

Département : Sciences de l'ingénieur

Filière : Energies renouvelables

Option : Technologies solaire et éolienne (TSE)

Cours

Mécanique des fluides

Prof. AMRANI Abdel-illah

Années universitaires : 2025-2026

Table des matières

INTRODUCTION A LA MECANIQUE DES FLUIDES.....	2
I) Notion d'un fluide.....	2
II) mécanique des milieux continus : (mécanique des fluides).....	3
III)Définition de multiples écoulements existants.....	3
IV)Propriétés physiques des fluides	5
V)Forces exercées sur un volume de fluide	7
STATIQUE DES FLUIDES.....	9
I) Pression en un point de fluide	10
II) Détermination des équations de l'hydrostatique	12
III) Evolution de la pression d'un fluide suivant une orientation verticale	16
IV) Quelques applications.....	19
IV-1) 1 ^{ère} application: Détermination des forces de pression hydrostatiques appliquées sur une plaque plane solide	19
IV-2) Traitement des Cas particuliers	23
IV-3) 2 ^{ère} application : Détermination des forces de pression sur une surface fermée – Application du principe d'Archimède.....	26
CINEMATIQUE DES FLUIDES.....	29
I) Description lagrangienne – Variables lagrangiennes – Trajectoires.....	29
II) Description Eulérienne - Variables d'Euler – Lignes de courant.....	31
III) Notion d'accélération d'une particule fluide et dérivée particulaire.....	33
IV) Notion de Débit massique et Débit volumique traversant une surface.....	35
V) Détermination de l'équation de conservation de masse : (équation de continuité).....	36
DYNAMIQUE DES FLUIDES PARFAITS ET INCOMPRESSIBLES.....	40
I) Détermination des équations d'Euler : Expression générale du mouvement d'un fluide parfait.....	40
II) Détermination de l'équation de Bernoulli	42
III) Applications du théorème de Bernoulli	46
DYNAMIQUE DES FLUIDES REELS (VISQUEUX) ET INCOMPRESSIBLES.....	52
I) La viscosité	52
II) Equations de Navier Stockes	54
III) Ecoulements permanents et unidirectionnels.....	55
III-1 Ecoulement dans un canal plan.....	57
IV) Nombre adimensionnel de Reynolds.....	60
IV-1) Nature du régime d'écoulement.....	60
IV-2) Expérience de Reynolds 1883.....	61
CALCUL DES PERTES DE CHARGES.....	63
I) Définition.....	63
II) Pertes de charges linéaires	63
III) Pertes de charges singulières.....	69
IV) Généralisation de l'équation de Bernoulli pour une installation hydraulique.....	73

INTRODUCTION A LA MECANIQUE DES FLUIDES

I) Notion d'un fluide

Les différents états de la matière peuvent être groupé dans l'ordre suivant : solide, fluide, plasma, condensat de Bose-Einstein ainsi que le superfluide.

Un fluide, qu'il soit liquide ou gazeux, se caractérise par l'absence de rigidité et par sa capacité à subir d'importantes déformations sous l'effet de forces extérieures, même si ces forces sont très faibles. Notons que la spécificité d'un fluide réside essentiellement dans l'agitation et le dynamisme des particules fluides qui le compose. À petite échelle dite microscopique, les molécules d'un fluide peuvent se déplacer librement les unes par rapport aux autres, ce qui leur confère un certain désordre et les distingue des solides, dont les molécules sont fixées dans une structure régulière. Alors qu'un solide conserve sa structure cohérente et ne se déforme que faiblement, un fluide, quant à lui, s'écoule librement sous l'effet des contraintes extérieures ou de son poids.

Par conséquent, un solide garde sa forme spécifique, tandis qu'un fluide adopte la forme du récipient ou du milieu qui le contient.

La limite entre les solides et les fluides n'est pas parfaitement lucide. En effet, des substances comme les pâtes en général ou certaines solutions composées de polymères très denses et concentrées les gelées et les peintures, peuvent se comporter à la fois comme des solides et comme des liquides.

Les fluides, dépourvus de forme propre, se classent en liquides et en gaz. Le liquide, à l'image de l'eau, est un fluide quasi incompressible qui adopte la forme du contenant tout en conservant une surface libre au contact de l'atmosphère. Il se distingue par un volume constant ou propre, caractéristique de son état.

Un gaz, tel que l'air, est un fluide compressible. Une quantité (masse) donnée de gaz se dilate pour occuper l'ensemble du volume mis à sa disposition. Contrairement aux liquides, les gaz ne possèdent donc pas de volume propre. À l'échelle microscopique, les molécules des liquides restent relativement proches et liées par des interactions qui limitent leur désordre, tandis que celles des gaz sont beaucoup plus espacées et dépourvues de telles liaisons.

De plus, il convient de noter enfin que les plasmas peuvent également être considérés comme des fluides. En effet, un plasma correspond à un gaz ionisé dont les particules chargées interagissent entre elles et avec les champs électromagnétiques.

Enfin, il est important de rappeler que le condensat de Bose-Einstein (CBE) constitue un état particulier de la matière, obtenu lorsque des bosons sont refroidis à une température extrêmement proche du zéro absolu (0 K).

II) mécanique des milieux continus : (mécanique des fluides)

La mécanique des fluides est la branche de la physique qui étudie le comportement des fluides, qu'ils soient en mouvement ou au repos. Elle se divise classiquement en deux grandes sous-disciplines :

- **La statique des fluides**, qui s'intéresse aux fluides immobiles, comme l'hydrostatique pour les liquides.
- **La dynamique des fluides**, qui étudie les fluides en mouvement, telle que l'hydrodynamique pour les liquides ou l'aérodynamique pour les gaz.

En dynamique des fluides, les écoulements des gaz et des liquides sont étudiés et analysés à l'échelle macroscopique, en s'appuyant sur les principes et lois de la mécanique newtonienne. c'est-à-dire en considérant le fluide comme un milieu continu plutôt qu'au niveau des particules individuelles.

Autrement dit, Dans l'étude de la mécanique des fluides, on néglige dans un premier temps le fait que le fluide est constitué de molécules et les mouvements individuels de celles-ci ne sont pas pris en compte. Le fluide est ainsi considéré comme un milieu continu. Dans ce cadre, on s'intéresse au comportement d'un petit élément (volume) du fluide, contenant un très grand nombre de molécules, appelé particule fluide, afin d'analyser le mouvement global du milieu.

III) Définition de multiples écoulements existants.

Le comportement d'un écoulement est défini par plusieurs grandeurs macroscopiques, notamment le champ des vitesses, la pression en chaque point, la densité (ou masse volumique), la température, ainsi que d'autres paramètres caractéristiques selon le type de fluide et les conditions de l'écoulement.

La résolution de ce type de problème implique le calcul de toutes ces variables pour chaque particule fluide $\mathbf{M}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{t})$, où \mathbf{x}, \mathbf{y} et \mathbf{z} désignent les coordonnées spatiales du point considéré et \mathbf{t} le temps.

Les écoulements peuvent présenter une grande diversité, chacun étant caractérisé par des comportements particuliers selon les propriétés du fluide et les conditions de l'écoulement.

Le tableau suivant présente les différents types d'écoulements existants et leurs descriptions :

Type d'écoulement	Description
Ecoulement unidimensionnel	On parle d'écoulement unidimensionnel lorsque les grandeurs caractéristiques du fluide sont constantes sur une section transversale, de sorte qu'elles ne varient que le long d'une seule direction et éventuellement dans le temps, à titre exemple $\mathbf{M}(\mathbf{x}, \mathbf{t})$
<u>Ecoulement (plan) bidimensionnel</u>	A titre d'exemple $\mathbf{M}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{t})$
Ecoulement (spatial) tridimensionnel	A titre d'exemple $\mathbf{M}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{t})$
Ecoulement permanent ou instationnaire (non permanent)	Un écoulement est qualifié de permanent ou stationnaire lorsque ses grandeurs caractéristiques restent constantes dans le temps. À l'inverse, si ces grandeurs varient au cours du temps, l'écoulement est dit non permanent ou instationnaire.
Ecoulement uniforme	On parle d'écoulement spatialement uniforme lorsque les variables caractéristiques sont identiques en tout point de l'espace, bien qu'elles puissent évoluer au cours du temps.
Ecoulement laminaire	Un écoulement est qualifié de laminaire lorsque le fluide se déplace en couches parallèles appelées lamelles. Dans ce type d'écoulement, ces couches glissent les unes sur les autres sans se mélanger.
	On parle d'écoulement turbulent lorsque le fluide se déplace de façon désordonnée, générant des tourbillons de différentes tailles

Ecoulement turbulent

et un mélange intense des particules. Dans ce type d'écoulement, Les grandeurs caractéristiques, telles que la vitesse, présentent alors des variations aléatoires autour de valeurs moyennes.

IV) Propriétés physiques des fluides :

Il existe plusieurs paramètres qui définissent l'état physique d'un fluide, parmi lesquels la densité, la viscosité et la pression sont les plus importants.

IV-1) La densité :

On considère un point $M(x, y, z)$ comme particule fluide limité par un élément de volume dV .

On peut définir la densité ou la masse volumique du fluide à ce point par la relation suivante :

$$\rho = \frac{dm}{dV},$$

Où dV est le volume qui renferme la totalité des molécules ayant la masse dm . La densité exprime ainsi la quantité de matière (masse) par unité de volume. On la note : $\rho(x, y, z, t)$.

Son unité est le $[Kg / m^3]$.

Un fluide est qualifié d'incompressible lorsque sa densité ne varie pas, autrement dit lorsqu'une même masse conserve un volume constant. Cette propriété caractérise les liquides. En revanche, si la densité change en fonction des conditions, notamment de la pression, le fluide est dit compressible.

En thermodynamique, on établit qu'un fluide obéit à une relation appelée équation d'état, qui relie la température $T(x, y, z, t)$, la pression $P(x, y, z, t)$ et la densité $\rho(x, y, z, t)$. Cette équation peut être obtenue de manière empirique à partir de mesures expérimentales, comme pour l'eau, ou déduite d'un modèle théorique, tel que la théorie cinétique des gaz pour les gaz parfaits. Pour un gaz parfait, l'équation d'état s'exprime sous la forme : $\frac{P}{\rho} = R.T$

Avec :

P : Pression	Pascal (N/m ²) où (1atm = 1 bar = 10 ⁵ Pas)
T : Température	Degrés Kelvin (°K)
R : Constante du gaz parfait	$R = 287 \text{ m}^2 / (\text{s}^2 \text{ °K}) = 8,314 \text{ 411 (J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1})$
ρ : Masse volumique	(Kg/m ³)

Dans le cas où l'eau pur est à 0°C = 273,15°K, la masse volumique prend la valeur $\rho = 1000 \text{ Kg/m}^3$.

D'autres exemples concernant la masse volumique de l'air pour différentes conditions :

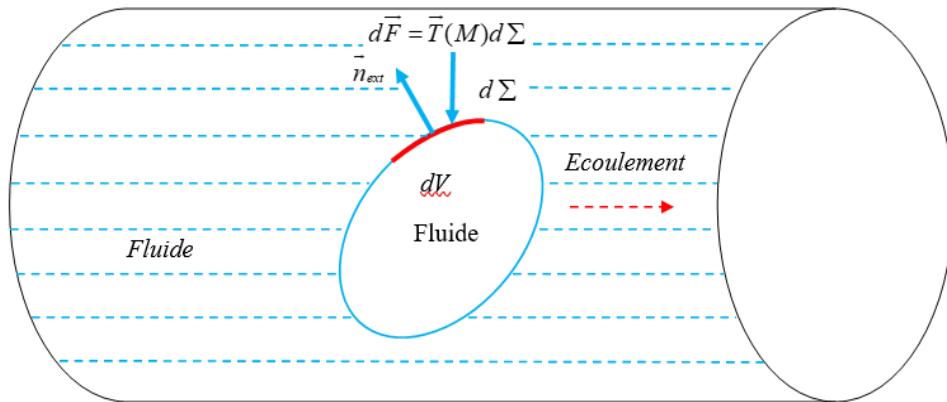
Conditions sur la température de l'air T	Conditions sur la pression P	La masse volumique correspondante ρ
0°C	1 bar	1,29Kg/m ³
0°C	0,9 bar	1,14Kg/m ³
100°C	1 bar	0,93Kg/m ³

IV-2) La viscosité

C'est une propriété fondamentale des fluides en mouvement, exprimant leur résistance à l'écoulement. Elle résulte des forces de frottement internes qui apparaissent entre les particules du fluide lorsqu'elles se déplacent les unes par rapport aux autres. Cette interaction provoque une perte d'énergie mécanique sous forme de chaleur, ce qui se traduit par un ralentissement du mouvement du fluide.

V) Forces exercées sur un volume de fluide :

Considérons un élément de volume dV de fluide, délimité par une surface fermée (Σ) et situé à l'intérieur d'un fluide qui s'écoule.



Le volume V de fluide considéré est soumis à deux types principaux de forces extérieures :

V-1) Les forces volumiques (ou massiques) :

Elles agissent sur l'ensemble du volume du fluide, comme le poids, les forces électriques ou magnétiques. Ces forces sont proportionnelles au volume considéré. Par exemple, le poids du volume infinitésimal dV , dû à l'attraction terrestre, est donné par $\rho \vec{g} dV$, où \vec{g} représente le vecteur de l'accélération de la pesanteur (orienté vers le bas) et ρ la masse volumique du fluide.

V-2) Forces surfaciques :

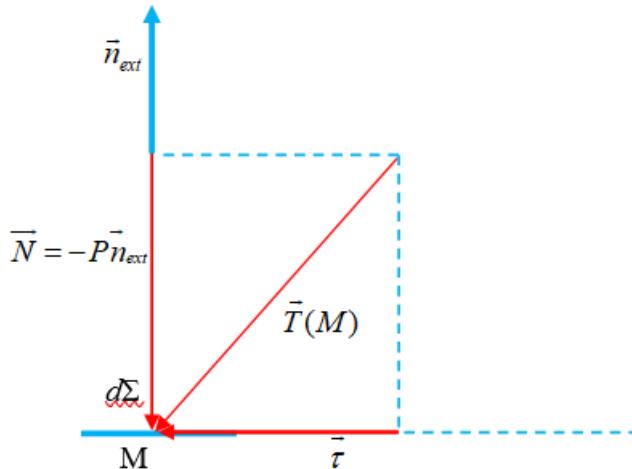
Il s'agit des forces exercées sur le volume élémentaire (dV) par le reste du fluide au travers de la surface externe (Σ). Considérons un élément infinitésimal de cette surface, noté ($d\Sigma$), orienté par un vecteur unitaire \vec{n}_{ext} dirigé vers l'extérieur du volume (dV). Le fluide environnant exerce alors sur cet élément de surface une force qui traduit les interactions mécaniques entre les particules du fluide de part et d'autre de (Σ) :

- Une force de pression, dirigée perpendiculairement à l'élément de surface $d\Sigma$: $-P d\Sigma \vec{n}_{ext}$.
- Une force visqueuse (causée par le frottement), appliquée tangentiellement à $d\Sigma$: $\vec{\tau} d\Sigma$. Cette dernière n'apparaît que lorsque le fluide est en écoulement.

Ainsi, la force totale exercée sur l'élément de surface $d\Sigma$ résulte de la somme de ces deux contributions :

$$d\vec{F} = \vec{T}(M)d\Sigma = (-P\vec{n}_{ext} + \vec{\tau})d\Sigma.$$

Le vecteur $\vec{T}(M)$ est désigné comme le vecteur contrainte au point M; il exprime la force appliquée par unité de surface en ce point du fluide.



STATIQUE DES FLUIDES

La statique des fluides a pour objet l'analyse des états d'équilibre des fluides immobiles, en déterminant les forces qui s'y exercent. Dans le cas particulier des liquides, cette étude est désignée sous le terme d'hydrostatique.

Imaginons un réservoir contenant un liquide, qu'il soit exposé à l'air libre ou hermétiquement clos. Ce liquide est supposé immobile par rapport à un repère galiléen $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$. En un point M du fluide, on considère un petit volume élémentaire dV .

L'absence d'accélération des particules fluides traduit l'état de repos. Dès lors, selon le principe fondamental de la dynamique, la résultante des forces appliquées sur cet élément doit être égale à zéro.

