir ont fait sortir un manomètre contenant de l'eau et du mercure. (Voir figure)

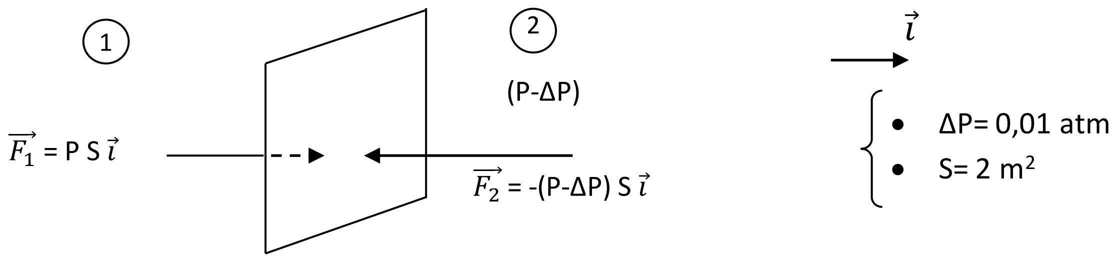


Calculer la pression dans l'interface liquide gaz du réservoir en fonction des données : P_a = 0,96 10^5 Pascal, l_1 = 0,70m, l_2 = 0,60m, l_3 = 0,80m, l_4 = 1m, ρ_{eau} = 9,81 10^3 (N/m^3) et ρ_{Hg} = 133,42 10^3 (N/m^3).

Correction des TD Statique des fluides

Série N°1

EX1 :

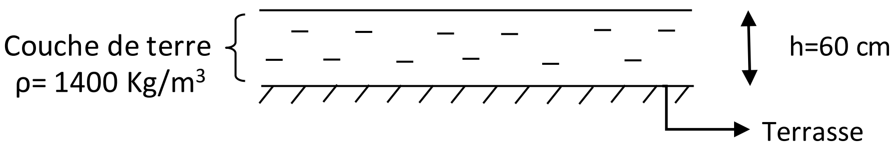


La force de pression résultante exercée sur la porte :

$\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2} = \Delta P.\ S.\ \vec{i}$

$|\vec{F}|$= 0,01 x 10^5 x 2 = 2000 Newton

EX2 :



La couche de la terre applique une pression P sur la terrasse égale à

P = $\frac{F}{S}$, F : force exercée par la couche de terre sur la terrasse

Dans notre cas F= m_t.g (poids de la couche de la terre)

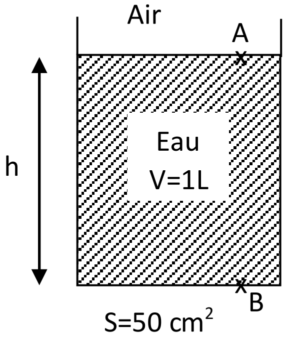
⇨ P = $\frac{m.g}{S}$ avec ρ = $\frac{m_t}{V}$ ⇨ m_t = ρ V et V=S x h

⇨ P = $\frac{\rho\, S\, h\, g}{S}$ ⇨ P = ρ g h

AN : P=1400 x 9,81 x 0,6= 8240,4 Pascal

EX3 :

a)



Soit A et B deux points du liquide :

- A sur la surface séparatrice liquide/air
- B un point au fond du vase

$\Rightarrow$ P(B) = P(A) + ρ g h

$\Delta P = P(B) - P(A) = \rho_e \, g \, h$

Cherchons h? V= S x h $\quad h = \frac{V}{S} = \frac{1 \,.10^{-3}}{50 \,.10^{-4}} = \frac{1}{5} = 0{,}2$ m

Avec $\rho_{eau} = 1000$ Kg/m^3= 1 Kg/L

Donc ΔP= 1962 Pa

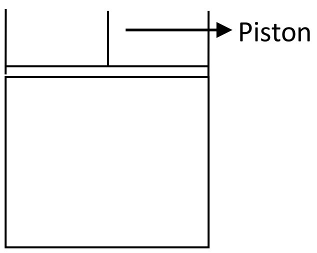
b) calcul de P(B)

P(B)= P(A) + ρ g h avec P(A)= 1atm=1,013. 10^5 Pa

$\Rightarrow$ P(B)= $1{,}013.10^5 + 10^3 \text{x } 9{,}81 \text{x } 0{,}2$

P(B)= $1{,}033.10^5$ Pa P(B) s'appelle pression absolue

c)



Avec le piston nous avons

$P' = \frac{mg}{S}$: pression dû au piston

$P' = \frac{2 \,.\, 9{,}81}{50.10^{-4}} = 3924$ Pa

Donc la nouvelle valeur de pression de (B) notée P '' (B)

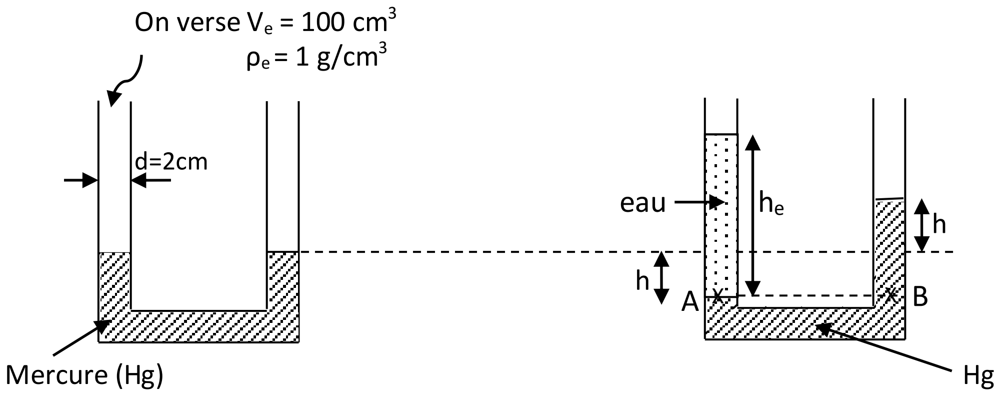
P '' (B) = P(B) + P'(B) = 1,033. 10^5 + 3924

P '' (B) = 1,072. 10^5 Pa

Ex4 :

Soient A et B deux points situés à la même profondeur et appartiennent au même fluide (Mercure).

Alors on peut écrire : P(A)= P(B)



ρ_{Hg} = 13,6 g/cm^3

Calculons h_e ? $h_e = \frac{V_{eau}}{S_{tube}}$ avec $S_{tube} = \frac{\pi\, d^2}{4}$

$\Rightarrow$ $h_e = 4.\frac{V_{eau}}{\pi\, d^2} = \frac{400}{3{,}14\ .4} \approx 31{,}84$ cm

On a A $\nearrow \in$ Hg, $\searrow \in$ eau et B $\in$ Hg Or A et B sont au même niveau $\Rightarrow$ P(A)=P(B)

P(B)= $P_{atm} + \rho_{Hg}\, g(2h)$

P(A)= $P_{atm} + \rho_{eau}\ g\ h_e$

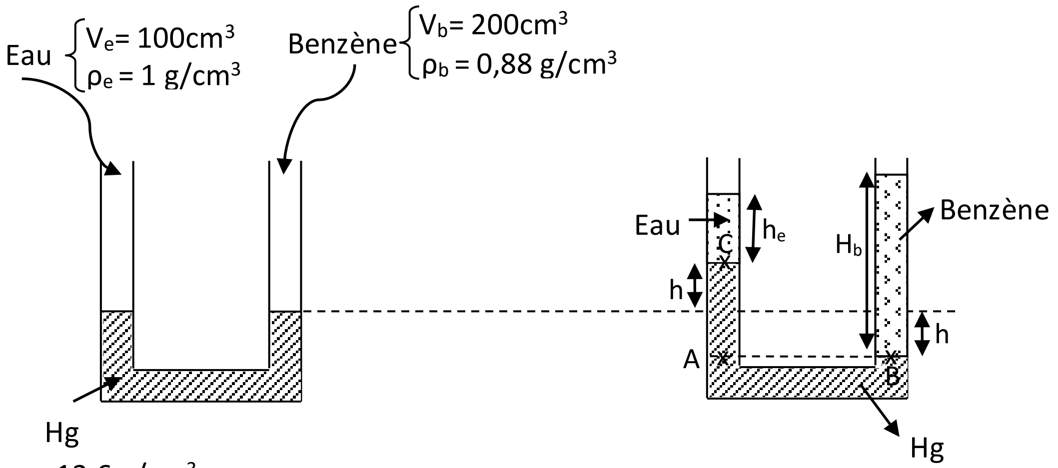
$\Rightarrow$

$$\boxed{P(A)=P(B) \Leftrightarrow P_{atm} + \rho_{eau}\ g\ h_e = P_{atm} + \rho_{Hg}\, g(2h) \Rightarrow h = \frac{1}{2}\frac{\rho_{eau}}{\rho_{Hg}} h_e}$$

AN: $h = \frac{1}{2}$ x $\frac{1}{13{,}6}$ x 31,84

$h \approx 1{,}17$ cm

EX5:



ρ_{Hg} = 13,6 g/cm^3

a) Montrons que la surface de séparation eau-Mercure est au dessus de celle de benzène-Mercure.

Pour cela on va comparer les poids du benzène et de l'eau

- ✓ poids du benzène $\rho_b V_b g = m_b g$
- ✓ poids de l'eau $\rho_e V_e g = m_e g$

Il suffit donc de comparer $\rho_b V_b$ et $\rho_e V_e$

$$\left.\begin{aligned} \rho_b V_b &= 0{,}88 \times 200 = 176\text{g} \\ \rho_e V_e &= 1 \times 100 = 100\text{g} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \boxed{\rho_b V_b > \rho_e V_e} \Longrightarrow$$ Le Mercure monte à gauche (au voisinage de l'eau)

b) h ?

Soient A ∈ Hg et B $\nearrow$ ∈ Hg, $\searrow$ ∈ Benzène

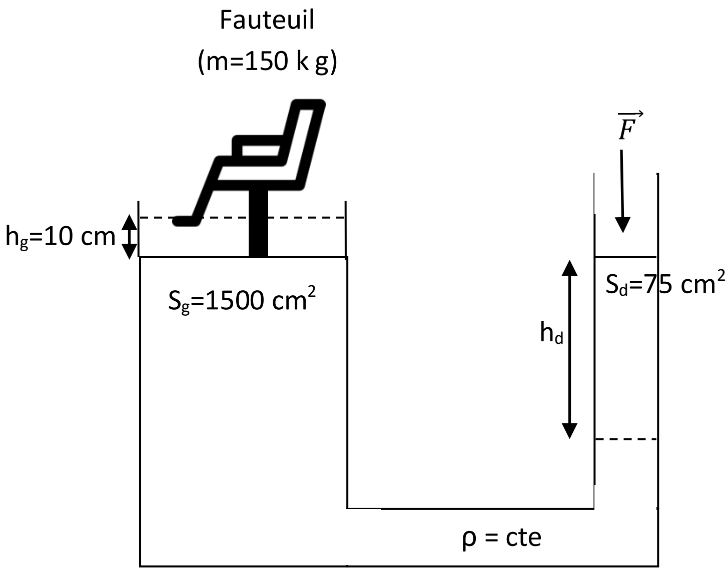
A et B sont alignés P(A)=P(B) $\Longleftrightarrow$ $P(B) = P_{atm} + \rho_b h_b g$

$$P(A) = P(C) + \rho_{Hg}\, g\, (2h)$$

Avec $P(C) = P_{atm} + \rho_e g h_e$ donc $h = \dfrac{\rho_b h_b - \rho_e h_e}{2\,\rho_{Hg}}$

$$\left.\begin{aligned} \text{Avec} \quad h_e &= \frac{V_e}{S} = \frac{4\,V_e}{\pi d^2} = \frac{100}{3{,}14} = 31{,}84 \text{ cm} \\ h_b &= \frac{V_b}{S} = \frac{4\,V_b}{\pi d^2} = \frac{200}{3{,}14} = 63{,}66 \text{ cm} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow h \approx 0{,}889 \text{ cm} \approx 8{,}89 \text{ mm}$$

Ex6: Principe de Pascal: Presse hydraulique



a) Cherchons la force $\vec{F}$ qu'il faut exercer sur le piston de droite pour soulever le fauteuil.