Sur cet élément de volume dV , il existe deux catégories de forces qui s'exercent :

1) Les forces volumiques :

Notés $\rho \vec{f}_V dV$, Ces forces s'exercent sur la totalité du volume du fluide, affectant ainsi chaque particule fluide. Elles sont décrites par leurs composantes $(\rho X_V dV, \rho Y_V dV, \rho Z_V dV)$ et traduisent une **force exercée par unité de masse** (\vec{f}_V).

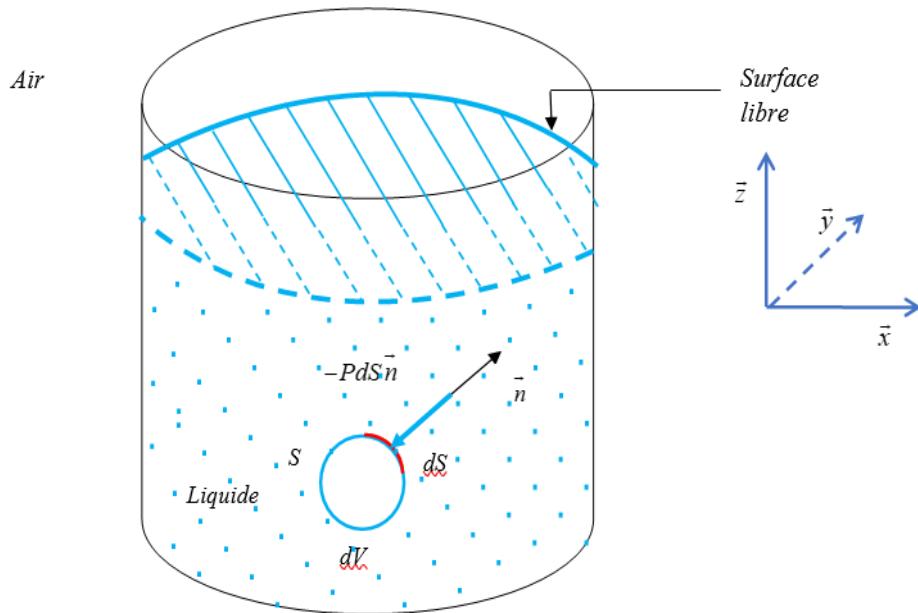
Exemple typique : la force de pesanteur, exprimée par $\vec{f}_V = \vec{g}$, où \vec{g} représente le vecteur de l'accélération gravitationnelle, orienté verticalement vers le bas.

2) Forces surfaciques :

Elles proviennent des actions exercées par le fluide environnant sur la surface (S) entourant le petit volume (dV). Lorsque le fluide est au repos, ces forces ne correspondent qu'à la pression exercée perpendiculairement à la surface : $-\iint_S P dS \vec{n}$

Où (dS) désigne un élément de surface de (S) et \vec{n} est le vecteur normal extérieur à dV .

Les forces visqueuses, liés aux contraintes de cisaillement, sont absentes puisque le fluide est immobile (pas de frottement).

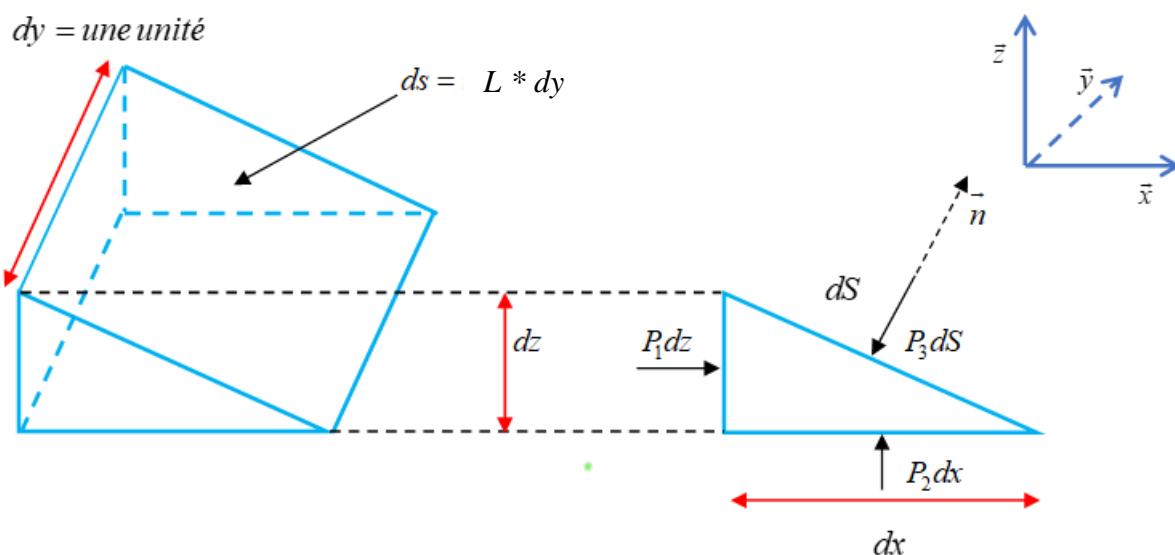


I) Pression en un point de fluide :

En un point M, la pression s'exerce normalement à l'élément de surface dS qui l'enveloppe. On cherche à démontrer que sa valeur est indépendante de l'orientation de cette surface dS .

Pour cela, on considère un prisme triangulaire infinitésimal de fluide centré sur M, de largeur unitaire (une unité) suivant y et de dimensions dx et dz .

L'étude est menée dans le plan (\bar{x}, \bar{y}) , où les forces de pression sur les trois faces du prisme seront comparées pour établir cette propriété d'isotropie.



- Le prisme infinitésimal est en équilibre sous l'effet de forces volumiques ($\rho \vec{f}_V dV$) agissant sur lui. Ces forces, de nature quelconque, possèdent les composantes cartésiennes ($\rho X_V dV, \rho Y_V dV, \rho Z_V dV$).

Si l'on considère uniquement le poids du fluide, ces composantes se réduisent à : $X_V = Y_V = 0$ et $Z_V = -g$, où g représente l'accélération de la pesanteur dirigée vers le bas.

- Sous l'effet des forces de pressions appliquées orthogonalement sur les surfaces extérieures du prisme, on a :

$$P_1 dz \vec{x} + P_2 dx \vec{z} - P_3 ds \vec{n}. \text{ Où : } \vec{n} = \sin \alpha \vec{x} + \cos \alpha \vec{z}, dx = ds \cos \alpha, \text{ et } dz = ds \sin \alpha$$

Puisque la somme des forces appliquées sur l'ensemble de l'enceinte étudiée est nulle on trouve que :

- **Par projection sur l'axe des X :**

$$\rho X_V dV + P_1 dz - P_3 \sin \alpha ds = 0 \Rightarrow \rho X_V \frac{dx \cdot dz}{2} + P_1 dz - P_3 dz = 0 \Rightarrow P_3 = P_1 + \frac{\rho X_V}{2} dx$$

- **Par projection sur l'axe des Z :**

$$\rho Z_V \frac{dx dz}{2} + P_2 dx - P_3 \cos \alpha ds = 0 \Rightarrow P_3 = P_2 + \frac{\rho Z_V}{2} dz$$

En faisant tendre les dimensions de l'élément infinitésimal vers zéro c-à-d ($dz \rightarrow 0$ et $dx \rightarrow 0$), l'expression précédente se simplifie pour donner : $P_1 = P_2 = P_3$.

Cela signifie que la pression au point M, dans un fluide immobile, ne dépend pas de l'orientation de la surface considérée. On la note $P(M, t)$.

NB : Pour deux points M et M' qui se situent localement très proches l'un par rapport à l'autre :

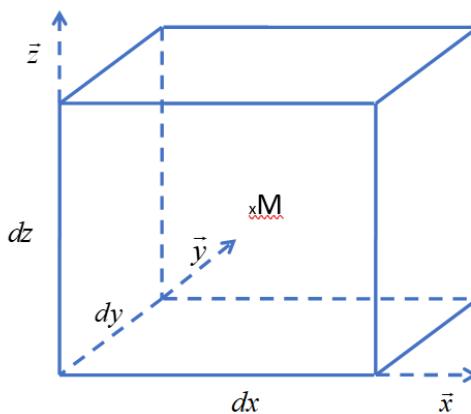
$$M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \xrightarrow{x} M' \begin{pmatrix} x + dx \\ y + dy \\ z + dz \end{pmatrix} \text{ Ceci implique que} \xrightarrow{} P(M') = P(M) + dP$$

Avec : $dP = \frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz$

II) Détermination des équations de l'hydrostatique :

Cette partie a pour objet principal la détermination des équations locales de l'hydrostatique. Pour cela nous allons utiliser le principe fondamental de la dynamique qui stipule que la somme des forces appliquées sur une enceinte très petites (infinitésimale) de volume dV enveloppant un point M du fluide est nulle.

On va considérer alors que cet élément de volume dV est sous forme d'un parallélépipède de dimension dx, dy et dz . Sachant que la surface de chaque facette est notée dS .



Cherchons alors l'expression de la pression au point M ayant x, y et z comme coordonnées cartésiennes : $P(M) = P(x, y, z)$.

Cet élément de volume infinitésimal est en équilibre sous les différentes forces volumiques et surfaciques.

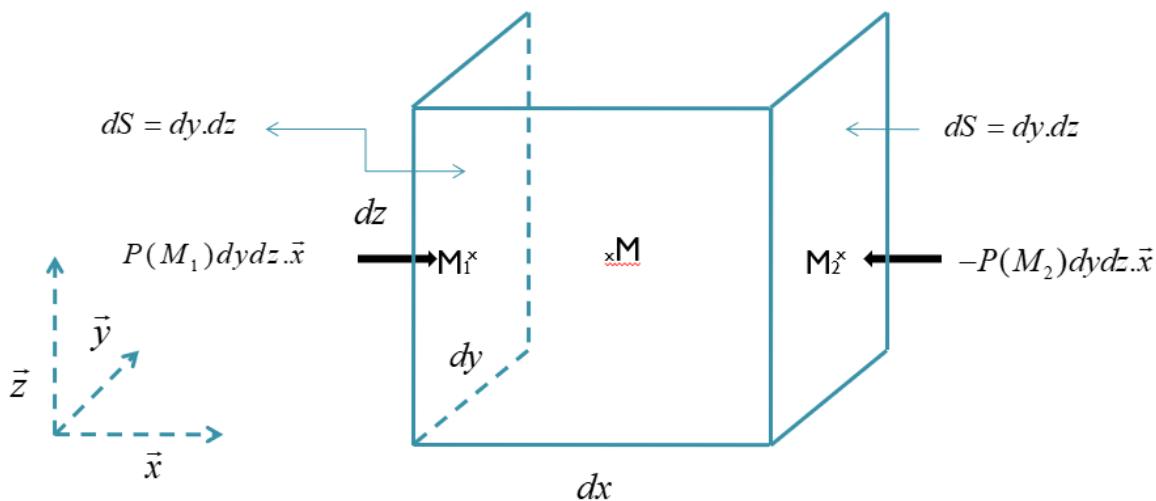
Par l'application du principe fondamental de la dynamique on peut écrire que :

$$\sum \vec{F} /_{dV} = \vec{0}$$

→

$$\rho g dV \vec{Z} + \int_{(S)} P dS \vec{n} = \vec{0}$$

➤ **Prenons les forces parallèles à l'axe des x :**



Les points M_1 et M_2 représentent la projection du point M sur les deux faces parallèles au plan $(\overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$:

$$P(M_1)dydz\vec{x} + (-P(M_2)dydz\vec{x}) = \vec{0} \quad \longrightarrow \quad P(M_1) - P(M_2) = \vec{0}$$

Et puisque M a comme coordonnées (x, y, z) . Alors M_1 et M_2 ont respectivement les coordonnées $(x - \frac{dx}{2}, y, z)$ et $(x + \frac{dx}{2}, y, z)$

$$\longrightarrow P(x - \frac{dx}{2}, y, z) - P(x + \frac{dx}{2}, y, z) = 0 \quad \longrightarrow \quad P(x + \frac{dx}{2}, y, z) - P(x - \frac{dx}{2}, y, z) = 0$$

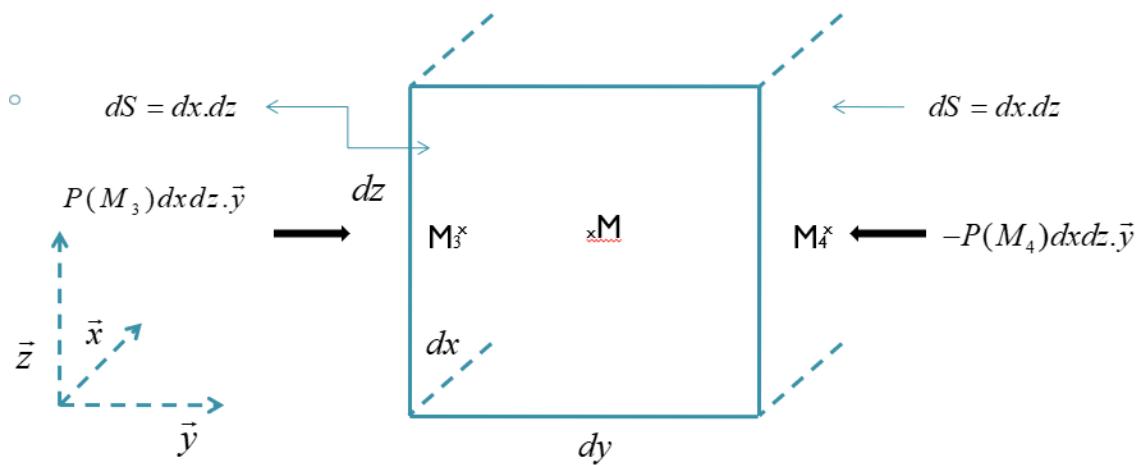
Donc :

$$\frac{\partial P}{\partial x} dx = 0$$

Et puisque dx représente une distance on peut facilement déduire que :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 0 \quad | \quad (I)$$

➤ En procédant de la même manière, prenons les forces parallèles à l'axe des y :



Les points M_3 et M_4 représentent la projection du point M sur les deux faces parallèles au plan (\vec{x}, \vec{z}) :

$$P(M_3)dx.dz.\vec{y} + (-P(M_4)dx.dz.\vec{y}) = \vec{0} \quad \rightarrow \quad P(M_4) - P(M_3) = \vec{0}$$

Les points M_4 et M_3 ont respectivement les coordonnées $(x, y + \frac{dy}{2}, z)$ et $(x, y - \frac{dy}{2}, z)$:

$$\rightarrow P(x, y + \frac{dy}{2}, z) - P(x, y - \frac{dy}{2}, z) = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial P}{\partial y} dy = 0$$

Et puisque dy représente une distance on peut facilement déduire que :

$$\boxed{\frac{\partial P}{\partial y} = 0} \quad (\text{II})$$

➤ Finalement, prenons les forces parallèles à l'axe des z :

Les points M_5 et M_6 représentent la projection du point M sur les deux faces parallèles au plan (\vec{x}, \vec{y}) :

$$\rightarrow dx dy [P(M_6) - P(M_5)] + \rho g dx dy dz = 0$$

Les points M_5 et M_6 ont respectivement les coordonnées $(x, y, z + \frac{dz}{2})$ et $(x, y, z - \frac{dz}{2})$

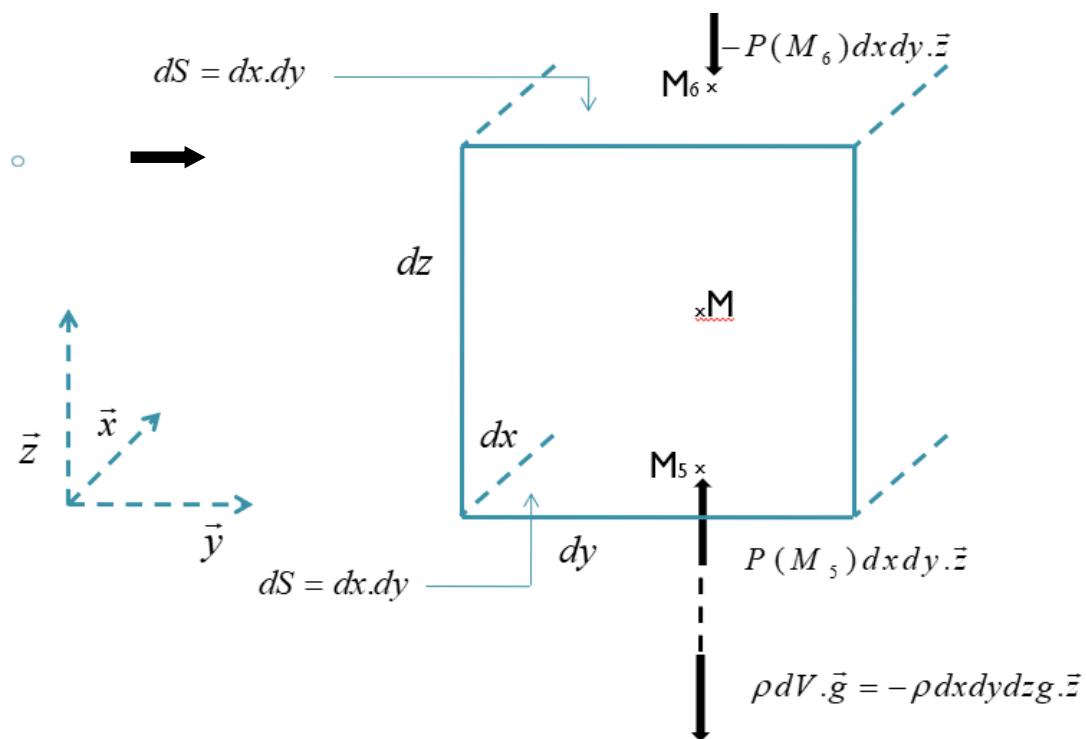
$$\rightarrow P(M_6) - P(M_5) = P(x, y, z + \frac{dz}{2}) - P(x, y, z - \frac{dz}{2}) = \frac{\partial P}{\partial z} dz$$

Donc :

$$\rightarrow \frac{\partial P}{\partial z} dx dy dz + \rho g dx dy dz = 0$$

On peut constater donc que :

$$\rightarrow \frac{\partial P}{\partial z} + \rho g = 0$$



Finalement, on regroupe les trois équations retrouvées précédemment :

$$\begin{aligned} & \vec{g} \downarrow \\ & \begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial P}{\partial z} + \rho g = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

On rajoute aussi que :

$$\rho \vec{g} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -\rho g \end{vmatrix} \quad \rightarrow \quad \overrightarrow{\text{grad}}P = \begin{vmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} \\ \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial P}{\partial z} \end{vmatrix} \quad \rightarrow \quad \overrightarrow{\text{grad}}P + (-\vec{g} \rho) = \vec{0}$$

Donc : $\overrightarrow{\text{grad}}P - \rho \vec{g} = \vec{0}$

A la fin on déduit que :

$$-\overrightarrow{\text{grad}}P + \rho \vec{g} = \vec{0}$$

Ce sont les trois équations de la statique des fluides

Il en résulte que la pression ne dépend pas des coordonnées x et y ; autrement dit, elle demeure constante dans le plan horizontal (x, y). En revanche, elle varie uniquement suivant la direction verticale Oz, selon la relation :

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g \quad \text{Ou bien} \quad dP + \rho g dz = 0$$

La grandeur ρg est surnommée le **poids volumique** du fluide. Le plan (x,y) correspond à une **surface isobare**, c'est-à-dire une surface sur laquelle la **pression est identique en tout point**.

III) Evolution de la pression d'un fluide suivant une orientation verticale :

III-1) Fluide incompressible

Pour ce type de fluide, la densité ρ ne varie pas (comme c'est habituellement le cas pour les liquides). L'expression différentielle précitée est alors exprimée de la manière suivante :

$$d(P + \rho g z) = 0$$

Après intégration, l'expression devient :

$$P + \rho g z = \text{cste}$$

Cette constante obtenue, notée P_g , est surnommée pression motrice.

$$P + \rho g z = \text{cste} = P_g$$

En résumé, Pour un fluide incompressible au repos, la pression motrice $P + \rho g z = P_g$ reste constante. Si l'axe vertical z est orienté vers le haut, la pression diminue donc avec l'altitude.

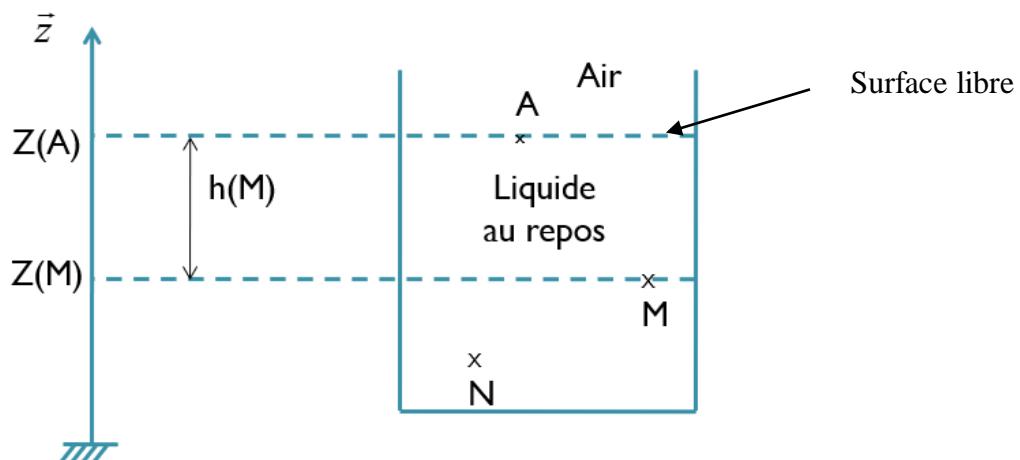
Si l'on considère deux points du fluide placés respectivement aux altitudes z_1 et z_2 , par rapport à un plan de référence quelconque, la variation de pression entre ces deux positions est donnée par la relation suivante :

$$\int_{z_1}^{z_2} dP = - \int_{z_1}^{z_2} \rho g dz - \rho g \int_{z_1}^{z_2} dz \quad \rightarrow \quad P_2 - P_1 = -\rho g (z_2 - z_1)$$

On en déduit que la variation de la pression dans un fluide au repos est proportionnelle à la différence d'altitude entre deux niveaux considérés. La relation entre pression et hauteur est donc linéaire.

En conclusion, pour deux points M et N d'un même fluide incompressible et immobile, on peut écrire la relation suivante :

$$P_M = P_N + \rho g (z_N - z_M) = P_N + \rho g h_{NM}$$



Si l'on considère un point A du fluide appartenant à la surface libre — autrement dit la zone de contact entre le fluide et l'air ambiant — la pression en ce point correspond à la pression de l'atmosphère environnante :

$$P_A = P_{atm} = 1 \text{ atmosphère} = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pascal} \approx 1 \text{ bar}$$

Sachant que le pascal (Pa) représente l'unité internationale de la pression avec,

$$1 \text{ pascal} = \frac{1 \text{ Newton}}{m^2} = 1 \text{ Pa}$$

Donc, pour tout point M de fluide au repos on peut écrire :

$$P(M) = P_{atm} + \rho g(z(A) - z(M))$$

Avec $h(M) = z(A) - z(M)$: profondeur où se situe le point M par rapport à la surface libre.

$$\rightarrow P(M) = P_{atm} + \rho g h(M)$$

Si on a une information sur la pression atmosphérique (P_{atm}) et la profondeur $h(M)$, on peut facilement déterminer la pression en chaque point du liquide.

Par définition la différence de pression ayant la notation $P - P_{atm}$ représente la pression effective ou pression relative. Par contre P est surnommée pression absolue.

III-2) Fluide compressible

Contrairement aux fluides incompressibles, ils sont caractérisés par des masses volumiques ρ qui varient selon différents paramètres. Il est donc nécessaire de prendre en considération cette variation lors de l'intégration de l'équation précitée.

La relation entre la masse volumique et la pression d'un fluide compressible est donnée par

son équation d'état. Pour un gaz parfait, cette équation prend la forme $\frac{P}{\rho} = rT$. Dans le cas

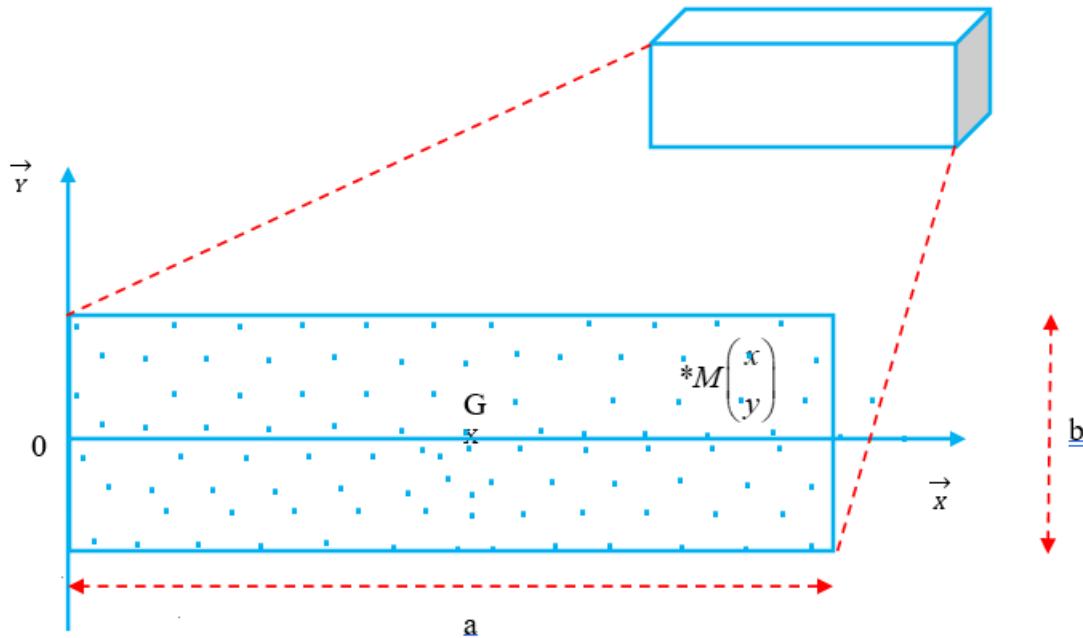
d'un liquide compressible maintenu à température constante (isotherme), on a : $\frac{d\rho}{\rho} = \chi dP$,

avec χ représente le coefficient de compressibilité isotherme. Ce coefficient présente une faible dépendance vis-à-vis de la pression. Pour l'eau, dans les conditions normales de température et de pression, il vaut approximativement : $\chi = 5 \cdot 10^{-10} Pa^{-1}$.

IV) Quelques applications

IV-1) 1^{ère} application: Détermination des forces de pression hydrostatiques appliquées sur une plaque plane solide :

On considère une plaque solide plane ayant une surface S . Pour faciliter l'étude, on admet que cette plaque est rectangulaire, de dimensions a et b , ce qui donne $S=ab$. Le plan (OXY) est alors défini de manière à être parallèle et coïncident avec cette surface.

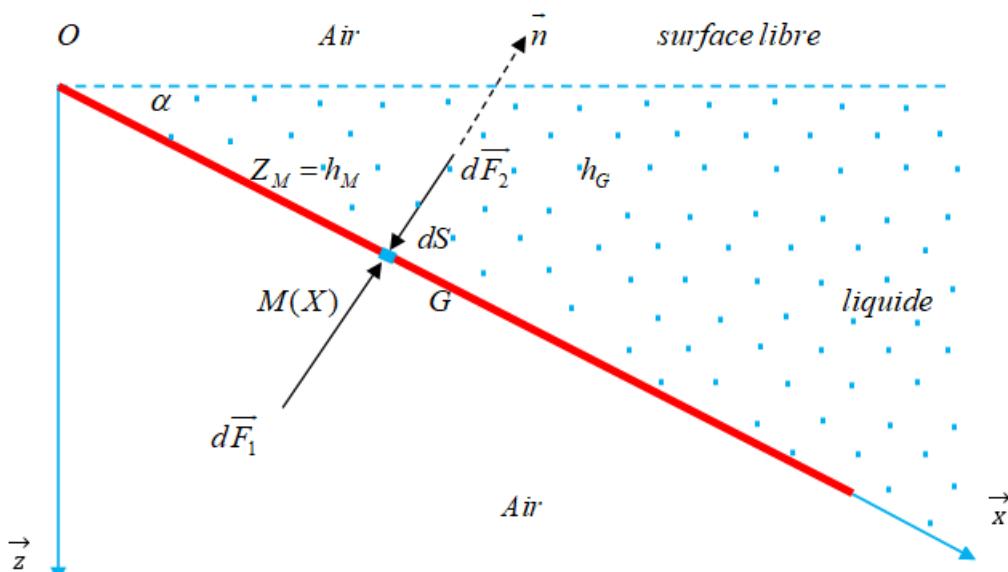


Le tableau suivant résume les expressions des coordonnées du centre d'inertie G de la plaque ainsi que le moment d'inertie quadratique de la plaque par rapport aux axes $O\vec{X}$ et $O\vec{Y}$

	Expression générale	Résultats pour une plaque rectangulaire
Les coordonnées du centre d'inertie G de la plaque	$X_G = \frac{1}{S} \iint_S X dS = \frac{1}{S} \iint_S X dXdY$	$X_G = a/2$
	$Y_G = \frac{1}{S} \iint_S Y dS = \frac{1}{S} \iint_S Y dXdY$	$Y_G = 0$
Le moment d'inertie quadratique de la plaque	$I_{OX} = \int_S Y^2 dS$	$I_{OX} = ab^3/3$
	$I_{OY} = \int_S X^2 dS$	$I_{OY} = a^3b/3$

Considérons une plaque solide plane penchée d'un angle α par rapport au plan horizontal. Cette plaque sert à séparer deux milieux distincts : un liquide incompressible au repos d'un côté, et de l'air de l'autre côté.

L'objectif est de déterminer la résultante des forces de pression exercées sur la plaque par le fluide et par l'air, en précisant son intensité, sa direction et son point d'application. L'analyse sera effectuée suivant la direction OX. Le point O est choisi sur la surface libre du fluide, et l'axe Oz est orienté vers le bas.



On considère un élément infinitésimal de surface dS de la paroi, centré sur un point M situé à la profondeur $h_M = Z_M$ par rapport à la surface libre du fluide. tel que la mesure algébrique $\overline{OM} = X$. La normale unitaire à dS , notée \vec{n} , est dirigée vers le fluide. La

pression atmosphérique étant P_{atm} , l'élément dS est soumis à deux forces élémentaires de pression, $d\vec{F}_1$ et $d\vec{F}_2$, agissant selon des directions opposées et normales à la surface :

- $d\vec{F}_1 = +P_{atm}\vec{n}dS$: représente la force appliquée par l'air sur l'élément de surface dS .
- $d\vec{F}_2 = -P_M\vec{n}dS$: représente la force appliquée par le liquide sur l'élément de surface dS .

Pour cette dernière relation, la pression du liquide qui rentre en contact avec l'élément de surface dS est représentée par P_M . Elle est déterminée grâce à la relation fondamentale de l'hydrostatique :

$$P_M = P_{atm} + \rho gh_M$$

Donc, l'expression de $d\vec{F}_2$ devient :

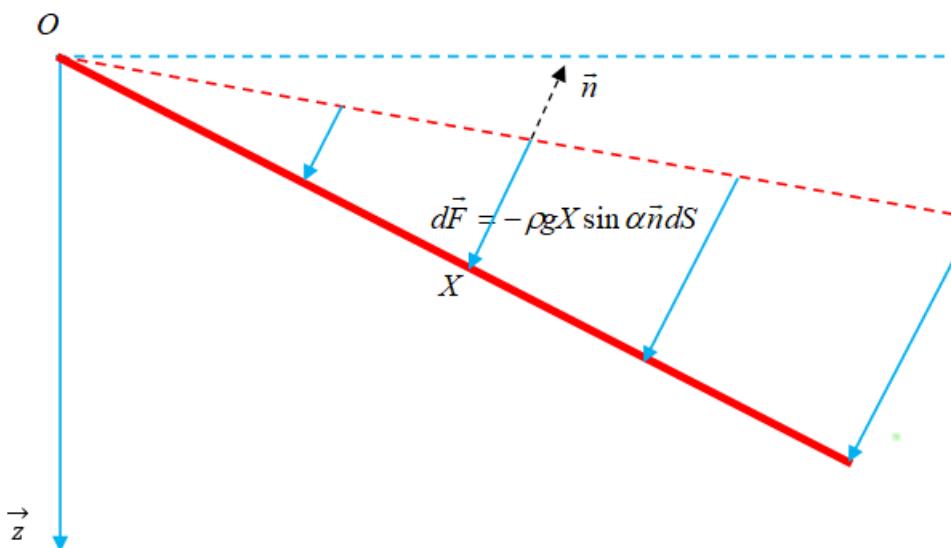
$$d\vec{F}_2 = -(P_{atm} + \rho gh_M)\vec{n}dS$$

Finalement, l'expression de la force de pression totale appliquée à l'élément de surface dS est donnée par :

$$d\vec{F} = d\vec{F}_1 + d\vec{F}_2 = -\rho gh_M\vec{n}dS$$

Et comme $h_M = X \sin \alpha$, on obtient alors :

$$d\vec{F} = -\rho g X \sin \alpha \vec{n}dS$$



La résultante des forces qui s'exercent sur la plaque solide S toute entière :

$$\vec{F} = \iint_S d\vec{F} = -\rho g \iint_S h_M dS \vec{n} = \left[-\rho g \sin \alpha \iint_S X dS \right] \vec{n}$$

On peut observer facilement que pour n'importe quelle position de l'élément de surface dS , le vecteur unitaire \vec{n} reste le même le long de la plaque solide.