Le système est en équilibre lorsque la pression P_1 exercée sur le piston de droite est égale à la pression P_2 exercée sur le piston de gauche.

$$P_1 = \frac{F}{S_d} = P_2 = \frac{m\,g}{S_g} \quad \Longrightarrow \quad F = \frac{S_d}{S_g}\,m\,g$$

AN: $F = \frac{75}{1500} \times 150 \times 9{,}81 = 73{,}6$ N (valeur faible)

Rq : Le poids du fauteuil est m.g= 150x9,81= 1471,6 N

Conclusion : ce système permet de soulever des objets très lourds, pour des surfaces grandes $S_g >> S_d$ tout en appliquant une force faible.

b) Cherchons la distance parcourue par le piston de droite h_d pour soulever le piston de gauche de h_g=10cm.

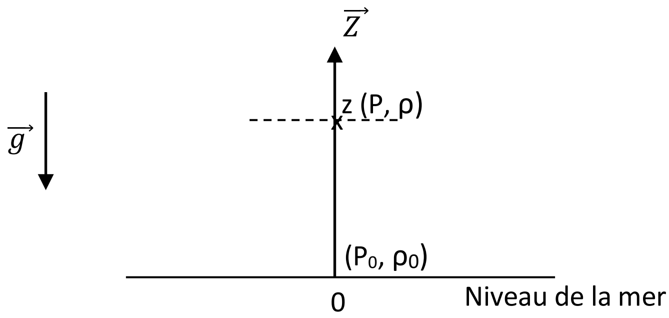
Pour un fluide incompressible (ρ = cte), donc pour une même masse du fluide déplacée on va trouver que le même volume se déplace $\Longrightarrow$ $V_g = V_d$

$$\Longrightarrow S_d\,h_d = S_g\,h_g \quad \Longrightarrow \quad h_d = \frac{S_g}{S_d} \times h_g \quad \Longrightarrow \quad \text{AN: } h_d = \frac{1500}{75} \times 10 = 200 \text{ cm}$$

$$h_d = 2\text{m}$$

EX7: Fluide compressible ($\rho \neq$ cte)

a) Cherchons la variation de la pression de l'atmosphère en fonction de la hauteur z au dessus du niveau de la mer.



Partons de l'équation dans un fluide au repos (équation de la statique des fluides)

$\overrightarrow{grad}$ P = $\rho \times \vec{g} = -\rho g \vec{Z}$

Or P ne dépend que de Z $\Longrightarrow$ P= P(Z)

Variable car le fluide est compressible

$\Longrightarrow \overrightarrow{grad}\, P = \frac{dP}{dz}\vec{Z} = -\rho g \vec{Z} \Longrightarrow \frac{dP}{dz}\vec{Z} = -\rho g \vec{z}$

$\Longrightarrow \frac{dP}{dz} = -\rho g \Longrightarrow dP = -\rho g\, dz \Longrightarrow \boxed{dP + \rho g\, dz = 0}$ **équation 1**

On suppose que l'air est un gaz parfait : $PV = nRT = \frac{m}{M}RT$ avec $m = \rho V$

$\Longrightarrow PV = \frac{\rho V}{M}RT \Longrightarrow \frac{P}{\rho} = \frac{RT}{M} = Cte = \frac{P_0}{\rho_0} \Longrightarrow \rho = \frac{P}{P_0}\rho_0$

Car on suppose que T = Cte donc d'après l'équation 1 $dP + \frac{P}{P_0}\rho_0 g\, dz = 0$

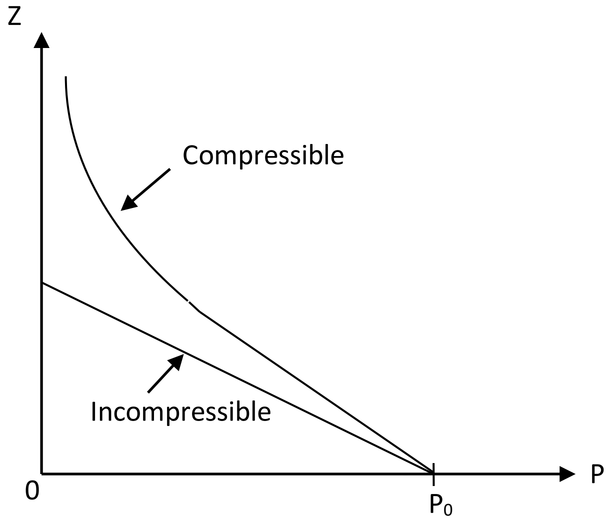
$$\Longrightarrow \frac{dP}{P} = -\frac{\rho_0}{P_0} g\, dz$$

On intègre entre (Z=0 et Z) et entre (P et P_0) $\int_{P_0}^{P}\frac{dP}{P} = -\frac{\rho_0}{P_0} g \int_0^Z dz$

$$\Longrightarrow \text{Log}\frac{P}{P_0} = -\frac{\rho_0}{P_0} g z \Longrightarrow \boxed{P = P_0\, e^{\left(\frac{-\rho_0}{P_0} g z\right)}}$$

$Z = \frac{P_0}{\rho_0} g$

$\approx 10193{,}6$ Km



b) Cherchons la hauteur h pour laquelle $P = \frac{P_0}{2}$

Nous avons trouvé que $P = P_0\, e^{\left(\frac{-\rho_0}{P_0} g\, z\right)}$

Donc cherchons z pour $P = \frac{P_0}{2}$

$\Longrightarrow \quad \frac{P_0}{2} = P_0\, e^{\left(\frac{-\rho_0}{P_0} g\, z\right)} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{2} = e^{\left(\frac{-\rho_0}{P_0} g\, z\right)}$

$\Longrightarrow \quad \text{Log } 2 = \frac{\rho_0}{P_0}\, g\, z \quad \Longrightarrow \quad z = \frac{P_0}{g\, \rho_0} \log 2 \approx 7065{,}7$ Km

On prend $P_0 = P_{atm}$

Rq : Si on avait considéré que l'air est incompressible : $\rho = \rho_0$

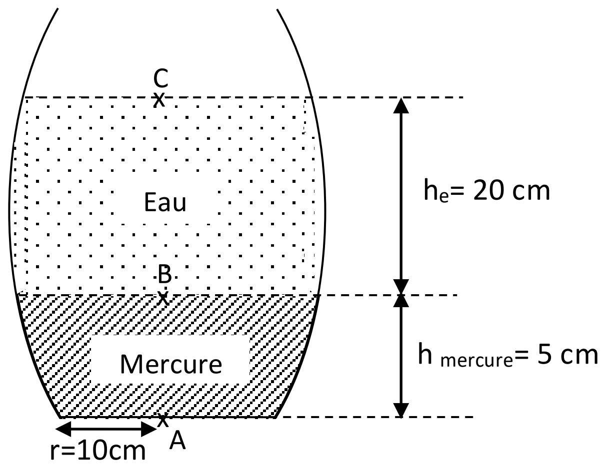
$\Longrightarrow$ $P + \rho_0\, g\, z = Cte = P_0 + \rho\, g \times 0 = P_0$

$\Longrightarrow$ $P = P_0 - \rho_0\, g\, z$: équation d'une droite (voir la figure)

Pour $P=0 \Longrightarrow z = \frac{P_0}{\rho_0} g$

AN : Z= 10193,6 Km

EX8 :



Calculons la force de pression s'exerçant sur le fond d'un vase plan et horizontal de forme circulaire.

La force de pression exercée en A est :

F = P(A).S

Avec $P(A)= P(B) + \rho_m g\, h_m$

Or $P(B)= P_{atm} + \rho_e\, g\, h_e$

> N.B : on prend la masse volumique du fluide qui applique la force sur le point choisi.

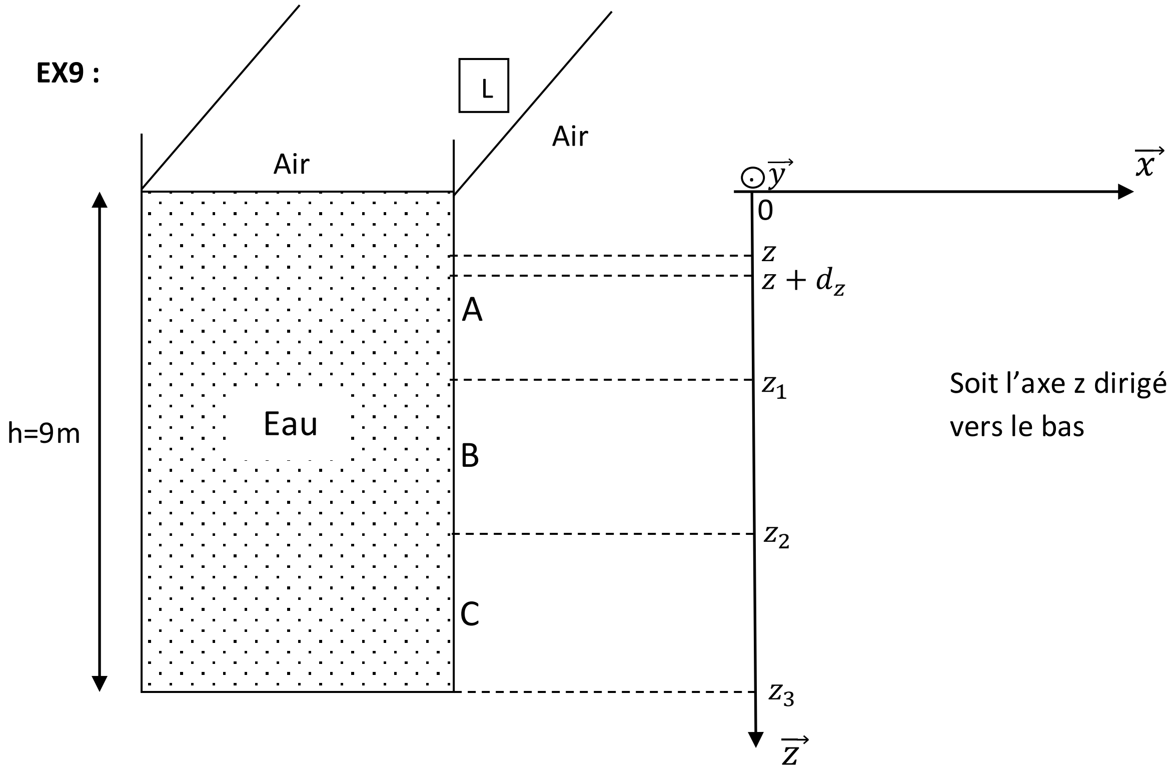
$\Longrightarrow$ $P(A) = P_{atm} + \rho_e\, g\, h_e + \rho_m g\, h_m$

$\Longrightarrow$ $F = (P_{atm} + \rho_e\, g\, h_e + \rho_m g\, h_m) \times \pi\, r^2$

S = surface du fond circulaire = $\pi\, r^2$

AN: F=....