Notons que :

- X_G : représente la coordonnée du centre de gravité G de la surface solide suivant l'axe OX , il est représenté par l'intégrale $\frac{1}{S} \iint_S X dS$. on obtient alors :

$$\vec{F} = -\rho g X_G S \sin \alpha \vec{n}$$

En d'autres termes :

$$\vec{F} = -\rho g h_G S \vec{n}$$

Dans cette expression, l'aire de la surface est représentée par S et h_G illustre la profondeur où est situé son centre de gravité G.

L'analyse de l'expression de \vec{F} montre qu'elle équivaut au poids d'une colonne verticale d'eau ayant pour base S et pour hauteur h_G .

Puisque la plaque a une forme rectangulaire :

$$S = a.b \quad \text{et} \quad h_G = \frac{a}{2} \sin \alpha, \quad \rightarrow \quad \text{donc} \quad \vec{F} = -\rho g \frac{a^2 b}{2} \sin \alpha \vec{n}$$

Détermination du centre de poussée :

Le centre de poussée correspond au point d'application de la force totale \vec{F} exercée par le fluide sur la paroi. Appelons-le P, de coordonnée X_P . Sa position est obtenue en écrivant que le moment de la force résultante \vec{F} par rapport à O est égal à la somme des moments des forces élémentaires $d\vec{F}$ appliquée sur la surface par rapport au même point. Ceci est traduit par la relation suivante :

$$O\vec{P} \wedge \vec{F} = \iint_S O\vec{M} \wedge d\vec{F}$$

Sous une forme scalaire, cette relation s'écrit :

$$X_P F = \iint_S X dF$$

En substituant \vec{F} et $d\vec{F}$ par leurs expressions citées précédemment, on obtient :

$$X_P \rho g h_G S = \rho g \sin \alpha \iint_S X^2 dS$$

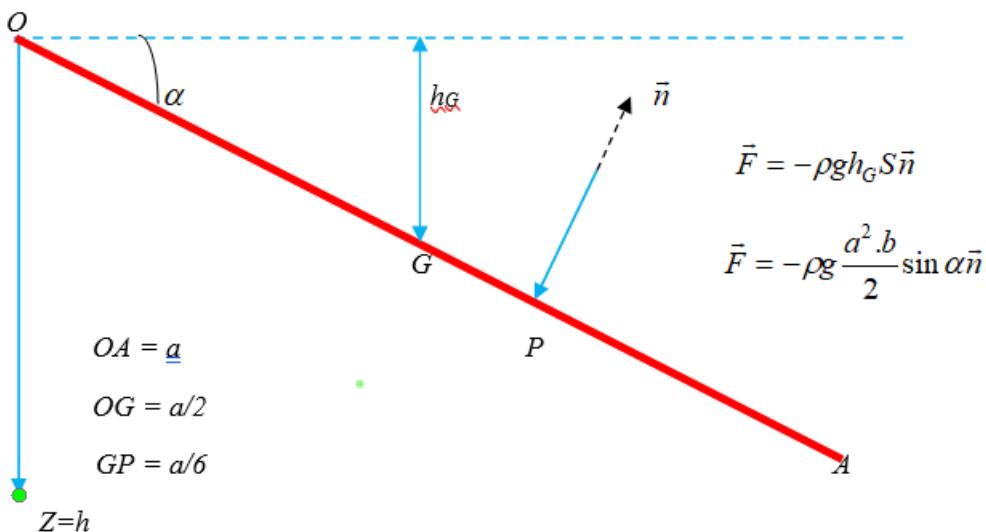
Le terme $\iint_S X^2 dS$ correspond au moment quadratique de la plaque solide par rapport à l'axe OY, une grandeur liée uniquement à sa forme et à ses dimensions. On le note I_{OY} . Par ailleurs, comme $\sin \alpha = \frac{h_G}{X_G}$, on détermine ensuite, à partir de la relation obtenue plus haut, la position du centre de poussée :

$$X_P = \overline{OP} = \frac{I_{OY}}{S \cdot X_G}$$

Lorsqu'on se limite au cas d'une plaque rectangulaire ayant les caractéristiques suivantes $S = ab$, $X_G = a/2$ et $I_{OY} = a^3 b / 3$, on obtient donc :

$$X_P = \frac{2}{3}a.$$

Ainsi, on constate que le centre de poussée se situe invariablement à une profondeur plus grande que celle du centre de gravité. C'est-à-dire ($x_P > x_G$).

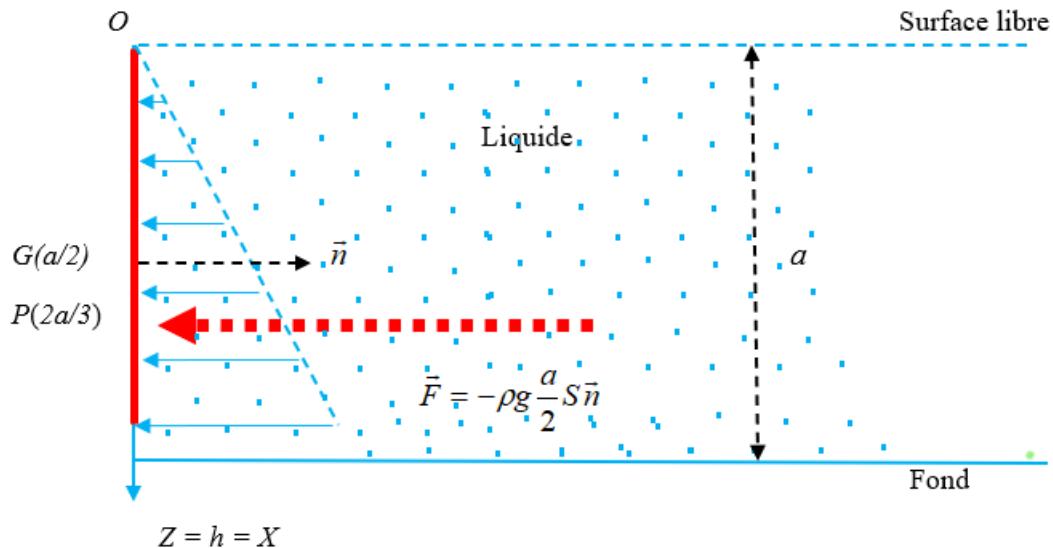


IV-2) Traitement des Cas particuliers :

a) Plaque plane en position verticale :

On étudie une plaque plane S de forme disposée verticalement, de sorte que $\alpha = \pi/2$. Supposons que son bord supérieur soit situé exactement au niveau de la surface libre du liquide.

Dans cette situation on a donc $h_M = X$ et $\sin \alpha = 1$.



Pour l'ensemble de la plaque, la force résultante se calcule en utilisant la relation :

$$\vec{F} = -\rho g h_G S \vec{n}$$

Avec $h_G = a/2$. Et donc :

$$\vec{F} = -\rho g \frac{a}{2} S \vec{n}$$

La résultante de la force est exercée en un point particulier, P, que l'on appelle le centre de poussée : $OP = \frac{2}{3}a$.

b) Plaque plane en position horizontale :

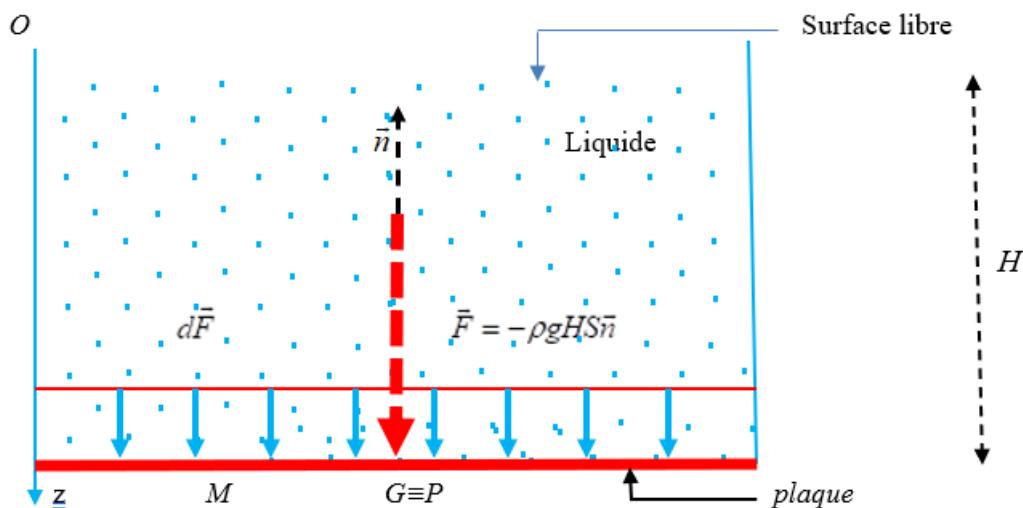
Prenons une plaque rigide, plane et de forme rectangulaire, disposée de manière horizontale dans un liquide à une profondeur H au-dessous de la surface libre. Le cas typique illustrant cette situation est le fond d'un récipient rempli d'eau.

Étant donné que l'ensemble des points M de la plaque se trouve à la profondeur constante

$h_M = H$, donc la force de pression appliquée sur un élément de surface entourant M s'écrit :

$$d\vec{F} = -\rho g h_M \vec{n} dS = -\rho g H \vec{n} dS = cst \vec{e}$$

avec $\vec{n} = -\vec{z}$.



La somme des forces de pression élémentaires constitue la résultante de la force de pression, elle est donnée par l'expression suivante :

$$\vec{F} = \int_S d\vec{F} = -\rho g h_G S \vec{n} = -\rho g H S \vec{n}.$$

La force obtenue équivaut au poids d'une colonne du liquide verticale dont la base est S et la hauteur H . Dans ce cas particulier, le point d'application de la résultante, appelé centre de poussée P , coïncide avec le centre de gravité G .

Car :

$$O\vec{P} \wedge \vec{F} = \iint_S O\vec{M} \wedge d\vec{F}$$

$$\rightarrow X_P F = \iint_S X dF$$

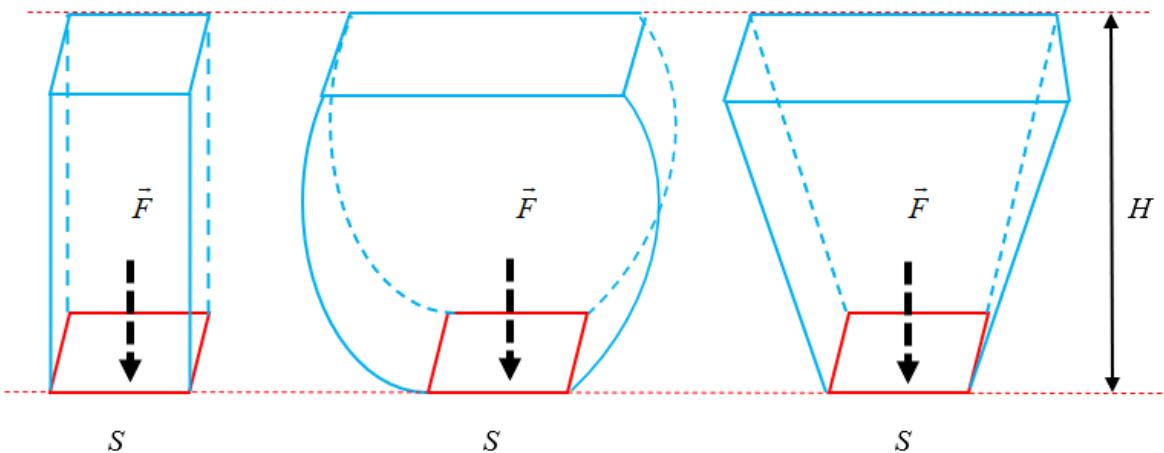
$$\rightarrow X_P \rho g H S = \rho g H \iint_S X dS$$

Donc :

$$X_P = X_G$$

N.B : (Paradoxe de l'hydrostatique).

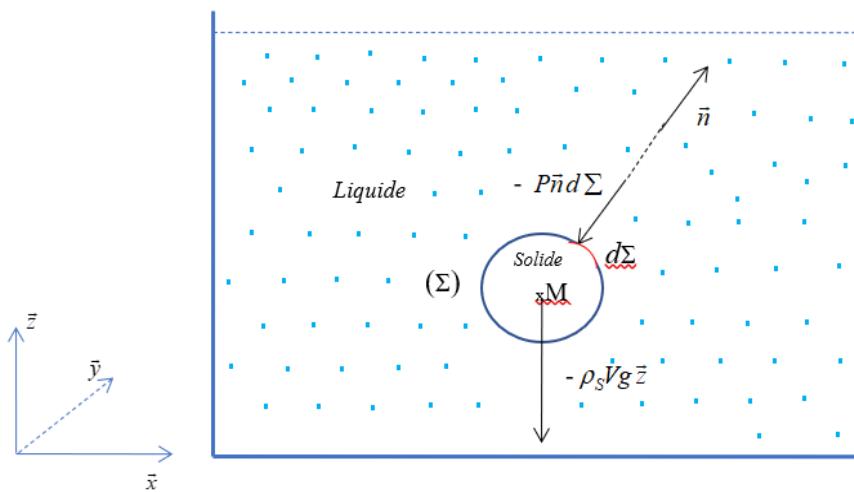
On remarque enfin que la force exercée sur le fond ne dépend absolument pas de la forme du vase. Autrement dit, si plusieurs vases ont un fond de même surface S , sont remplis du même liquide jusqu'à la même hauteur H , alors chacun de ces fonds subit **exactement la même force de pression**, même si la quantité d'eau contenue dans les vases est différente.



Les trois récipients, malgré leurs formes différentes, présentent la même force de pression sur leur fond.

IV-3) 2^{ère} application : Détermination des forces de pression sur une surface fermée – Application du principe d'Archimède :

Considérons un solide de volume V et de masse m , entouré par une surface fermée Σ , sa masse volumique est donc $\rho_s = m/V$. Il est totalement plongé au sein d'un fluide incompressible et caractérisé par une masse volumique ρ_f . L'objectif est de déterminer les forces de pression que ce fluide applique sur le solide via la surface Σ .