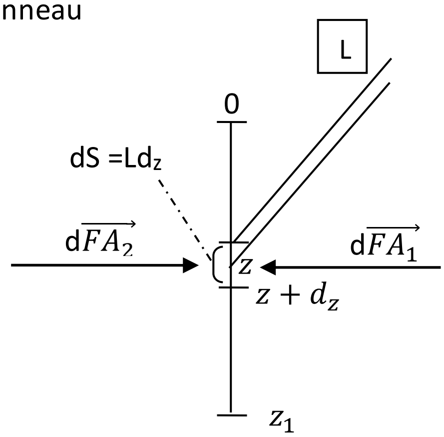
EX9 :



Soit l'axe z dirigé vers le bas

a) Cherchons la force de pression par chaque panneau

- Panneau A :



Soit dS un élément de surface de panneau A

dS= L x d$_z$ (L= une unité)

d$\overrightarrow{F_{A_1}}$ = - P$_{atm}$ x dS $\vec{x}$

Et d$\overrightarrow{F_{A_2}}$ = P x dS x $\vec{x}$

Avec P : la pression de l'eau $\Longrightarrow$ P = P$_{atm}$ + ρ_{eau} g (z-0)= P$_{atm}$ + ρ_{eau} g z

$\Longrightarrow$ d$\overrightarrow{F_{A_2}}$ = (P$_{atm}$ + ρ_{eau} g z) dS $\vec{x}$

La résultante des forces de pression est:

d$\overrightarrow{F_A}$ = d$\overrightarrow{F_{A_1}}$ + d$\overrightarrow{F_{A_2}}$ = - P$_{atm}$ dS $\vec{x}$+(P$_{atm}$ + ρ_{eau} g z) dS $\vec{x}$

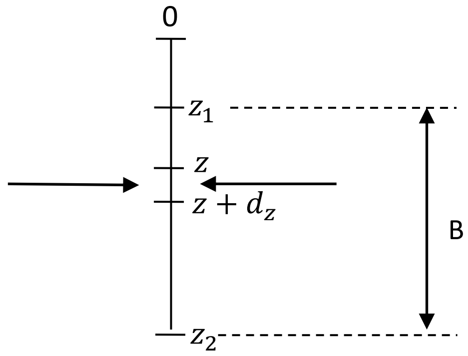
$\Longrightarrow$ d$\overrightarrow{F_A}$ = ρ_{eau} g z dS $\vec{x}$ = ρ_{eau} g z dz $\vec{x}$ (dS=dz car L=1unité)

La force de pression sur le panneau A est donnée par F$_A$= $\int_0^{z_1} \rho_e g\ z\ d_z$

On intègre entre 0 et z_1 car (z_1-0) c'est la hauteur correspondante du panneau A

$\Longrightarrow$ $F_A = \rho_e g \int_0^{z_1} z d_z = \frac{\rho_e g \, [Z^2]_0^{z_1}}{2}$ $\Longrightarrow$ $\boxed{F_A = \rho_e g \frac{z_1^2}{2}}$

- De même pour le panneau B :



$d\overrightarrow{F_{B_1}}$ = - P_{atm} x dS $\vec{x}$

Et $d\overrightarrow{F_{B_2}}$ = P' x dS x $\vec{x}$

Avec P': la pression de l'eau entre z_2 et z_1

$d\overrightarrow{FB_2}$ = (P_{atm} + ρ_{eau} g z) dS $\vec{x}$

La résultante des forces de pression est:

$d\overrightarrow{F_B} = d\overrightarrow{F_{B_1}} + d\overrightarrow{F_{B_2}}$ = - P_{atm} dS $\vec{x}$ + (P_{atm} + ρ_{eau} g z) dS $\vec{x}$

$\Longrightarrow$ $d\overrightarrow{F_B}$ = ρ_{eau} g z dS $\vec{x}$ avec dS = L.dz= dz (car on prend L=1unité)

$d\overrightarrow{F_B}$ = ρ_{eau} g z dz $\vec{x}$ mais avec z ∈ $[z_1, z_2]$

La force de pression sur le panneau B est donnée par $F_B = \int_{z_1}^{z_2} \rho_e g \, z \, d_z$

On intègre entre z_1 et z_2 car (z_2 -z_1) c'est la hauteur correspondante du panneau B

$\Longrightarrow$ $F_B = \rho_e g \int_{z_1}^{z_2} z d_z = \frac{\rho_e g [Z^2]_{z_1}^{z_2}}{2}$ $\Longrightarrow$ $\boxed{F_B = \frac{\rho_e g}{2} (z_2^2 - z_1^2)}$

- De même pour le panneau C :

$d\overrightarrow{F_{C_1}}$ = - P_{atm} x dS $\vec{x}$

Et $d\overrightarrow{F_{C_2}}$ = P'' x dS x $\vec{x}$

Avec P'': la pression de l'eau entre z_3 et z_2

$d\overrightarrow{F_{C_2}}$ = (P_{atm} + ρ_{eau} g z) dS $\vec{x}$

La résultante des forces de pression est:

$d\overrightarrow{F_C} = d\overrightarrow{F_{C_1}} + d\overrightarrow{F_{C_2}}$ = - P_{atm} dS $\vec{x}$ + (P_{atm} + ρ_{eau} g z) dS $\vec{x}$

$\Longrightarrow$ $d\overrightarrow{F_C}$ = ρ_{eau} g z dz $\vec{x}$ avec dS = L.dz= dz (car on prend L=1unité)

La force de pression sur le panneau C est donnée par $F_C = \int_{z_2}^{z_3} \rho_e g \, z \, d_z$

On intègre entre z_2 et z_3 car ($z_3 - z_2$) c'est la hauteur du panneau C

$$\Rightarrow F_C = \rho_e g \int_{z_2}^{z_3} z d_z = \frac{\rho_e g \, [Z^2]_{z_2}^{z_3}}{2} \qquad \Rightarrow \boxed{F_C = \frac{\rho_e g}{2}(z_3^2 - z_2^2)}$$

La force totale exercée sur les 3 panneaux est : $F_{totale} = F_A+F_B+F_C = \frac{\rho_e g z_3^2}{2} = \frac{\rho_e g h^2}{2}$

b) Dé terminons la hauteur de chaque panneau pour que chacun supporte la même force

$\Rightarrow$ Il faut donc que $F_A=F_B=F_C=\frac{1}{3} F_{totale} = \frac{1}{6}\rho_e g h^2$

D'où $F_A= \rho_e g \frac{z_1^2}{2} = \frac{1}{6}\rho_e g h^2 \quad \Rightarrow \quad$ AN: $z_1= \frac{h}{\sqrt{3}} \approx 5{,}20$ m

$F_B= \rho_e g \frac{(z_2^2-z_1^2)}{2} = \frac{1}{6}\rho_e g h^2 \quad \Rightarrow \quad$ AN: $z_2= \sqrt{\frac{2}{3}}\,h \approx 7{,}35$ m

$F_c= \rho_e g \frac{(z_3^2-z_2^2)}{2} = \frac{1}{6}\rho_e g h^2 \quad \Rightarrow \quad$ AN: $z_3= h = 9$ m

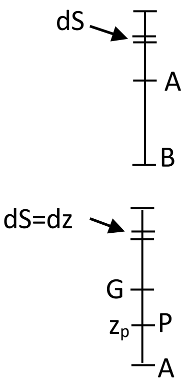
D'où les hauteurs : $h_A=z_1=5{,}20$m

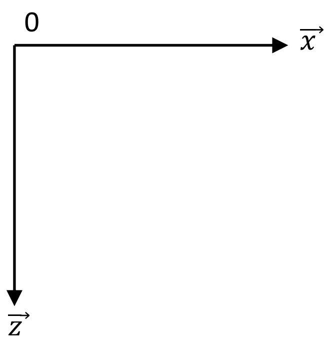
$h_B=z_2- z_1=2{,}15$m

$h_C=z_3- z_2=1{,}65$m

c) Calcul du centre de poussée des panneaux A,B et C

- Panneau A :





Le centre de poussée est le point d'application de la résultante des forces de pression sur le panneau A.

- Soit P ce centre et Z_p son coordonnée
- Soit M un point $\in$ A de coordonnée Z

$\iint$: Moment de $\vec{F}/O = somme\ des\ moments\ d\vec{F}/O$

$\overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{F_A} = \int_s \overrightarrow{OM} \wedge \mathrm{d}\overrightarrow{F_A}$

$Z_p\overrightarrow{Z} \wedge \rho_e \frac{g z_1^2}{2} \overrightarrow{x} = \int_s Z\overrightarrow{Z} \wedge \rho_e g\ z\ ds\ \overrightarrow{x}$

Avec ds = L.dz =dz si on prend L=1 unité

$Z_p\overrightarrow{Z} \wedge \rho_e \frac{g z_1^2}{2} \overrightarrow{x} = \int_0^{z_1} Z\overrightarrow{Z} \wedge \rho_e g\ z\ ds\ \overrightarrow{x}$

$Z_p\ \rho_e \frac{g z_1^2}{2} \overrightarrow{y} = \int_0^{z_1} z^2\ \rho_e\ g\ dz\ \overrightarrow{y}$

$\frac{Z_P\ \rho_e\ g\ z_1^2}{2} \overrightarrow{y} = \frac{\rho_e\ g\ z_1^3}{3} \overrightarrow{y} \Rightarrow \boxed{Z_p = \frac{2}{3} Z_1}$

- Pour le panneau B :

On procède de la même manière :

$\overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{F_B} = \int_s \overrightarrow{OM} \wedge \mathrm{d}\overrightarrow{F_B}$

$Z_p\overrightarrow{Z} \wedge \rho_e g \frac{(z_2^2 - z_1^2)}{2} \overrightarrow{x} = \int_{z_1}^{z_2} Z\overrightarrow{Z} \wedge \rho_e g\ z\ dz\ \overrightarrow{x}$

$Z_p\, \rho_e g \frac{(z_2^2 - z_1^2)}{2} \overrightarrow{y} = \int_{z_1}^{z_2} z^2\ \rho_e\ g\ \overrightarrow{y}$

$Z_p\, \rho_e g \frac{(z_2^2 - z_1^2)}{2} \overrightarrow{y} = \frac{\rho g}{3} [Z^3]_{z_1}^{z_2} \overrightarrow{y}$