On distingue deux types de force qui s'exerce sur le solide :

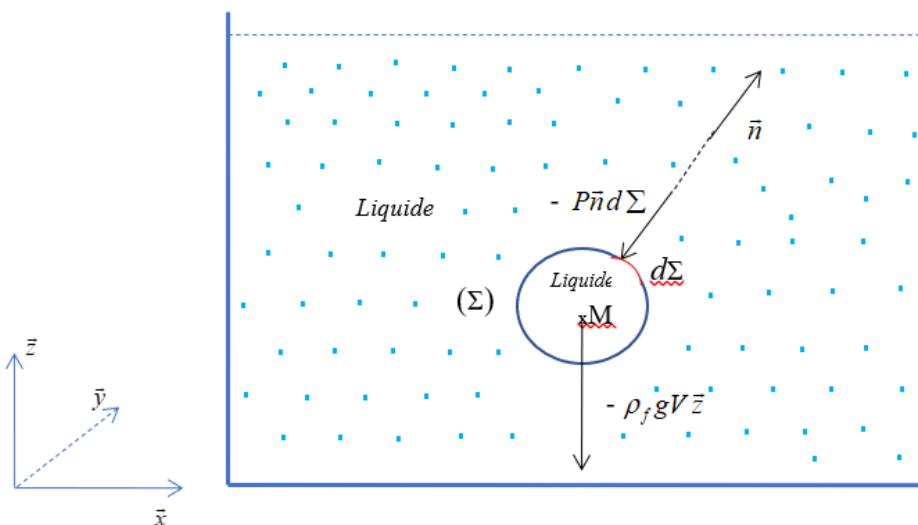
- Les forces volumiques, en particulier le poids du solide : $-\rho_s V g \vec{z}$

- Les forces de pression exercées par le fluide à travers la surface fermée Σ :

$$-\int_{\Sigma} P \vec{n} d\Sigma$$

Ce paragraphe vise à évaluer les forces de pression appliquées sur le solide.

Pour mener ce calcul, considérons fictivement que le solide de volume V est remplacé par une portion de fluide ayant le même volume et délimitée par la même surface fermée Σ .



Le fluide occupant le volume V se trouve en équilibre sous l'effet des forces extérieures :

1) Le poids propre du fluide (liquide) : $-\rho_f g V \vec{z}$

2) Les forces de pression du liquide sur la surface Σ : $-\int_{\Sigma} P \vec{n} d\Sigma$, identiques à celles appliquées sur le solide, et dont nous voulons déterminer la valeur.

L'équilibre nous donne : $-\rho_f g V \vec{z} - \int_{\Sigma} P \vec{n} d\Sigma$,

c'est-à-dire : $-\int_{\Sigma} P \vec{n} d\Sigma = \rho_f g V \vec{z}$

D'où le théorème d'Archimède :

C'est une force qui est dirigée vers le haut, son module est égal au poids du fluide déplacé par le solide (poids du fluide pouvant occuper la place du solide).

On peut également exprimer ce principe de la manière suivante :

Lorsqu'un corps est immergé dans un fluide au repos, il subit une force ascendante égale au poids du fluide qu'il déplace.

Pour un corps partiellement immergé, le volume déplacé est égal au volume immergé.

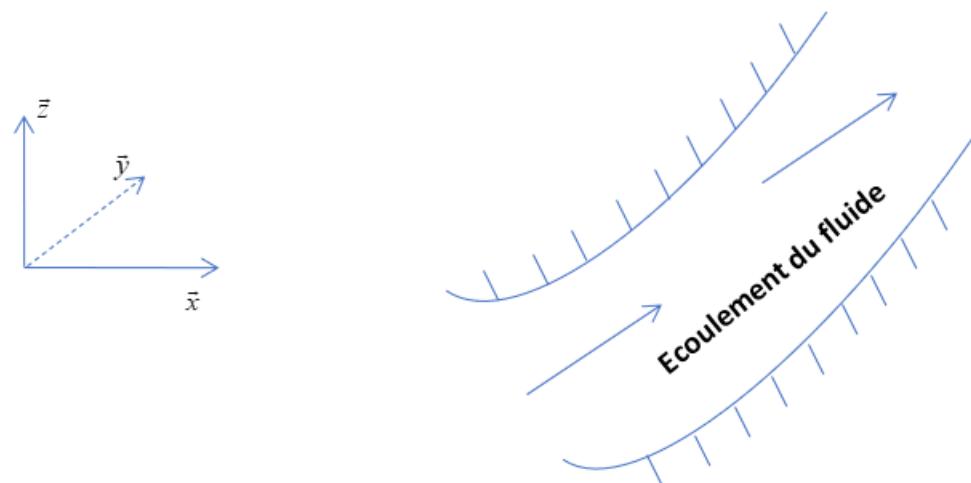
Remarque :

Le point où s'exerce la poussée d'Archimède, appelé centre de poussée P , correspond au centre de gravité du volume immergé du solide. Par conséquent, lorsque le solide est entièrement plongé dans le fluide, P coïncide avec son centre de gravité G . En revanche, si seule une partie du solide est immergée, P se situe à un endroit différent de G .

CINÉMATIQUE DES FLUIDES

La cinématique des fluides consiste à analyser le mouvement d'un fluide sans tenir compte des forces responsables de ce mouvement.

Considérons pour cela un repère de référence $R = (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ par rapport auquel le fluide s'écoule.



Deux approches permettent d'analyser l'évolution du mouvement d'un fluide dans le temps : la description lagrangienne et la description eulérienne.

I) Description lagrangienne – Variables lagrangiennes – Trajectoires :

La méthode lagrangienne consiste à observer l'évolution d'une particule fluide en la suivant dans son déplacement au fil du temps, comme on le ferait pour un point matériel.

Au moment initial $t = t_0$, chaque particule du fluide est identifiée par sa position d'origine.

Ainsi, pour une particule donnée M , on note à $t = t_0$, : $O\vec{M}(t_0) = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$.

Le fait de suivre chaque particule fluide au fil du temps dans son mouvement, revient à suivre sa trajectoire, c'est-à-dire l'ensemble de ses positions successives.

À un instant ultérieur t , la particule fluide M se trouve alors en une nouvelle position donnée par :

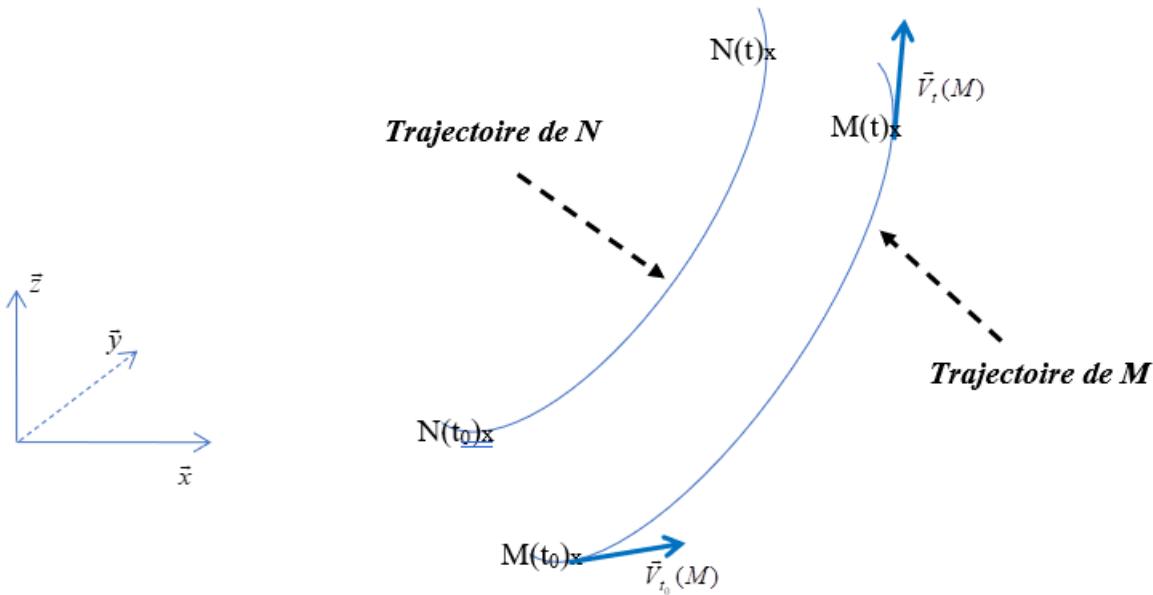
$$O\vec{M}(t) = \begin{bmatrix} x(x_0, y_0, z_0, t) \\ y(x_0, y_0, z_0, t) \\ z(x_0, y_0, z_0, t) \end{bmatrix}$$

$x(x_0, y_0, z_0, t)$, $y(x_0, y_0, z_0, t)$ et $z(x_0, y_0, z_0, t)$ sont appelées **variables lagrangiennes**. Elles correspondent aux coordonnées cartésiennes de la particule fluide M à l'instant t.

Par conséquent, il est possible d'exprimer la vitesse de la particule fluide à l'instant t,

relativement au repère R : $\vec{V}_t(M) = \frac{dO\vec{M}}{dt} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix}$.

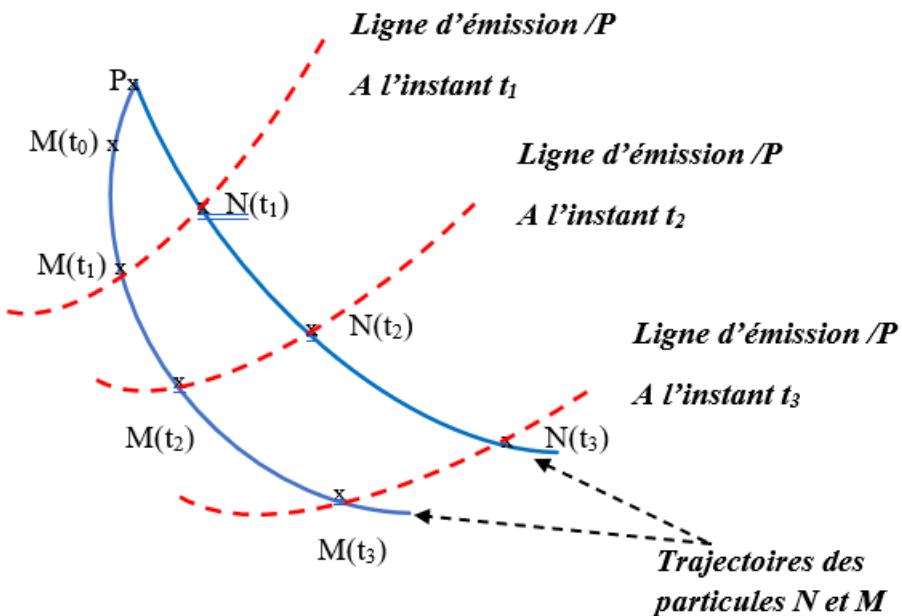
Ainsi son accélération est : $\vec{\Gamma}_t(M) = \frac{d^2O\vec{M}}{dt^2} = \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix}$.



La description lagrangienne ne permet pas de déterminer directement certaines grandeurs clés comme le gradient ou la divergence de la vitesse. Néanmoins, elle peut s'avérer très pratique lorsqu'il s'agit de suivre le mouvement d'un traceur ou d'un aérosol au sein d'un fluide qui s'écoule.

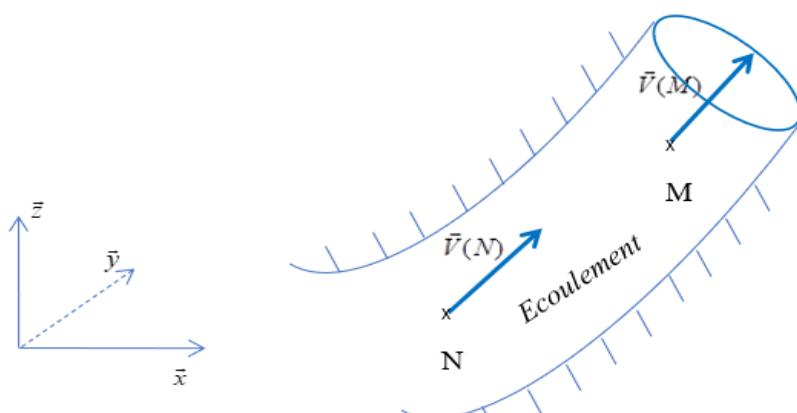
En relation avec la trajectoire, une notion fréquemment utilisée s'avère nécessaire à définir, c'est la notion des lignes d'émission. Une ligne d'émission correspond à la courbe formée, à

l'instant t , par l'ensemble des particules qui sont passées auparavant par un point géométrique donné P **avant l'instant t** . On dit alors que cette ligne d'émission est **relative au point P** .



II) Description Eulérienne - Variables d'Euler – Lignes de courant :

L'approche eulérienne ne consiste pas à suivre les particules du fluide au cours du temps. Elle s'intéresse plutôt à l'état de l'écoulement à un moment donné t , en attribuant à chaque point de l'espace la vitesse de la particule qui s'y trouve à cet instant.



Ecoulement à l'instant t

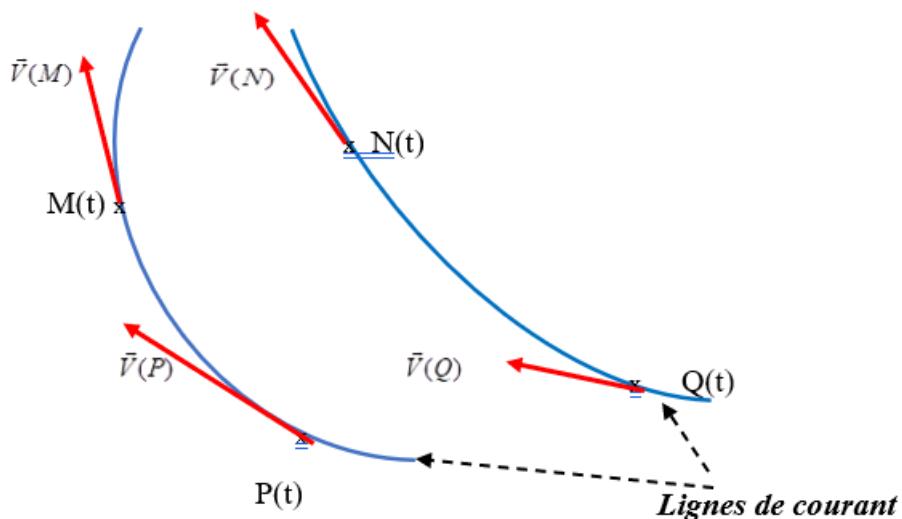
Cette illustration fournit à un instant donné une description complète de l'écoulement. Le mouvement est donc exprimé à travers le champ des vitesses, qui associe à chaque point

$$M(x,y,z) \text{ un vecteur vitesse à l'instant } t : \vec{V}(M) = \begin{bmatrix} u(x, y, z, t) \\ v(x, y, z, t) \\ w(x, y, z, t) \end{bmatrix}.$$

On désigne par $u(x, y, z, t)$, $v(x, y, z, t)$ et $w(x, y, z, t)$ les variables d'Euler : elles correspondent aux composantes du vecteur vitesse de la particule fluide traversant le point M à l'instant t .

Il est important de souligner que Dans l'approche eulérienne, la notion de trajectoire n'a plus vraiment de sens, contrairement à la description lagrangienne. En revanche, on peut définir un autre type de courbes appelées les lignes de courant.

Une ligne de courant est, par définition, une courbe telle que, en chaque point, sa tangente corresponde exactement au vecteur vitesse du fluide à l'instant considéré.



Pour obtenir l'équation des lignes de courant, on part de l'idée qu'à chaque point, la ligne de courant suit la direction du vecteur vitesse. Cela signifie que tout petit déplacement $d\vec{r}$ ayant les composantes (dx, dy, dz) le long de cette courbe est dirigé comme le vecteur vitesse $\vec{V}(u, v, w)$, c'est-à-dire $\vec{V}(u, v, w)$ et $d\vec{r}$ sont colinéaires. On en déduit alors l'équation :

$$\frac{dx}{u(x, y, z, t)} = \frac{dy}{v(x, y, z, t)} = \frac{dz}{w(x, y, z, t)}$$

On doit bien différencier trajectoires et lignes de courant. Les lignes de courant montrent la direction de l'écoulement en chaque point à un instant t bien précis : elles donnent une image instantanée des vitesses. Les trajectoires, elles, retracent le chemin suivi par une particule fluide au fil du temps et illustrent l'évolution de sa direction de mouvement.