$\Rightarrow Z_p\, \rho_e g \frac{(z_2^2 - z_1^2)}{2} \overrightarrow{y} = \frac{\rho g}{3} (z_2^3 - z_1^3)$

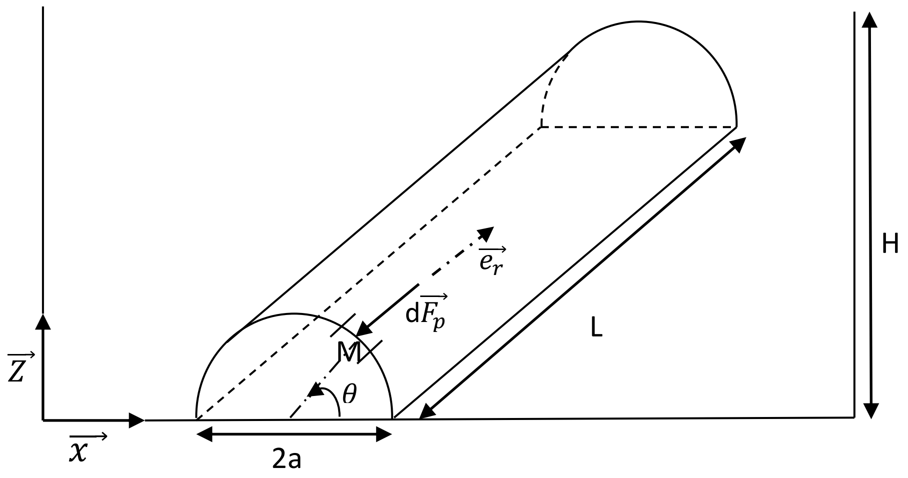
$\Rightarrow Z_p = \frac{2}{3}\ \frac{z_2^3 - z_1^3}{z_2^2 - z_1^2}$

- De même pour le panneau c :

On trouve : $Z_p = \frac{2}{3}\ \frac{z_3^3 - z_2^3}{z_3^2 - z_2^2}$

EX10:

a)

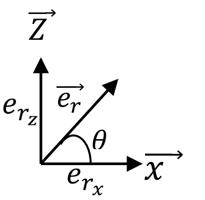


d$\overrightarrow{F_p}$ = - P(M).ds $\overrightarrow{e_r}$ ici ds=aL. dθ et $\theta : 0 \to \pi$

d$\overrightarrow{F_p}$ = - aL P(M) dθ $\overrightarrow{e_r}$

Or P(M)= $P_{atm}+\rho\ g(H - a\sin\theta)$

$$\overrightarrow{e_r} = e_{r_x}\overrightarrow{x} + e_{r_z}\overrightarrow{z}$$
$$e_{r_x} = \|\overrightarrow{e_r}\|\cos\theta$$
$$e_{r_z} = \|\overrightarrow{e_r}\|\sin\theta$$



Avec $\|\overrightarrow{e_r}\| = 1$

d$\overrightarrow{F_p}$ = [- aL P_{atm} dθ - aL $\rho\ gH$ d$\theta + a^2L\,\rho\ g\sin\theta$ dθ] $\overrightarrow{e_r}$

Or $\overrightarrow{e_r} = \cos\theta\,\overrightarrow{x} + \sin\theta\ \overrightarrow{z}$

d$\overrightarrow{F_p}$ = [- aL $P_{atm}\cos\theta$ dθ - aL $\rho\ gH\ \cos\theta$ d$\theta + a^2L\,\rho\ g\ \cos\theta\sin\theta$ dθ] $\overrightarrow{x}$+ [- aL P_{atm} $\sin\theta$ dθ - aL $\rho\ gH\ \sin\theta$ d$\theta + a^2L\,\rho\ g\ \sin^2\theta$ dθ] $\overrightarrow{z}$

Avec $\cos\theta\sin\theta = \frac{1}{2}\sin 2\theta$

d$\overrightarrow{F_p}$ = [- aL $P_{atm}\cos\theta$ dθ - aL $\rho\ gH\ \cos\theta$ d$\theta + a^2L\,\rho\ g\ \frac{1}{2}\sin 2\theta$ dθ] $\overrightarrow{x}$+ [- aL P_{atm} $\sin\theta$ dθ - aL $\rho\ gH\ \sin\theta$ d$\theta + a^2L\,\rho\ g\ \sin^2\theta$ dθ] $\overrightarrow{z}$

$\overrightarrow{F_p}$ = - aL P_{atm} $[-\sin\theta]_0^\pi$ - aL $\rho\ gH\ [\sin\theta]_0^\pi + a^2L\,\rho\ g\ \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{2}\cos 2\theta\right]_0^\pi$ + [- aL P_{atm} $[-\cos\theta]_0^\pi$ - aL $\rho\ gH\ [-\cos\theta]_0^\pi + a^2L\,\rho\ g\ \int_0^\pi \sin^2\theta\ d\theta$

Avec $\int_0^\pi \sin\theta\ d\theta = [-\cos\theta]_0^\pi = 2$

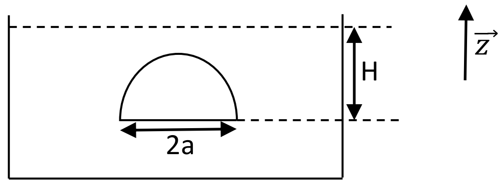
$$\int_0^\pi \sin^2\theta\ d\theta = \int_0^\pi \frac{1-\cos 2\theta}{2}\ d\theta = \frac{1}{2}\pi$$

$\overrightarrow{F_p}$= 0-0+0+ (-2aL P_{atm} -2a L $\rho\ gH + \frac{a^2L\,\rho\ g}{2}\ \pi$)

$$\vec{F_p} = [\underbrace{-2aL}_{S_0}\ \underbrace{[P_{atm} + \rho\ gH]}_{P\ fond} + \underbrace{\frac{\pi a^2 L}{2}}_{V} \rho\ g]\ \vec{z}$$

b) $\vec{F_p} = (\ \rho\ g\ V - S_0\ P_{fond})\ \vec{z}$

c) Si



Force de pression exercée sur le fond du ½ cylindre

$= (P_{atm} + \rho\ gH)\ 2\ aL\ \vec{z} = P_{fond}.\ S_0\ \vec{z}$

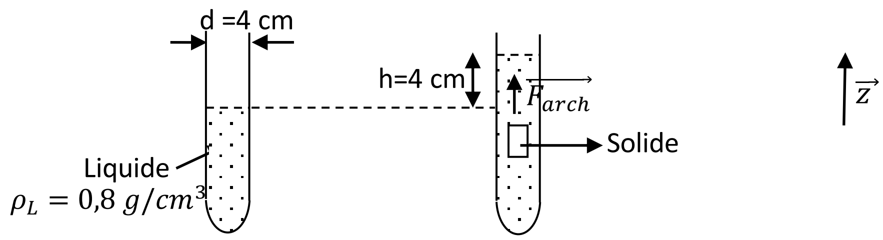
Force totale: $\vec{F} = (\rho\ gV - S_0\ P_{fond} + S_0\ P_{fond})\ \vec{z}$

$\Longrightarrow$ $\vec{F} = \rho\ g\ V\ \ \vec{z}$ c'est la poussée d'Archimède

D'où le principe d'Archimède :

$\overrightarrow{F_{arch}}$ est dirigée vers le haut, son module= poids du volume déplacé c.-à-d. $\rho\ g\ V$

EX 11 : Poussée d'Archimède



Le solide subit une poussée d'Archimède dirigée vers le haut

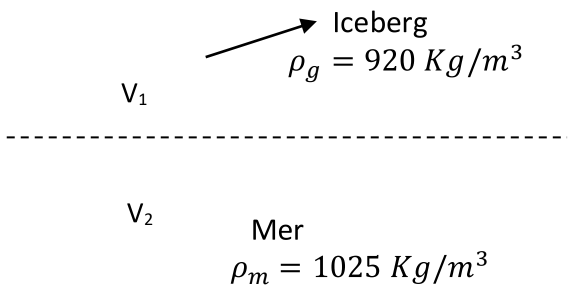
$|\overrightarrow{F_{arch}}|$= Poids du liquide déplacé

= Poids du liquide contenu dans le cylindre de section $\frac{\pi\ d^2}{4}$ et de hauteur h

$= \rho_L\ \frac{\pi\ d^2}{4} h\ g$

AN : $|\overrightarrow{F_{arch}}| = 0{,}8.\ 10^3 \pi \frac{16.10^{-4}}{4}\ 4.\ 10^{-2}.\ 9{,}81 = 0{,}394$ N

EX 12 :



On cherche $\frac{V_2}{V_1+V_2}$ fraction immergée

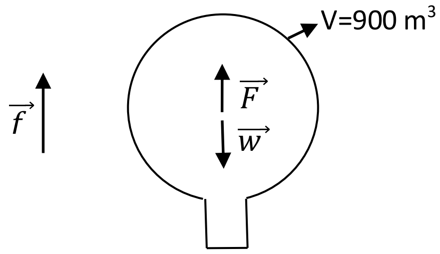
A l'équilibre $|Poids| = |\overrightarrow{F_{arch}}|$

$\Rightarrow$ $\rho_g(V_1 + V_2)g = \rho_m\, gV_2$

$\Rightarrow$ $\frac{V_2}{V_1+V_2} = \frac{\rho_g}{\rho_m} = \frac{920}{1025} = 0,897$ c.-à-d. 89,7%

EX13 :

Ballon gonflé d'Hélium



$\vec{f} = \vec{F} + \vec{w}$

Soit w = poids du ballon=1800 N

F = poussé d'Archimède due à l'air

F = $\rho_{air}\, V\, g$ = 11700 N

$\Rightarrow$ Si F > w $\Rightarrow$ le ballon s'élève dans l'atmosphère

$\Rightarrow$ f = F-w : appelée force ascensionnelle et vaut f= 11700-1800 = 9900 N

$\Rightarrow$ Le ballon peut soulever une masse m tel que f=m.g $\Rightarrow$ m=$\frac{f}{g}$ ≈ 990 kg

EX14 :

$P_0 = P_{atm} = 10^5$ Pa

$P_1 = P_{atm} + \rho_{Hg} g\, l_1$

$P_2 = P_1$ (les 2 points sont situés au même niveau)

$P_2 = P_3 + \rho_{eau}\, g\, l_2 \implies P_3 = P_{atm} + \rho_{Hg} g\, l_1 - \rho_{eau} g\, l_2$

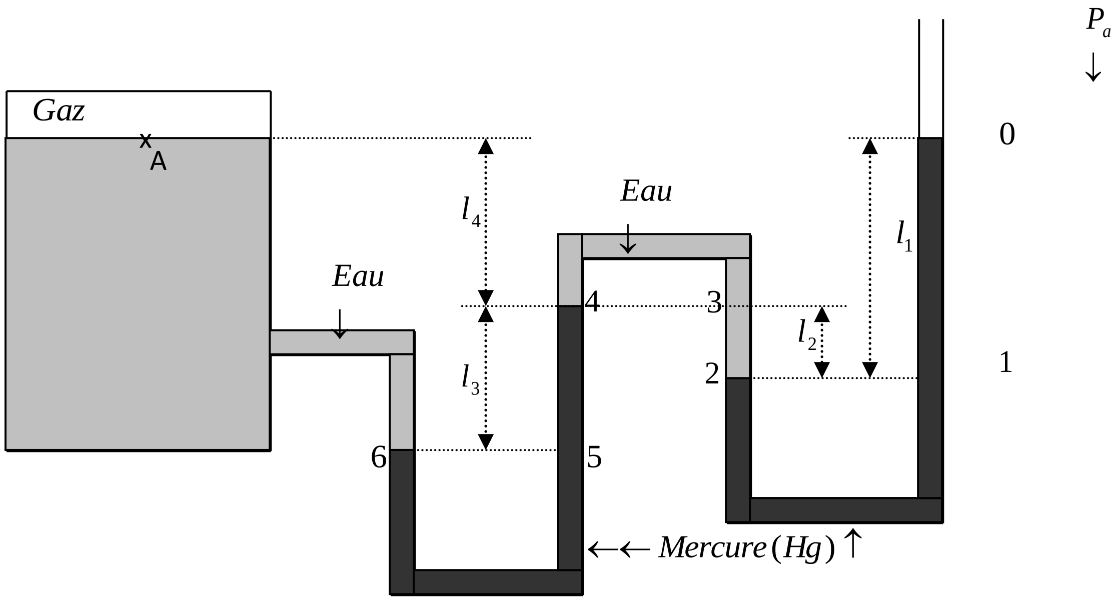
$P_4 = P_3$

$P_5 = P_4 + \rho_{Hg} g\, l_3 \implies P_5 = P_{atm} + \rho_{Hg} g\, l_1 - \rho_{eau} g\, l_2 + \rho_{Hg} g\, l_3$

$P_6 = P_5$

$P_6 = P_A + \rho_{eau}\, g\, (l_3 + l_4) \implies P_A = P_{atm} + \rho_{Hg} g\, (l_1 + l_3) - \rho_{eau} g\, (l_2 + l_3 + l_4)$

AN. $P_A = 2{,}76 \cdot 10^5$ Pascal



Travaux dirigés : Série 2

Fluides parfaits et incompressible- Relation de Bernoulli

Exercice 1

Une conduite circulaire S_1 de rayon R_1 est connectée à une autre conduite circulaire S_2 de rayon $R_2 < R_1$. En S_1 la vitesse est axiale et donnée par : $V(r) = 2\beta\left[1-\left(\dfrac{r}{R_1}\right)^2\right]$.

a) Calculer le débit volumique entrant par S_1.
b) Calculer la vitesse moyenne et la vitesse maximale sur S_1.
c) En déduire la vitesse moyenne en S_2.

Exercice 2 **(Gradient de pression dans un divergent)**

Une conduite divergente est placée de telle sorte que le long de l'axe supposé horizontal, la vitesse varie linéairement de 5 m/s à 1 m/s sur une distance AB de 0,50 m.

Dans le cas d'un fluide de masse volumique ρ = 800 Kg/m^3.

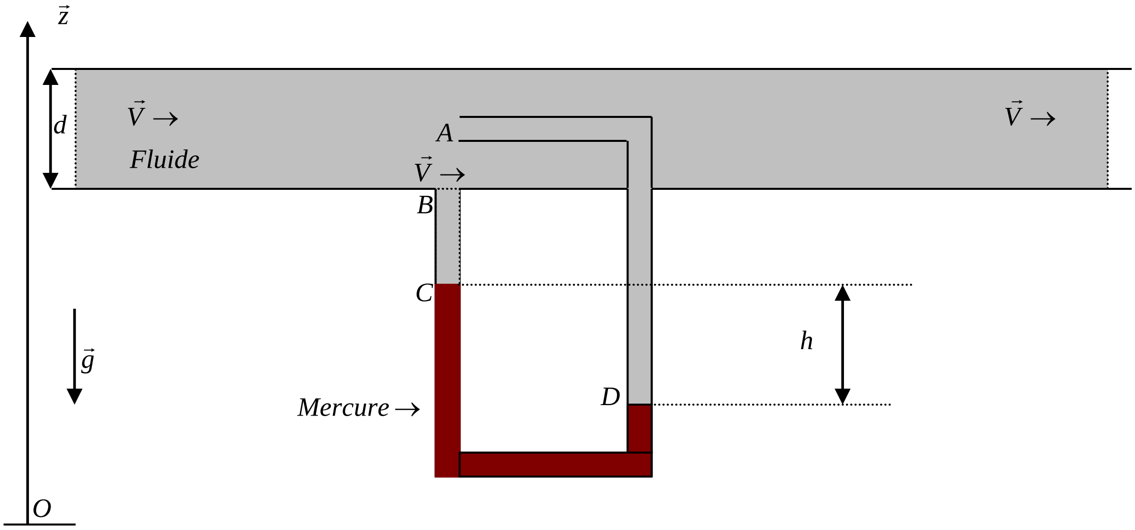
a) Déterminer la variation de pression correspondant à cette diminution de la vitesse de 4 m/s.
b) Calculer la valeur du gradient de pression aux points A et B.

Exercice 3 **(Tube de Pitot)**

Dans une conduite cylindrique horizontale assez longue, de section constante et de diamètre **d**, circule un fluide. On suppose que ce fluide est pesant, incompressible (masse volumique **ρ**) et parfait et que l'écoulement est permanent et irrotationnel.

1) Pourquoi la vitesse de l'écoulement V reste t-elle la même partout dans la conduite ?

Pour mesurer cette vitesse on introduit une sonde de Pitot dans la conduite, comme c'est indiqué sur la figure ci-dessous. Le tube contient du mercure de masse volumique ρ_{mer}.



L'ouverture A est placée juste sur l'axe de la conduite et au dessus de l'ouverture latérale B de telle façon que : $z_A - z_B = \dfrac{d}{2}$.

Le fluide entre par les ouvertures A et B et provoque la dénivellation **h** du mercure. On considère ensuite que le fluide s'arrête au point A (**point d'arrêt $V_A = 0$**).

2) À l'intérieur du tube en U, le fluide et le mercure sont au repos. Appliquer la relation fondamentale de l'hydrostatique pour exprimer les différences de pression $P_C - P_B$, $P_D - P_C$ et $P_D - P_A$.
3) En déduire $P_A - P_B$ en fonction de **g**, **h, d**, **ρ** et ρ_{mer}.
4) En appliquant la relation de Bernoulli entre les points A et B et en utilisant le résultat de la question 3), montrer que la vitesse de l'écoulement **V** est obtenue par la relation : $V = \sqrt{\dfrac{2(\rho_{mer} - \rho)}{\rho}.gh}$

<u>Exercice 4</u> (Tube de Venturi)

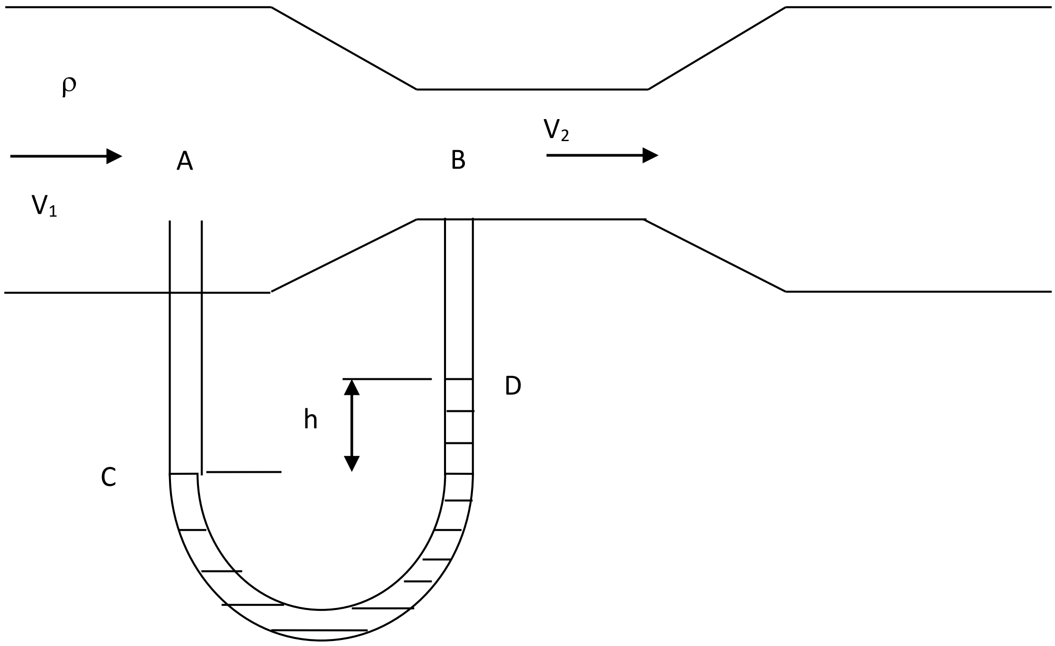
On veut mesurer la vitesse d'écoulement V_1 d'un fluide dans une conduite horizontale, cylindrique de rayon R_1. Le fluide a les propriétés suivantes : il est incompressible, de masse volumique ρ, de viscosité négligeable et il est en écoulement stationnaire dans la conduite.

Pour cela, on interpose un tube de Venturi, dont l'étranglement a un rayon R_2. La vitesse d'écoulement dans la partie rétrécie est V_2.

1) La vitesse V_2 est-elle supérieure ou inférieure à V_1 ? Donner la relation liant ces deux vitesses aux rayons R_1 et R_2 du tube de Venturi.
2) Pour mesurer la pression, on dispose d'un manomètre hydrostatique : tube en U contenant du mercure, de masse volumique ρ'. La dénivellation du mercure est h(voir la figure).on rappelle que le fluide et le mercure dans le tube en U sont au repos.

a) Rappeler la relation fondamentale de l'hydrostatique : relation donnant, dans un fluide au repos, la différence de pression entre deux points M et N d'altitude z_M et z_N.

b) Utiliser cette relation pour exprimer les différences de pression (P_A - P_C), (P_C - P_D) et (P_D - P_B) en fonction des altitudes z_A, z_B, z_C et z_D des différents points du manomètre.
c) En déduire que $P_A - P_B = (\rho' - \rho)gh$.
d) En utilisant le résultat de la question 2c, déterminer la vitesse V_1, en fonction de g, h, ρ, ρ', R_1 et R_2.



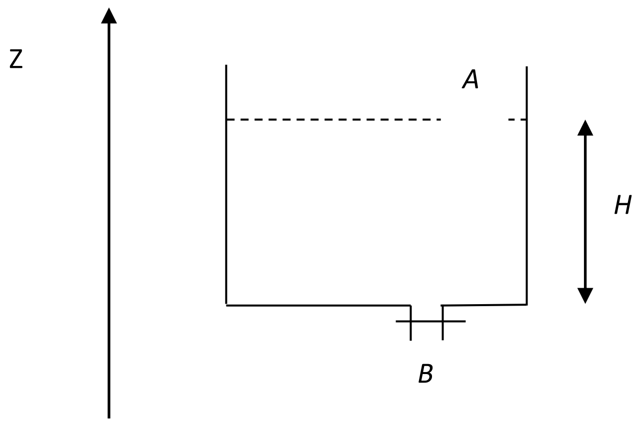
Exercice 5

1) Dans un premier temps, on considère une cuve, de très grande dimension, remplie d'eau et fermée à sa base par un bouchon en B de section **s**, très petite devant la section **S** de la cuve en A. on enlève le bouchon en B. en appliquant le théorème de Bernoulli et la conservation du débit, trouver la relation qui lie V_A, V_B, H et g et les sections. Démontrer que si :

$$s \ll S \; ; \; V_B = \sqrt{2.gH}\left[1+\frac{\varepsilon^2}{2}\right]$$

Préciser ε

Dans la suite on néglige ε.