Remarque :

Dans le cas particulier d'un écoulement permanent, où le champ de vitesses ne dépend pas du temps, on observe une propriété remarquable : les lignes de courant restent fixes. Ainsi, une particule fluide qui se déplace d'un chemin $d\vec{r} = \vec{V}dt$ durant l'intervalle de temps dt suit toujours la même ligne de courant ; cette courbe constitue alors également sa trajectoire. **Ce n'est que dans ce type d'écoulement que lignes de courant et trajectoires deviennent identiques.**

III) Notion d'accélération d'une particule fluide et dérivée particulaire :

III-1) Détermination de l'accélération:

Dans le cas d'un écoulement non permanent et spatialement variable, la vitesse \vec{V} est une

fonction de (x, y, z, t) . La dérivée partielle $\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}$ ne représente que la variation temporelle du

champ de vitesses en un point donné, et ne correspond donc pas à l'accélération lagrangienne d'une particule. Considérons la particule située au point $M(x, y, z)$ à l'instant t , où la vitesse $\vec{V}(u, v, w)$ possède les composantes u, v, w et dépendent de x, y et z . Son accélération est alors définie par :

$$\vec{\Gamma} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \begin{bmatrix} \Gamma_x = \frac{du}{dt} \\ \Gamma_y = \frac{dv}{dt} \\ \Gamma_z = \frac{dw}{dt} \end{bmatrix}$$

Par exemple, on peut écrire la variation totale de la composante u sous la forme :

$$du = \frac{\partial u}{\partial t} dt + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$$

Puisque $dx = u dt$, $dy = v dt$ et $dz = w dt$. L'expression de l'accélération suivant x devient :

$$\Gamma_x = \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} u = \frac{\partial u}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) u$$

Où $\vec{\nabla}$ désigne l'opérateur « nabla ».

On obtient de manière analogue les composantes Γ_y et Γ_z .

$$\Gamma_y = \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} v = \frac{\partial v}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} (v)$$

$$\Gamma_z = \frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} w = \frac{\partial w}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} (w)$$

On parvient finalement à l'expression générale du vecteur accélération :

$$\vec{\Gamma} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} \vec{V}$$

On peut décomposer l'accélération totale en une partie **locale**, notée $\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}$ et une partie

convective $\vec{V} \cdot \vec{\nabla} \vec{V}$ liée au mouvement du fluide.

La dérivée $\frac{d\vec{V}}{dt}$ ainsi définie est connue sous le nom de **dérivée particulaire** ou,

alternativement, de **dérivée totale**.

III-2) Formule générale :

La dérivée particulaire, initialement utilisée pour les composantes de la vitesse, peut être étendue à toute grandeur physique. Ainsi, soit $\vec{f}(x, y, z, t)$ une fonction vectorielle quelconque définie au point M. Sa dérivée par rapport au temps peut être déterminée en suivant le même principe que pour la vitesse :

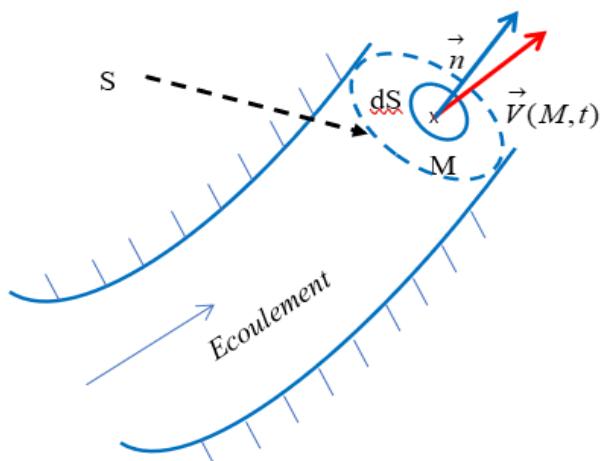
- En considérant un point immobile M(x, y, z), on étudie l'évolution de \vec{f} à ce point. Les coordonnées spatiales x, y et z sont considérées comme fixes, ce qui donne la dérivée partielle classique habituelle $\frac{\partial \vec{f}}{\partial t}$.

- b) Pour suivre l'évolution de \vec{f} le long du mouvement d'une particule fluide, on considère qu'elle parcourt pendant dt un chemin $d\vec{r}$ caractérisé d'une vitesse \vec{V} . Finalement, La dérivée correspondante est appelée dérivée particulaire ou totale de \vec{f} :

$$\frac{d\vec{f}}{dt} = \frac{\partial \vec{f}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \text{grad} \vec{f}$$

IV) Notion de Débit massique et Débit volumique traversant une surface :

On s'intéresse à un écoulement de fluide passant à travers une surface S . Soit M un point géométrique de l'écoulement appartenant à S . Il est occupé à l'instant t par une particule fluide et entouré par un élément de surface infinitésimal dS .



Le **débit massique** à travers S correspond à la masse de fluide franchissant cette surface en une unité de temps. On l'exprime par :

$$Q_m = \iint_S \rho \vec{V} \cdot \vec{n} dS$$

Où ρ désigne la masse volumique ainsi \vec{V} la vitesse au point M . Le résultat, exprimé en kg/s, correspond au flux du vecteur $\rho \vec{V}$ à travers la surface S .

Idem, le **débit volumique** d'un fluide à travers une surface S est défini comme le volume de fluide franchissant cette surface durant une unité de temps. Il est exprimé par :

$$Q_{Vm} = \iint_S \vec{V} \cdot \vec{n} dS$$

Ce débit est exprimé en (m^3/s) et traduit la quantité de vitesse traversant la surface S , autrement dit le flux du champ de vitesse.

Remarque :

Dans le cas d'un fluide incompressible, la densité reste constante : $\rho = \text{cte}$, d'où

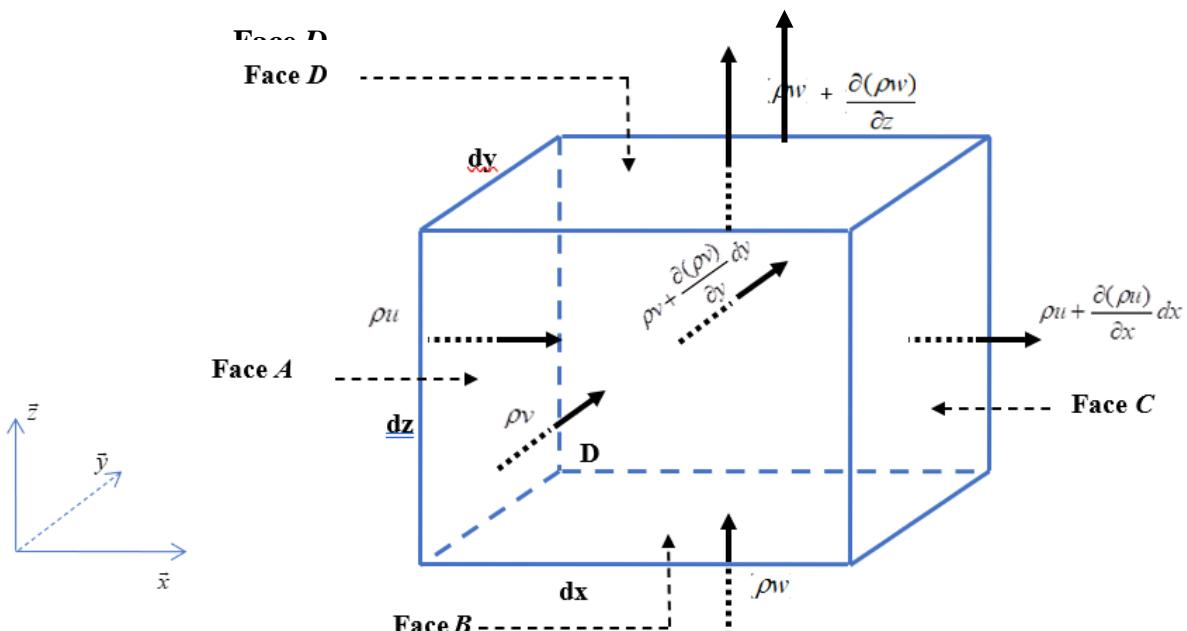
$$Q_m = \rho Q_v$$

V) Détermination de l'équation de conservation de masse : (équation de continuité):

Parmi les relations de base de la mécanique des fluides, l'équation de continuité — encore appelée équation de conservation de la masse — occupe une place centrale. Elle stipule que la masse du fluide ne se crée ni ne disparaît, elle reste constante au cours du temps.

Afin d'étudier un écoulement du fluide, on s'intéresse à un parallélépipède élémentaire dont les arêtes mesurent dx , dy et dz .

Il est logique d'écrire que la variation de la masse contenue dans dV au cours de dt égale à la masse entrante moins la masse sortante à travers les faces du volume.



La masse fluide présente dans le volume élémentaire dV à l'instant t est : $\rho dV = \rho dx dy dz$.

Après un court intervalle de temps dt , la masse volumique devient : $(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} dt) dx dy dz$.

La variation de masse au cours de l'intervalle dt est donc égale à :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dt dx dy dz$$

Relation a

De plus, la quantité de fluide (en masse) qui entre par la **face A** au cours du temps dt est :

$(\rho u)dydzdt$. Cela correspond au débit massique entrant par cette face.

La masse de fluide quittant le volume par la **face C** après la durée dt est :

$$(\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}dx)dydzdt$$

La différence entre les deux masses entrante et sortante est égale : $-(\frac{\partial(\rho u)}{\partial x})dxdydzdt$.

En procédant de manière identique pour chacune des autres faces, on arrive aux expressions suivantes : $-(\frac{\partial(\rho v)}{\partial y})dxdydzdt$ et $-(\frac{\partial(\rho w)}{\partial z})dxdydzdt$.

Ainsi, la variation de la masse contenue dans le volume dV s'écrit :

$$-\left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right] dxdydz$$

Relation β

En posant les relations **α** et **β** égales, et en divisant chaque membre par $dxdydzdt$, on arrive à :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0$$

Il s'agit donc de l'équation de continuité sous sa forme générale, valable lorsque le flux est conservatif, autrement dit en l'absence de sources (apports de masse) ou de puits (déficits de masse) dans dV .

Elle se résume alors à l'expression compacte suivante :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho \vec{V}) = 0 \quad \text{Ou bien} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{Div}(\rho \vec{V}) = 0$$

Remarque : Situation spécifique

Dans le cas de l'écoulement d'un fluide en régime **permanent** dit aussi stationnaire ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$), l'équation de continuité se réduit à :

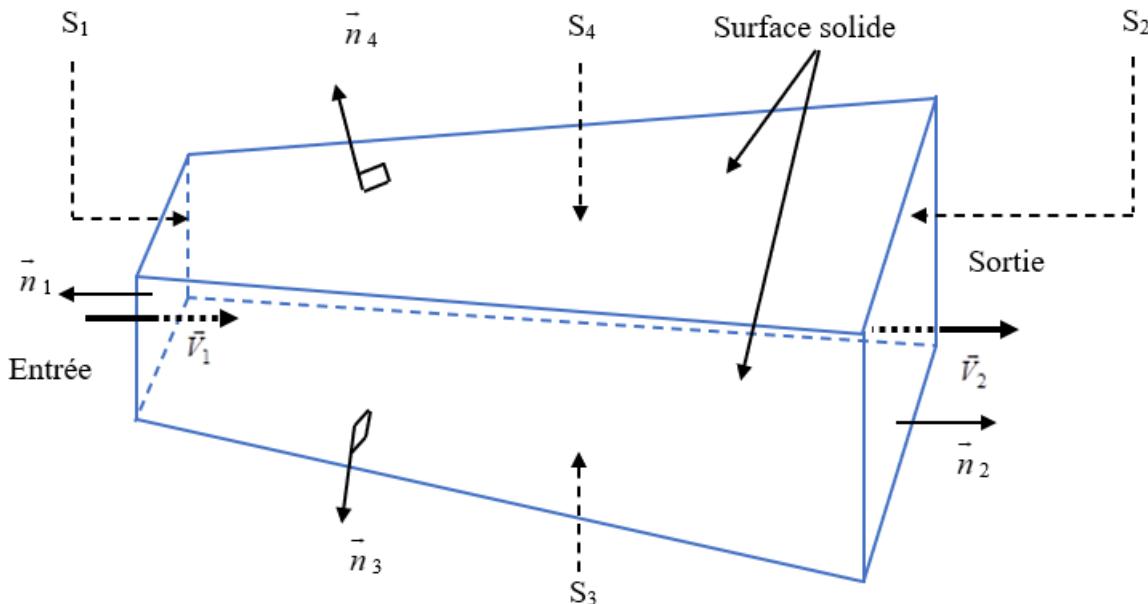
$$\text{Div}(\rho \vec{V}) = 0$$

Si l'on suppose en plus que le fluide est incompressible (ρ constant), l'équation se simplifie en :

$$\operatorname{Div} \vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Conséquence :

Etudions un fluide incompressible en écoulement permanent au sein d'une conduite dont la section change, qu'elle soit cylindrique ou prismatique. Le fluide arrive par la section S_1 avec une vitesse \vec{V}_1 et quitte la conduite par la section S_2 avec une vitesse \vec{V}_2 . Ce scénario est très fréquent dans les applications de la mécanique des fluides.



En tout point M de l'écoulement, le principe fondamental de conservation de la masse s'écrit : $\operatorname{Div} \vec{V} = 0$ pour le vecteur vitesse \vec{V} .

Soit un élément de volume dV entourant le point M, alors on peut écrire que :

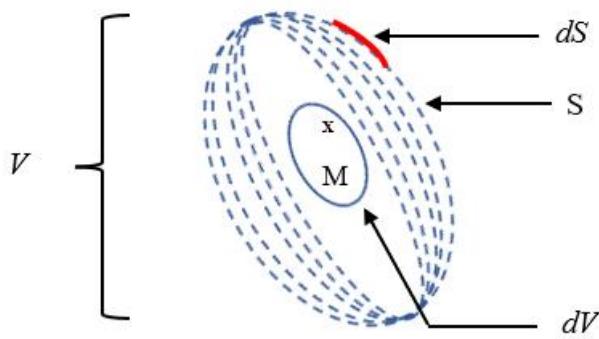
$$\operatorname{Div} \vec{V} \cdot dV = 0.$$

Soit V un volume fini quelconque entourant M, on peut par conséquent écrire que :

$$\int_{(V)} \operatorname{Div} \vec{V} \cdot dV = 0.$$

Considérons la surface S externe qui englobe le volume V . Chaque élément de surface dS de S est orienté vers l'extérieur de V par un vecteur unitaire \vec{n} . Le théorème de la divergence nous permet d'écrire :

$$\int_{(V)} \operatorname{Div} \vec{V} \cdot dV = \int_{(S)} \vec{V} \cdot \vec{n} \cdot dS = 0$$



Nous allons appliquer cette relation pour l'enceinte délimité par les surfaces S_1, S_2, S_3 et S_4 :

$$\int_{(S3)} \vec{V}_3 \cdot \vec{n}_3 \cdot dS + \int_{(S2)} \vec{V}_2 \cdot \vec{n}_2 \cdot dS + \int_{(S4)} \vec{V}_4 \cdot \vec{n}_4 \cdot dS + \int_{(S1)} \vec{V}_1 \cdot \vec{n}_1 \cdot dS = 0$$

Avec

$$\int_{(S3)} \vec{V}_3 \cdot \vec{n}_3 \cdot dS = \int_{(S4)} \vec{V}_4 \cdot \vec{n}_4 \cdot dS = 0$$

Comme \vec{V} est perpendiculaire aux vecteurs unitaires \vec{n}_3 et \vec{n}_4 , situés respectivement sur les parois S_3 et S_4 , on obtient :

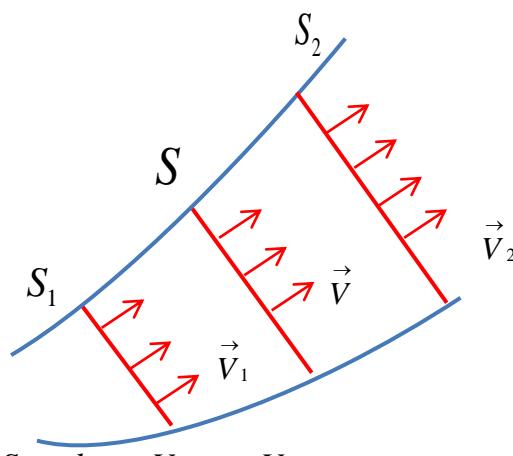
$$\vec{V}_3 \cdot \vec{n}_{S3} = \vec{V}_4 \cdot \vec{n}_{S4} = 0$$

Comme illustré sur la figure : $\vec{n}_2 = -\vec{n}_1 = \vec{n}$, et puisque $\vec{V}_3 \cdot \vec{n}_{S3} = \vec{V}_4 \cdot \vec{n}_{S4} = 0$ le long des surfaces S_3 et S_4 , la loi de conservation de la masse pour un fluide incompressible en écoulement permanent dans une enceinte à section variable peut être exprimée ainsi :

$$\int_{(S1)} \vec{V}_1 \cdot \vec{n} \cdot dS = \int_{(S2)} \vec{V}_2 \cdot \vec{n} \cdot dS$$

Concrètement, cela traduit que le débit volumique à l'entrée est le même qu'à la sortie.

Si l'on suppose en outre que la vitesse à l'entrée V_1 est uniforme sur toute la section S_1 et que la vitesse à la sortie V_2 est uniforme sur toute la section S_2 , alors on a : $V_1 \cdot S_1 = V_2 \cdot S_2$



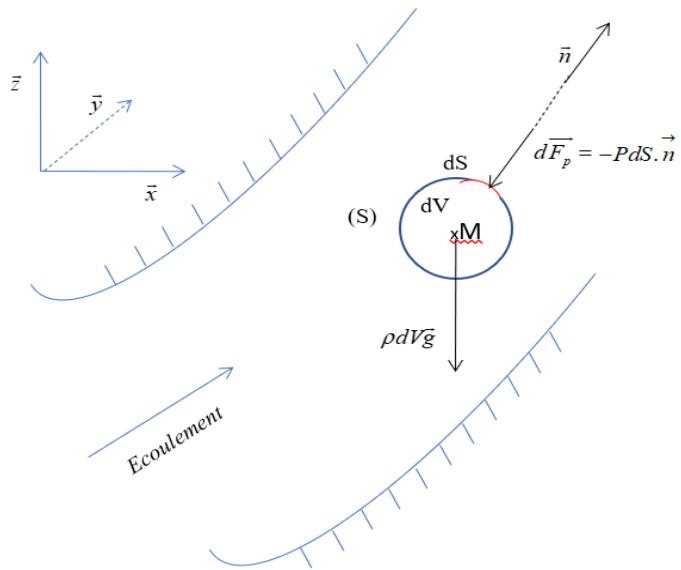
Finalement, Si $S_2 \succ S_1$ alors $V_2 \prec V_1$

DYNAMIQUE DES FLUIDES PARFAITS ET INCOMPRESSIBLES

La dynamique des fluides vise à décrire le mouvement d'un fluide lorsqu'il est soumis à un champ d'efforts. Dans ce chapitre, nous nous concentrerons sur le cas des écoulements **incompressibles**, pour lesquels la masse volumique reste constante, et **parfaits**, où la viscosité et les forces de frottement visqueux sont supposées nulles.

I) Détermination des équations d'Euler : Expression générale du mouvement d'un fluide parfait

On étudie ici l'écoulement d'un fluide considéré comme parfait et incompressible. Pour cela, on utilise un repère orthonormé direct galiléen $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, où l'axe Oz est choisi vertical ascendant. On note dV un élément de volume infinitésimal centré en un point M du fluide.



On distingue deux types de force qui s'exerce sur dV :

- Les forces volumiques, en particulier le poids de l'élément de volume dV : $\rho \vec{f}_V dV$
- Les forces de pression perpendiculaires exercées par le fluide sur tous les éléments de dS de la surface S : $\int_S -P dS \vec{n}$

Il est important de souligner que, dans le cas d'un fluide non parfait, il serait nécessaire d'inclure les forces de frottement visqueuses, qui s'exercent parallèlement à la surface dS .

En considérant un élément parallélépipédique en équilibre dans un fluide au repos, nous avons obtenu les équations de la statique des fluides suivantes (comme présentés dans les chapitres précédents) :

$$[\rho \vec{f}_v - \vec{\text{grad}}P] = 0.$$

Avec $\rho \vec{f}_v$ correspond aux efforts volumiques par unité de volume.

En dynamique des fluides, après application du principe fondamentale de la dynamique on considère que la somme de toutes ces forces équivaut à la quantité :

$$dm \vec{\Gamma} = \rho dV \vec{\Gamma}$$

Par unité de volume cette même relation devient : $\rho \vec{\Gamma}$ (où $\vec{\Gamma}$ représente l'accélération de M).

On obtient donc :

$$\rho \vec{\Gamma} = \rho \vec{f}_v - \vec{\text{grad}}P$$

Or, d'après les équations précitées dans le chapitre précédent on pu déterminer la relation suivante :

$$\vec{\Gamma} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \vec{\text{grad}} \vec{V}$$

Donc on va aboutir à :

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \vec{\text{grad}} \vec{V} \right] = \rho \vec{f}_v - \vec{\text{grad}}P$$

Ces formules constituent **les équations d'Euler**, décrivant le comportement dynamique d'un fluide parfait et incompressible.

Projetées sur les axes d'un repère cartésien, ces équations s'expriment en termes des composantes X_v , Y_v , et Z_v des forces volumiques \vec{f}_v et u , v , w du vecteur vitesse comme suit :

$$\begin{cases} \rho \left[\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right] = \rho X_v - \frac{\partial P}{\partial x} \\ \rho \left[\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right] = \rho Y_v - \frac{\partial P}{\partial y} \\ \rho \left[\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right] = \rho Z_v - \frac{\partial P}{\partial z} \end{cases}$$

Lorsque les forces volumiques $\rho \vec{f}_v$ proviennent d'une énergie potentielle U_p : $\rho \vec{f}_v = -\vec{\text{grad}}U_p$, les équations d'Euler prennent la forme :

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\text{grad}} \vec{V} \right] = -\vec{\text{grad}}[P + U_p]$$

Dans la plupart des situations, les seules forces volumiques sont celles de la pesanteur. On pose alors : $X_v = 0$, $Y_v = 0$, $Z_v = -g$ et $U_p = \rho g z$. pour un axe $O\vec{z}$ orienté vers le haut, ce qui conduit à :

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\text{grad}} \vec{V} \right] = \rho \vec{g} - \vec{\text{grad}}P = -\vec{\text{grad}}[P + \rho g z]$$

En tout point $M(x, y, z)$ de l'écoulement et à tout instant t , un fluide parfait et incompressible est caractérisé par quatre grandeurs : u , v , w et P . Les équations d'Euler, complétées par l'équation de continuité : $\text{Div} \vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$, permettent de déterminer ces quatre inconnus.

Pour pouvoir résoudre ces équations aux dérivées partielles, il est indispensable de définir correctement les conditions aux limites du fluide.

II) Détermination de l'équation de Bernoulli :

On étudie un écoulement de fluide parfait et incompressible, en supposant que les seules forces volumiques appliquées sont celles de la pesanteur.

Dans ces conditions, le comportement du fluide est gouverné par les équations d'Euler.

Avec l'hypothèse supplémentaire que l'écoulement est permanent (stationnaire), les équations d'Euler prennent la forme suivante :

$$\rho \vec{V} \cdot \vec{\text{grad}} \vec{V} = -\vec{\text{grad}}[P + \rho g z]$$

Par ailleurs, on rappelle la relation vectorielle bien connue :

$$\vec{V} \cdot \vec{\text{grad}} \vec{V} = \vec{\text{grad}} \frac{\vec{V}^2}{2} + \vec{\text{rot}} \vec{V} \wedge \vec{V}$$

En ajoutant l'hypothèse d'incompressibilité du fluide ($\rho = \text{cste}$), on peut écrire :

$$Rot \vec{V} \wedge \vec{V} = -\frac{1}{\rho} grad \left[P + \rho g z + \rho \frac{\vec{V}^2}{2} \right]$$

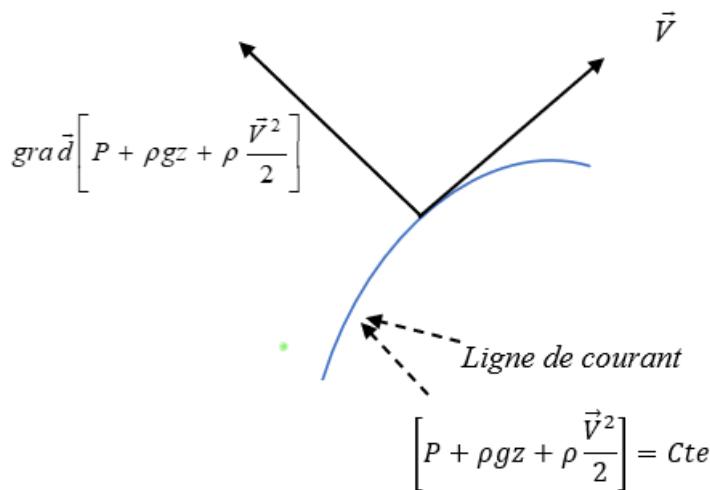
En prenant le produit scalaire des deux membres par le vecteur \vec{V} , ce qui annule le premier terme, on arrive donc à :

$$\vec{V} \cdot grad \left[P + \rho g z + \rho \frac{\vec{V}^2}{2} \right] = 0$$

D'après cette relation, on peut constater que le vecteur \vec{V} et le vecteur

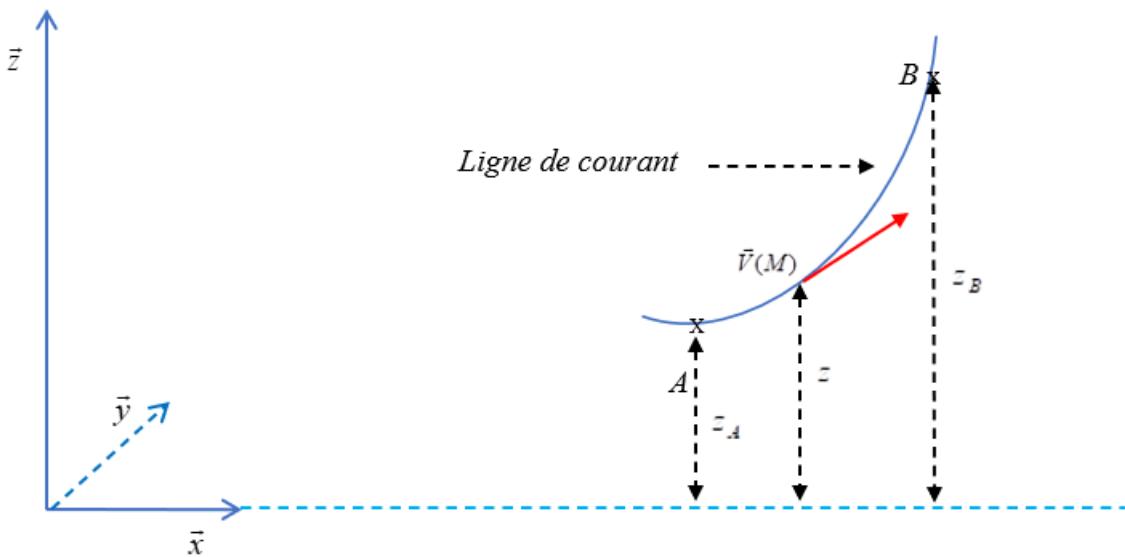
$$grad \left[P + \rho g z + \rho \frac{\vec{V}^2}{2} \right]$$

Sont donc orthogonaux. Cela implique que \vec{V} et la quantité $\left[P + \rho g z + \rho \frac{\vec{V}^2}{2} \right]$ prennent des sens différents, c'est-à-dire le long d'une ligne de courant. Le gradient d'une fonction f pointe toujours dans une direction orthogonale à la ligne le long de laquelle f conserve la même valeur ($f = \text{cte}$).



Enoncé du Théorème de Bernoulli :

Dans un écoulement permanent d'un fluide parfait, incompressible et soumis à la pesanteur, la grandeur $\left[P + \rho g z + \rho \frac{\vec{V}^2}{2} \right]$ demeure inchangée lorsqu'on se déplace le long d'une même ligne de courant. Mais peut différer entre deux lignes de courant.



Pour les points A et B situés sur la même ligne de courant, on peut écrire que :

$$P_A + \rho g z_A + \rho \frac{V_A^2}{2} = P_B + \rho g z_B + \rho \frac{V_B^2}{2}$$

Avec z_A et z_B représentent les côtes des points A et B.

Signification et interprétation énergétique de l'équation de Bernoulli :

Dans cette équation : $P + \rho g z + \rho \frac{V^2}{2} = cste$, chaque terme correspond à une énergie par unité

de volume de fluide (J/m^3). Le terme $\rho \frac{V^2}{2}$ représente l'énergie cinétique de la particule

fluide M par unité de volume, tandis que $P + \rho g z$ correspond à l'énergie potentielle, qui

combine la contribution de la pression et celle de la position. Par conséquent, $P + \rho g z + \rho \frac{V^2}{2}$

exprime l'énergie mécanique totale par unité de volume.

Le théorème de Bernoulli illustré par $P + \rho g z + \rho \frac{V^2}{2} = cste$ exprime que l'énergie mécanique

totale par unité de volume reste constante le long d'une ligne de courant.

N.B : Pour un écoulement irrotationnel $\text{Rot} \vec{V} = 0$, on obtient alors :

$$\text{grad} \left[P + \rho g z + \rho \frac{\vec{V}^2}{2} \right] = 0.$$

D'où :

$$P + \rho g z + \rho \frac{V^2}{2} = cste \quad \text{Partout dans l'écoulement}$$

Formules d'application pratiques :

1) Cas d'un gaz :

Lorsqu'un gaz est soumis à de faibles variations de pression, on peut le considérer comme incompressible ($\rho = \text{constante}$). Comme en outre les variations des côtes $\rho g z$ sont en général négligeables devant les variations dues aux vitesses, on pourra alors les négliger (en fait on néglige les forces de pesanteur devant les forces de pression). Et la relation de Bernoulli devient :

$$P + \rho \frac{V^2}{2} = cste$$

On utilise alors la terminologie suivante :

P : Pression statique.

$\rho \frac{\vec{V}^2}{2}$: Pression dynamique.

$P + \rho \frac{\vec{V}^2}{2}$: Pression totale au point considéré.

1) Cas d'un liquide :

On exprime les différents termes de la relation de Bernoulli en hauteur de liquide de poids volumique ρg :

$$\frac{P}{\rho g} + z + \frac{V^2}{2g} = cste$$

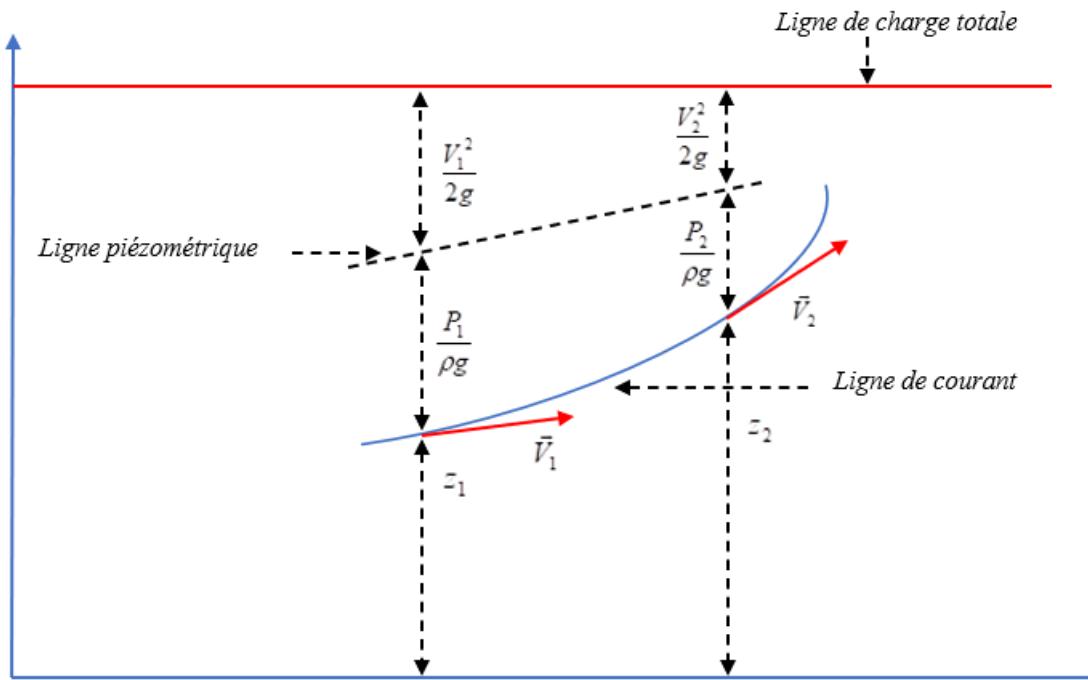
Avec les définitions suivantes :

z : Côte du point

$\frac{P}{\rho g}$: Hauteur due à la pression

$\frac{V^2}{2g}$: Hauteur due à la vitesse

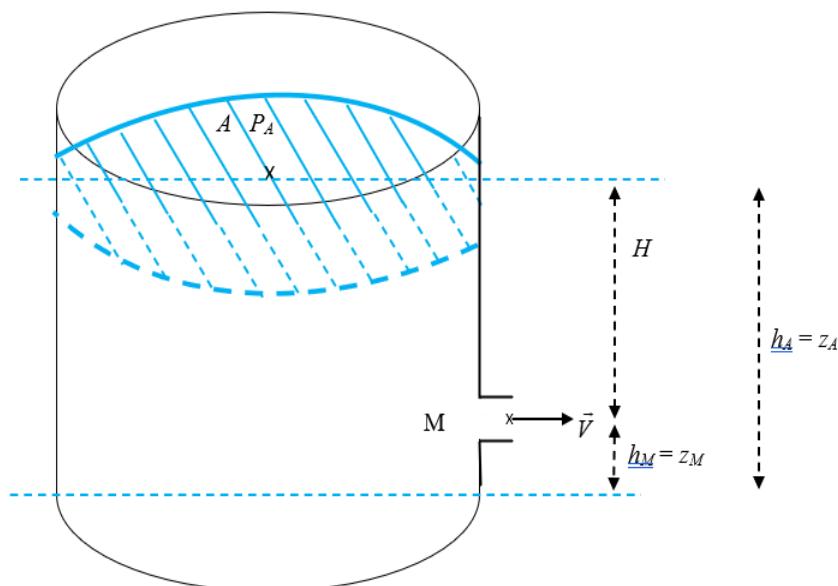
$\frac{P}{\rho g} + z + \frac{V^2}{2g}$ est appelée **la charge totale**. (C'est une constante le long d'une ligne de courant).