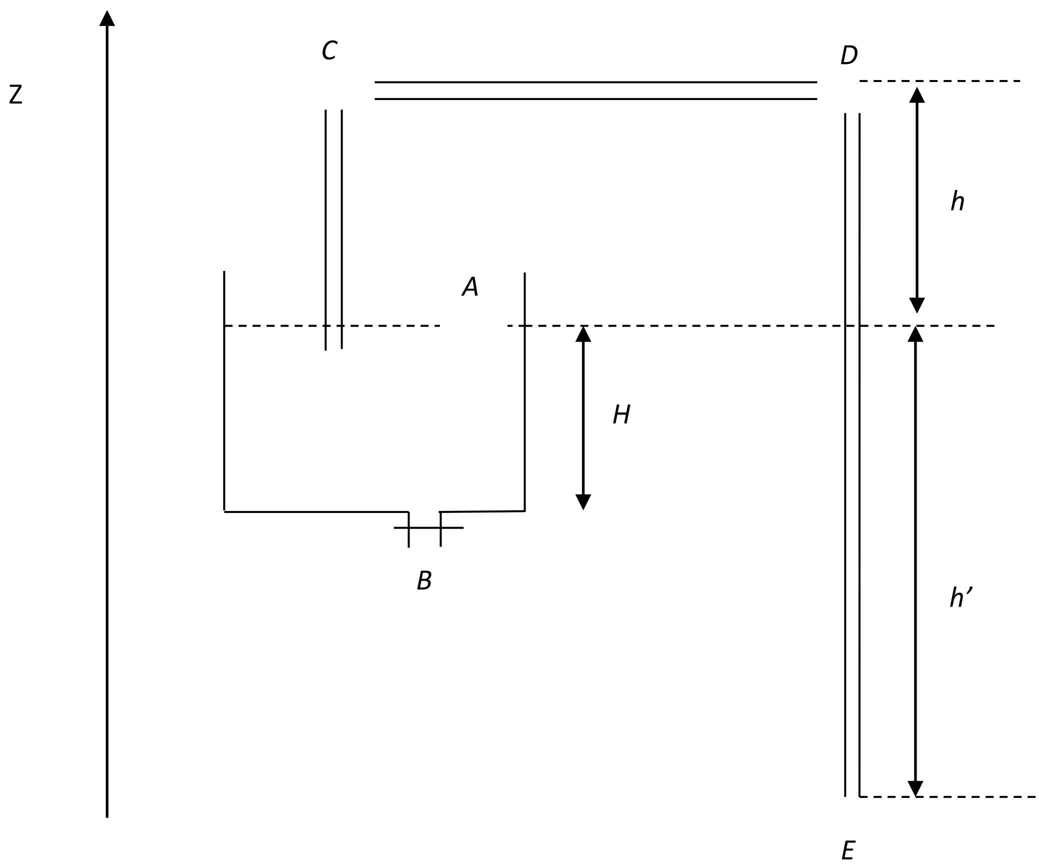
2) On remplit de nouveau la cuve d'une hauteur H d'eau avec le bouchon en place en B. on installe de plus un tube en U de section **s** à l'envers afin de constituer un siphon. En aspirant dans le tube, l'eau y monte.

2-1) Donner l'expression de la vitesse en E.

2-2) En déduire la condition de fonctionnement du siphon.

2-3) Déterminer l'expression de la pression au point D.

2-4) jusqu'à quelle valeur maximale de h le siphon fonctionne correctement.



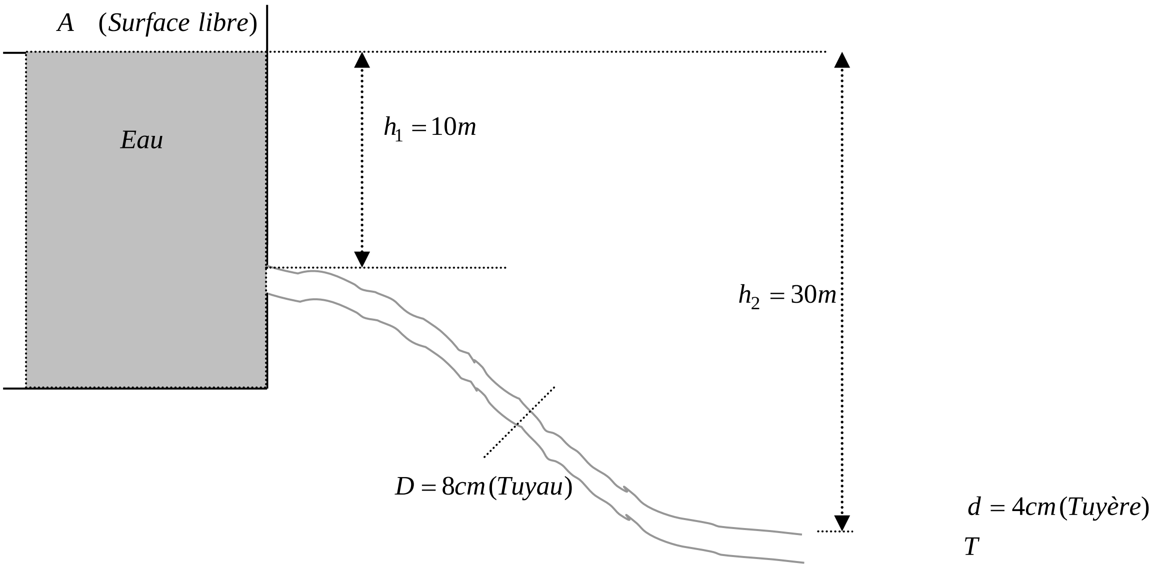
Exercice 6 (Alimentation d'une tuyère)

L'entrée E d'un tuyau, de diamètre D = 8 cm, se trouve à 10 m sous la surface libre d'un réservoir d'eau R de grandes dimensions, et la sortie à 30 m au dessous de cette même surface libre. Il se termine par une courte tuyère T de diamètre d = 4 cm.

1) Quelle est la valeur de la vitesse V_T à la sortie de la tuyère ?
2) Quel est le débit qui s'écoule ?
3) Quelle est, dans le tuyau, la valeur de la vitesse et de la pression statique en E ainsi que dans une section F située juste en amont de la tuyère de sortie ?

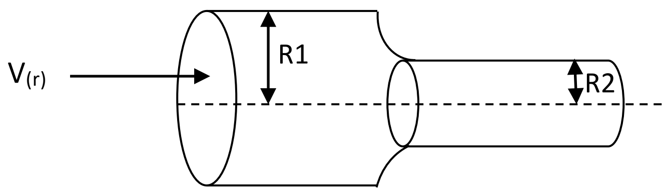
On donne la densité de l'eau $\rho = 10^3$ Kg/m^3.

4) Tracer la ligne de la charge totale et la ligne piézométrique de l'installation.

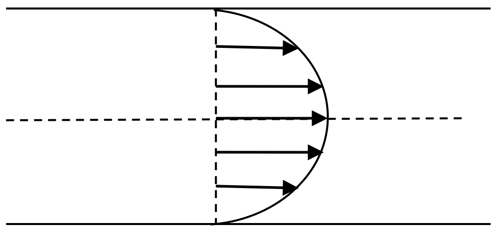


Correction de la Série N°2

EX1 :



Profile de vitesse au sein de la conduite



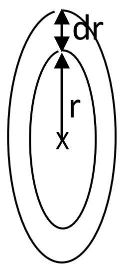
V(r)= $2\beta\left[1-\left(\frac{r}{R_1}\right)^2\right]$

La vitesse est maximale sur l'axe lorsque r=0 $\Rightarrow$ $V_{(r)}=V_{max}=2\beta$

a) Débit volumique entrant

$$d_{q_v}=V_{(r)}ds$$

S= πr^2 $\Rightarrow$ ds $=2\pi r dr$



$$d_{q_v}=4\,\beta\pi\left(1-\frac{r^2}{R_1^2}\right)rdr$$

$$\Rightarrow\ q_v=\ 4\,\beta\pi\left[\int_0^{R_1}rdr-\frac{1}{R_1^2}\int_0^{R_1}r^3dr\right]$$

$$\Rightarrow\ q_v=\ 4\,\beta\pi\left[\frac{R_1^2}{2}-\frac{R_1^2}{4}\right]\ \Rightarrow\ q_v=\ \beta\pi R_1^2\ (m^3/s)\quad \textbf{(1)}$$

b) Vitesse moyenne à l'entrée $\overline{V_e}$. Elle est tq :

$q_v=\ \overline{V_e}.S=\ \overline{V_e}\pi\,R_1^2$ = (1) $=\beta\,\pi\,R_1^2$

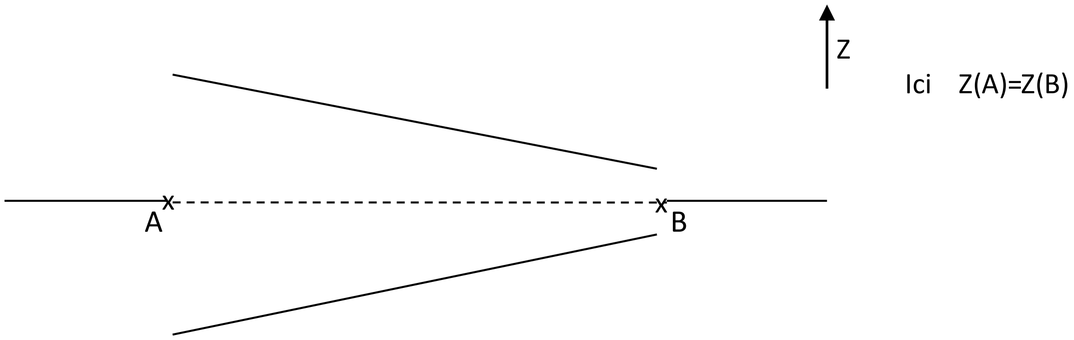
$$\Rightarrow\ \overline{V_e}=\beta=\frac{V_{max}}{2}$$

c) Vitesse moyenne à la sortie $\overline{V_s}$?

On a un fluide incompressible $\Rightarrow$ conservation de débit

$$\Rightarrow\ \overline{V_e}\pi R_1^2=\ \overline{V_s}\pi R_2^2\quad\Rightarrow\ \overline{V_s}=\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2\overline{V_e}=\beta\ \frac{R_1^2}{R_2^2}$$

EX2 : Ecoulement dans une conduite divergente



a) P(B) – P(A) ? on applique le théorème de Bernoulli entre A et B

$P_A + \rho\ g\ Z_A + \frac{1}{2}\ \rho V_A^2 = P_B + \rho\ g\ Z_B + \frac{1}{2}\ \rho V_B^2$ avec $Z_A = Z_B$

$$\Rightarrow \quad P_A + \frac{1}{2}\ \rho\ V_A^2 = P_B + \frac{1}{2}\ \rho\ V_B^2$$

$$\Rightarrow \quad P_A - P_B = \frac{1}{2}\ \rho\ (V_B^2 - V_A^2)$$

Ici $V_A = 5\ m/s$ et $V_B = 1\ m/s$

Avec $\rho = 0{,}8\ g/cm^3$ = 800 Kg/m^3

car la densité d=0,8 = $\frac{\rho}{\rho_{eau}} = \frac{\rho}{1000_{Kg/m^3}} \Rightarrow \quad \rho = 0{,}8 \,.\, 1000$ = 800 Kg/m^3

AN : $P_B - P_A$ = 0,5 x 800 (5^2-1^2) = 9600 Pascal =0,096 bar ou atm

b) $\frac{dP}{dx}$?

On a $P_A + \frac{1}{2}\ \rho\ V_A^2 + \rho\ g\ Z_A = P_B + \frac{1}{2}\ \rho\ V_B^2 + \rho\ g\ Z_B$

$$\Rightarrow \quad P_A + \frac{1}{2}\ \rho\ V_A^2 = P_B + \frac{1}{2}\ \rho\ V_B^2 \text{ car } Z_A = Z_B$$

$$\Rightarrow \quad P_A + \frac{1}{2}\ \rho\ V_A^2 = P_B + \frac{1}{2}\ \rho\ V_B^2 = P + \frac{1}{2}\ \rho\ V^2 = \text{Cte sur l'axe}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dP}{dx} = \frac{d(\frac{-\rho V^2}{2})}{dx} + 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dP}{dx} = \frac{-1}{2}\rho . 2V\ \frac{dV}{dx}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dP}{dx} = -\rho V\, \frac{dV}{dx}$$

V(x) ? V varie linéairement entre A(x=0) et B(x=0,5 m)

$\Longrightarrow$ V(x)= a x +b

à $x = 0$ $\rightarrow$ V(x =0)=5m/s $\Longrightarrow$ V(x =0)=5= a×0 +b $\Longrightarrow$ b=5

à $x = 0{,}5$= 1/2 $\rightarrow$ V(x =0,5)=1m/s $\Longrightarrow$ V(x =0,5)=1= a×0,5 +5 a= $\frac{-4}{0{,}5}$ = - 8

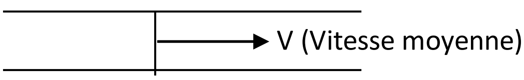
d'où V(x) = - 8 x + 5

$\Longrightarrow$ $\frac{dV}{dx}$ = -8 $\Longrightarrow$ $\frac{dP}{dx} = 8\rho\,(5 - 8x)$avec $\rho = 800\ Kg/m^3$

Pour A : $x = 0$ $\Longrightarrow$ $\frac{dP}{dx} = 40\rho$ =40 x 800 = 0,32. 10^5 Pascal/m

Pour B: $x = 0{,}5$ $\Longrightarrow$ $\frac{dP}{dx} = $ 0,064. 10^5 Pascal/m

EX3 : Tube de Pitot

1) 

V.S = Cte incompressible
S=Cte $\Longrightarrow$ V=Cte

2)

- P_C-P_B = $\rho_e\ g\ [Z_B - Z_C]$ **(1)** Car P_c+ $\rho_e\ g\ Z_c$= P_B+ $\rho_e\ g\ Z_B$ R.F.H
- P_D-P_C = $\rho_e\ g\ h$ **(2)** Car P_D+ $\rho_{Hg}\ g\ Z_D$= P_C+ $\rho_{Hg}\ g\ Z_C$ avec Z_C-Z_D=h
- P_D-P_A = $\rho_e\ g\ [Z_A - Z_D)]$ **(3)** Car P_D+ $\rho_e\ g\ Z_D$= P_A+ $\rho_e\ g\ Z_A$ avec Z_A = $\frac{d}{2}$ + Z_B

3) P_A-P_B= (-3)+(2)+(1) = $\rho_{Hg} g\ h + \rho_e g\ \left[Z_B \underbrace{- Z_C + Z_D}_{-h} - \frac{d}{2} - Z_B\right]$

P_A-P_B= $\rho_{Hg} g\ h - \rho_e g\ h - \frac{d}{2}\rho_e g$ **(1)**

4) Bernouli entre A et B

P_A+ $\frac{1}{2}\ \rho_e V_A^2 + \rho_e g\ Z_A = $ P_B+ $\frac{1}{2}\ \rho_e V_B^2 + \rho_e g\ Z_B$

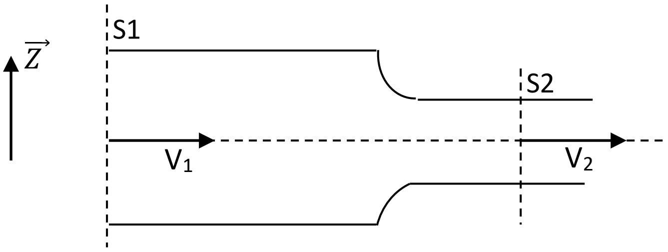
$\Longrightarrow$ P_A-P_B = $\frac{1}{2}\ \rho_e V_B^2 + [\underbrace{Z_B - Z_A}_{-d/2}]\rho_e g$ **(2)**

(1) Et **(2)** $\Longrightarrow$ $\frac{1}{2}\ \rho_e V_B^2 = (\rho_{Hg} - \rho_e) g\ h$

V_B=V vitesse dans la conduite V= $\sqrt{\frac{2(\rho_{Hg}-\rho_e)}{\rho_e}\ g\ h}$

EX4 : Tube de Venturi

1)



$V_1.S_1 = V_2.S_2$

$\pi R_1^2 V_1 = \pi R_2^2 V_2$

$V_2 = (\frac{R_1}{R_2})^2\ V_1$

$R_1 > R_2$ $\Longrightarrow$ $V_2 > V_1$

2) a) P+ $\rho\ g\ Z$ = Cte

b) P_A-P_C = - $\rho\ g\ (Z_A - Z_C)$ (1)

P_C -P_D = $\rho' g\ h$ (2)

P_D-P_B = $\rho\ g\ (Z_B - Z_D)$ (3)

c) La Somme de (1)+(2)+(3)

$\Longrightarrow$ $\underbrace{P_A-P_C+P_C-P_D+P_D-P_B}_{P_A-P_B}= -\rho\ g\ [Z_A - Z_C - Z_B + Z_D] + \rho' g\ h$ et Z_A=Z_B et Z_D-Z_C=h

$\Longrightarrow$ P_A-P_B= $(\rho' - \rho)$ g h (4)

d) Bernouli entre A et B:

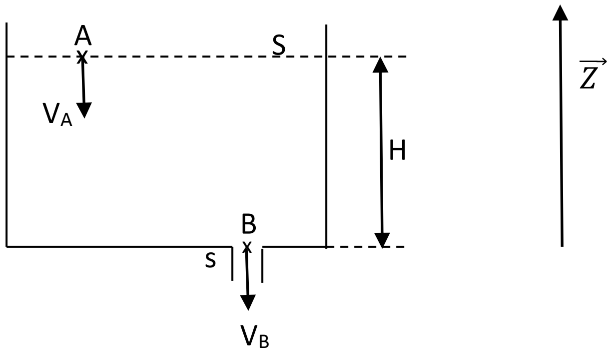
$P_A+\frac{1}{2}\ \rho\ V_1^2 + \rho g\ Z_A = P_B+\frac{1}{2}\ \rho V_2^2 + \rho g\ Z_B$

$\Longrightarrow$ P_A-P_B = $\frac{1}{2}\ \rho\ (V_2^2 - V_1^2) = \frac{1}{2}\ \rho V_1^2(\ (\frac{R_1}{R_2})^4 - 1)$ (5)

(4) et (5) $\Longrightarrow$ $V_1= \left[\frac{2(\rho'-\rho)g\ h}{\rho\left[(\frac{R_1}{R_2})^4-1\right]}\right]^{1/2}$

EX5:

1)



$V_A.S = V_B.s \Rightarrow V_A = \frac{s}{S} V_B$ (1)

$$P_A + \frac{1}{2}\rho V_A^2 + \rho g Z_A = P_B + \frac{1}{2}\rho V_B^2 + \rho g Z_B$$

$P_A \rightarrow P_{atm}$, $P_B \rightarrow P_{atm}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\rho V_B^2 - \frac{1}{2}\rho V_A^2 = \rho g [Z_A - Z_B] = \rho g H \quad (2)$$

(1) et (2) $\Rightarrow V_B = \left[\frac{2 g H}{\left[1-(\frac{s}{S})^2\right]}\right]^{1/2} = \sqrt{2 g H}\,.(1 - (\frac{s}{S})^2)^{-1/2}$

On pose $\varepsilon^2 = \frac{s^2}{S^2}$

En utilisant un développement limité au 1er ordre : $(1+\varepsilon)^n \approx 1 + n\varepsilon$

$\Rightarrow (\frac{s}{S})^2 = \varepsilon^2 \Rightarrow (1-\varepsilon^2)^{-1/2} \approx 1 + \frac{1}{2}\varepsilon^2$

$\Rightarrow V_B = \sqrt{2 g H}\left(1 + \frac{\varepsilon^2}{2}\right)$ avec $\varepsilon = \frac{s}{S}$

Dans la suite on néglige ε :

2)

2-1) $V_E = \sqrt{2 g h'}$, Bernouli entre A et E

$V_A \approx 0$, $P_A = P_{atm}$; V_E, $P_E = P_{atm}$

2-2) Condition de fonctionnement h' ≥ 0

càd E est dessous de la surface libre

2-3) Bernouli entre A et D

$$P_{atm} + 0 + \rho g\, Z_A = P_D + \frac{1}{2}\,\underbrace{\rho V_D^2}_{\frac{1}{2}\rho\,(2\,g\,h')} + \rho g\, Z_D$$

Avec $V_D = V_E$ Car $S_D V_D = S_E V_E$ (à partir de la conservation du débit)

Or $S_D = S \Rightarrow V_D = V_E$

$\Rightarrow$ $P_D = P_{atm} - \rho\, g\, h' + \rho\, g\, \underbrace{(Z_A - Z_D)}_{-h}$

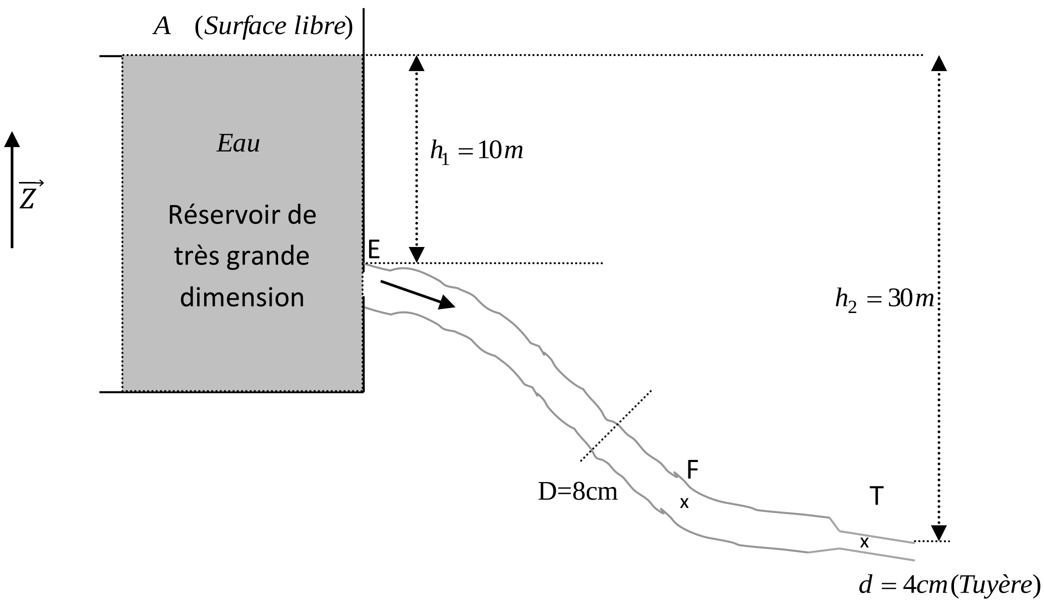
$\Rightarrow$ $P_D = P_{atm} - \rho\, g\, (h + h')$

2-4) Il faut que $P_D \geq 0$

$$h + h' \leq \frac{P_{atm}}{\rho\, g}$$

$$h \leq \frac{P_{atm}}{\rho\, g} - h'$$

EX6: Alimentation d'une tuyère



1) Vitesse V_T à la sortie de la tuyère :

Bernoulli entre A et T: $P_A + \frac{1}{2}\rho V_A^2 + \rho g Z_A = P_T + \frac{1}{2}\rho V_T^2 + \rho g Z_T$

P_A : P_{atm} ; $V_A \approx 0$ (Réservoir de très grande dimension) ; P_T : P_{atm}

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\rho V_T^{\,2} = \rho g (Z_A - Z_T) = \rho g h_2 \quad \Rightarrow \quad V_T = \sqrt{2gh_2} \ \ \textit{elle ne dépend que de } h_2$$

$$AN : V_T = \sqrt{2\times 10\times 30} \approx 24{,}5 \ m/s$$

2) Débit volumique qui sort par T :

$$Q = \int_{S_T} \vec{V}\,\vec{n}\,dS = \int_{S_T} V_T dS = V_T \int_{S_T} dS = V_T S_T$$

$$Q = V_T . \frac{\pi d^2}{4} \quad \Rightarrow \quad A.N \quad Q = \frac{24.5\times 3.14\times 16\times 10^{-4}}{4} \approx 0.0308 \ m^3/s$$

3) a) vitesse en E ?
Conservation de la masse

$$\Rightarrow \quad V_E . S_E = V_T . S_T \quad \Rightarrow \quad V_E = V_T . \frac{S_T}{S_E}$$

$$AN : \quad V_E = 24{,}5 . \frac{4^2}{8^2} = 24{,}5 \times \frac{1}{4} = 6{,}125 \ m/s$$

Pression en E ?

On applique la relation de Bernoulli entre A et E

$$P_{atm} + \rho g Z_A + \frac{1}{2}\rho V_A{}^2 = P_E + \rho g Z_E + \frac{1}{2}\rho V_E{}^2$$

$$(avec\ \ V_A \approx 0\ \ car\ le\ \ reservoir\ a\ de\ trés\ grandes\ \mathrm{dim}\,ension)$$

$$\Rightarrow \quad P_{atm} + \rho g Z_A = P_E + \rho g Z_E + \frac{1}{2}\rho V_E{}^2 \Rightarrow\ P_E = P_{atm} + \rho g (Z_A - Z_E) - \frac{1}{2}\rho V_E{}^2$$

$$avec\ \ Z_A - Z_E = h_1 \qquad \Rightarrow\ \ P_E = P_{atm} + \rho g h_1 - \frac{1}{2}\rho V_E{}^2\ \ et\ \ \rho = 10^3\, {}^{kg}\!/\!_{m^3}$$

$$AN:\ P_E = 10^5 + 1000 \times 10 \times 10 - \frac{1}{2}1000 \times (6{,}125)^2 \quad \Rightarrow\ P_E = 1{,}812.10^5\, Pascal$$

$$P_E = 1{,}812\, atm$$

c) soit un point situé entre E et T (il est à l'intérieur du tuyau)

$$S_E.V_E = S_F.V_F$$

$$or\ \ S_E = S_F \quad \Rightarrow \quad V_E = V_F = 6.125\, {}^{m}\!/\!_{s}$$

$$la\ pression\, P_E\ ?$$

$$on\, applique\, la\, relation\, de\, Bernoulli\, entre\, E\, et\, F$$

$$P_E + \rho g Z_E + \frac{1}{2}\rho V_E{}^2 = P_F + \rho g Z_F + \frac{1}{2}\rho V_F{}^2 \Rightarrow\ P_E + \rho g Z_E + \frac{1}{2}\rho V_E{}^2 = P_F + \rho g Z_F + \frac{1}{2}\rho V_E{}^2$$

$$\Rightarrow \quad P_F = P_E + \rho g (Z_E - Z_F)$$

$$or\ \ Z_E \succ Z_F \Rightarrow \quad Z_E - Z_F \succ 0 \qquad \Rightarrow\ \ P_F \succ P_E$$

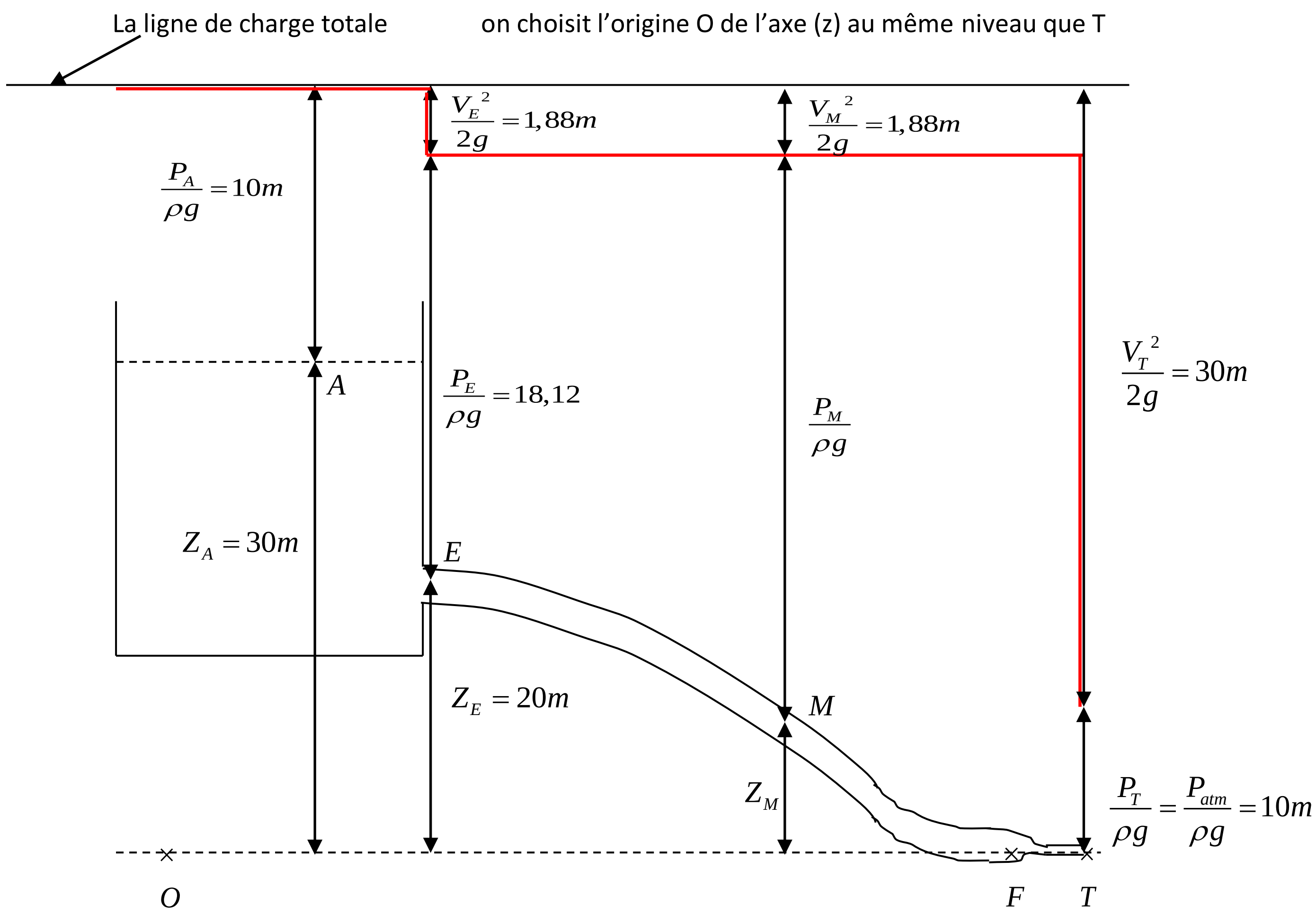
$$Si\, on\ prend\ F\ \ juste\, en\, amont\ du\ \ po\,\mathrm{int}\, T$$

$$\Rightarrow\ Z_T \approx Z_F$$

$$\Rightarrow P_F = P_E + \rho g (h_2 - h_1)$$

$$A.N \qquad\quad P_F = 3{,}812.10^5\, Pascal = \ \ 3{,}812\, atm$$

4) Ligne de charge totale et ligne piézométrique :



Charge totale :

$$Z+\frac{P}{\rho g}+\frac{V^2}{2g}=cte=H$$

$$surface\,libre\,(A):\qquad Z_A+\frac{P_A}{\rho g}+\frac{V_A^2}{2g}=Z_A+\frac{P_A}{\rho g}\quad car\ \ V_A\approx 0$$

$$30+\frac{10^5}{10^3\times 10}=40m$$

$$ceci\ est\ valable\ \forall\ A\ sur\ la\ surface\ libre$$

$$Point\ E\quad :\qquad Z_E+\frac{P_E}{\rho g}+\frac{V_E^2}{2g}\quad avec\quad Z_E=h_1-h_2$$

$$20m+\frac{1,812.10^5}{10.10}+\frac{(6,125)^2}{20}=40m$$

$$Point\ M\ entre\ E\ et\ F\qquad Z_M+\frac{P_M}{\rho g}+\frac{V_M^2}{2g}=40m\qquad avec\ \ V_M=V_E$$

$$Point\,T: \quad Z_T + \frac{P_{atm}}{\rho g} + \frac{V_T^{\ 2}}{2g}$$

$$= 0 + \frac{10^5}{10^3.10} + \frac{600}{20} = 10 + 30 = 40m$$

La ligne de la charge totale c'est la droite horizontale Z = 40m

La ligne piézométrique(en rouge) est la ligne qui relie les hauteurs $Z + \dfrac{P}{\rho g}$