III) Applications du théorème de Bernoulli :

III-1) Expression de la vitesse selon Torricelli pour un écoulement d'un fluide à travers un orifice :

On considère un réservoir de grande taille, ouvert à l'atmosphère, contenant un liquide ; on cherche la vitesse d'écoulement à la sortie d'une ouverture créée au niveau de sa paroi.



Si le réservoir est suffisamment grand par rapport à la taille de l'orifice, la vitesse de déplacement de la surface libre est très faible et peut être négligée. L'écoulement peut alors être considéré comme permanent. De plus, comme les particules fluides quittent pratiquement l'état de repos, on peut admettre que l'écoulement est irrotationnel. Dans ces conditions, la constante de Bernoulli est identique en tout point du réservoir. On peut ainsi écrire :

$$\frac{P_A}{\rho} + gz_A + \frac{V_A^2}{2} = \frac{P_M}{\rho} + gz_M + \frac{V_M^2}{2}$$

Pour déterminer la vitesse du jet en M, on remarque que la vitesse de la surface libre V_A est négligeable et que la pression en A et en M est atmosphérique $P_A = P_M = P_{atm}$. En posant H comme la distance verticale entre la surface libre et l'orifice, la loi de Bernoulli conduit à la formule de Torricelli :

$$V_M = \sqrt{2gH}$$

Finalement, la valeur de la vitesse à la sortie ne varie qu'en fonction de la hauteur H entre l'orifice et la surface libre du liquide.

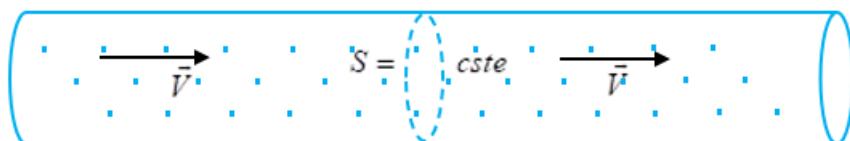
Cas où le fluide est un gaz enfermé dans un réservoir étanche :

Dans cette situation, de même que pour un liquide, la vitesse au point A peut être considérée comme quasi nulle. En revanche, la pression P_A n'est plus égale à $P_M = P_{atm}$. Par ailleurs, pour un gaz, on néglige généralement l'effet du terme de la pesanteur. On obtient alors :

$$V_M = \sqrt{\frac{2(P_A - P_M)}{\rho}}$$

III-2) Mesures expérimentales de la pression et de la vitesse de l'écoulement dans une conduite :

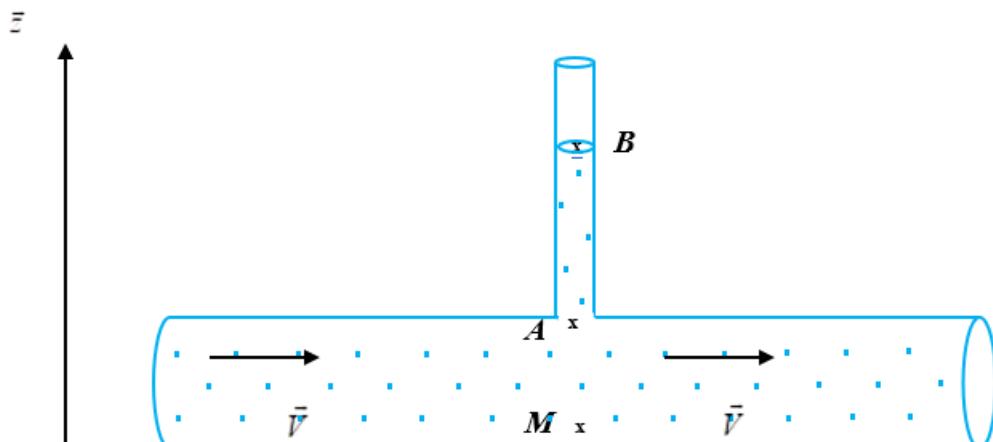
Soit un écoulement permanent d'un liquide incompressible et parfait au sein d'une conduite horizontale, cylindrique ou prismatique, dont la section droite est constante. Comme le diamètre est très faible devant la longueur, l'écoulement peut être assimilé à un écoulement uniforme : la vitesse reste constante et dirigée parallèlement aux parois de la conduite.



Dans la suite, nous expliquons une méthode expérimentale pour mesurer la pression P en un point d'une conduite et la vitesse du fluide qui s'y écoule.

a) **Détermination expérimentale de la pression statique dans une canalisation à l'aide d'un tube piézométrique :**

Plaçons un point M au sein d'une conduite. À cet endroit, on installe un tube vertical transparent de plexiglas relié à l'intérieur du tuyau. Le fluide y monte jusqu'à un point B où la pression est égale à la pression atmosphérique. Le point A est la jonction entre le tube et la conduite.



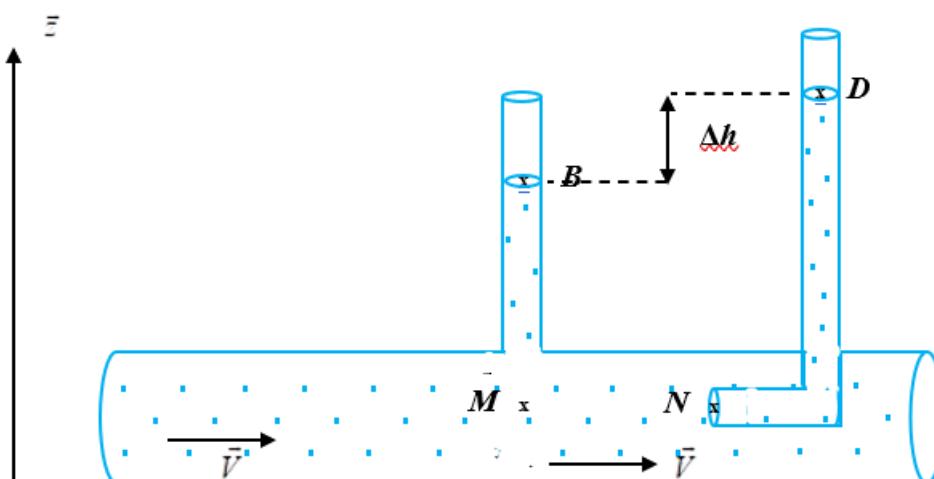
$$P_M + \rho g z_M + \frac{1}{2} \rho V^2 = P_A + \rho g z_A + \frac{1}{2} \rho V^2, \text{ et } P_A + \rho g z_A = P_{atm} + \rho g z_B$$

$$\text{Soit : } P_A = P_{atm} + \rho g (z_B - z_A), \text{ et } P_M = P_{atm} + \rho g (z_B - z_M)$$

On appelle **tube piézométrique** le tube vertical raccordé à la conduite. L'ouverture par laquelle il est relié au fluide constitue la **prise de pression statique**.

b) **Calcul de la vitesse de l'écoulement (Tube de Pitot):**

Afin de mesurer la vitesse du fluide, on introduit dans la conduite un autre tube, appelé tube de Pitot, conformément au schéma présenté.



Le fluide remonte dans le second tube vertical, puis atteint un niveau d'équilibre en D, point soumis à la pression atmosphérique.

La vitesse du fluide au point N est nulle, sinon le fluide continuerait de monter dans le tube vertical. Le point N correspond donc à un point d'arrêt.

Donc, $P_N + \rho g z_N = P_{atm} + \rho g z_D$. Ce qui donne :

$P_N = P_{atm} + \rho g(z_D - z_N)$, elle correspond à la Pression au point d'arrêt.

Étant donné que M et N se trouvent à la même hauteur, on a la relation suivante :

$$P_M + \frac{1}{2} \rho V^2 = P_N$$

Or, à l'aide du tube piézométrique, on avait trouvé :

$$P_M = P_{atm} + \rho g(z_B - z_M)$$

Ce qui donne : $P_N - P_M = \frac{1}{2} \rho V^2 = \rho g(z_D - z_B) = \rho g \Delta h$

Soit finalement : $V = \sqrt{2g\Delta h}$

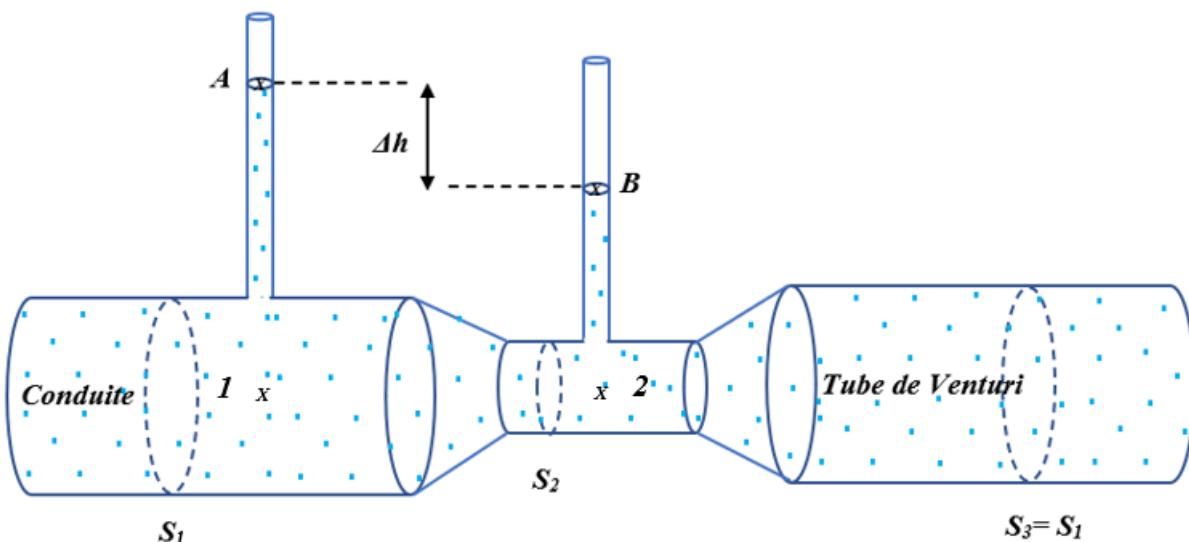
Cela permet de déterminer la vitesse du fluide à l'intérieur de la conduite.

c) Débitmètres. Tube de Venturi :

Pour mesurer le débit ou la vitesse d'un fluide dans une conduite de section S_1 , on utilise des instruments appelés débitmètres.

Le tube de Venturi est l'un de ces instruments : il s'agit d'un tube qui se rétrécit progressivement jusqu'à atteindre une zone étroite de section S_2 (le col), puis s'élargit à nouveau jusqu'à ce qu'il atteigne la section initiale $S_3 = S_1$.

Lorsqu'on installe ce tube dans une conduite, il permet de mesurer le débit du fluide grâce aux variations de vitesse et de pression qu'il génère.



Les mesures fournies par les deux tubes piézométriques conduisent aux expressions suivantes :

$$P_1 = P_{atm} + \rho g(z_A - z_1) \text{ et } P_2 = P_{atm} + \rho g(z_B - z_2)$$

Les points 1 et 2 sont situés au même niveau vertical ($z_1 = z_2$).

Or :

$$P_1 + \rho g z_1 + \rho \frac{\vec{V}_1^2}{2} = P_2 + \rho g z_2 + \rho \frac{\vec{V}_2^2}{2}$$

On obtient :

$$\frac{1}{2}(V_2^2 - V_1^2) = g(z_A - z_B) = g\Delta h$$

Comme la vitesse V_1 est constante sur la section S_1 , le débit volumique qui la traverse est $Q = V_1 \cdot S_1$. Le principe de continuité impose ensuite :

$$V_1 \cdot S_1 = V_2 \cdot S_2$$

Donc

$$V_1 = \frac{\sqrt{2g\Delta h}}{\sqrt{\left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2 - 1}}$$

Finalement, le débit est donné alors par : $Q = V_1 \cdot S_1$.

d) Phénomène de Venturi :

Dans un écoulement à débit volumique constant, toute variation de section implique une variation inverse de la vitesse, ce principe constitue l'effet Venturi. On peut écrire donc :

$$V_1 \cdot S_1 = V_2 \cdot S_2 \quad \text{et} \quad P_1 + \rho g z_1 + \rho \frac{\vec{V}_1^2}{2} = P_2 + \rho g z_2 + \rho \frac{\vec{V}_2^2}{2}.$$

Par conséquent, une réduction de la section ($S_2 < S_1$) impose une augmentation de la vitesse ($V_2 > V_1$)

Et inversement, une augmentation de la section entraîne une diminution de la vitesse, et par conséquent : $P_2 < P_1$. Inversement, une augmentation de la section entraîne une diminution de la vitesse.

Remarque importante :

Il est important de souligner que l'angle du divergent doit rester inférieur à $6-7^\circ$. Au-delà, le fluide se détache des parois, ce qui entraîne une perte d'uniformité de la vitesse dans la section.

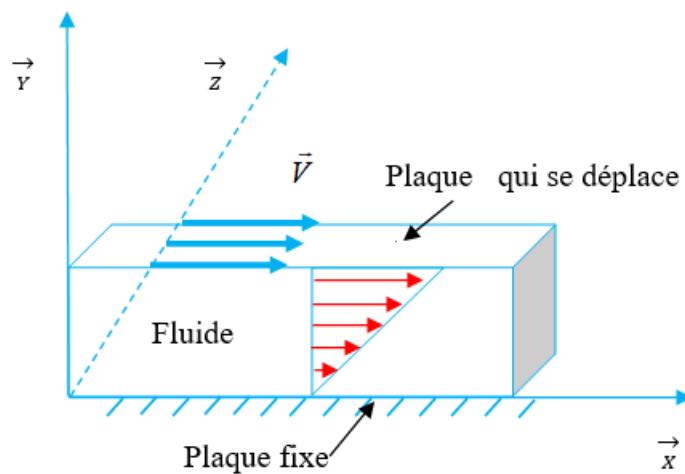
DYNAMIQUE DES FLUIDES REELS (VISQUEUX) ET INCOMPRESSIBLES

Ce chapitre constitue une suite logique du chapitre précédent. Il traite la dynamique pour des écoulements d'un fluide réel en tenant compte du phénomène de la viscosité cette fois-ci. Le mouvement du fluide est décrit par les équations de Navier-Stokes. Dans cette partie, nous allons mettre en lumière le cas des écoulements incompressibles au sein d'un canal plan ainsi que dans une conduite de section circulaire (écoulement de Poiseuille).

I) La viscosité :

C'est une propriété fondamentale des fluides en mouvement, exprimant leur résistance à l'écoulement. Elle résulte des forces de frottement internes qui apparaissent entre les particules du fluide lorsqu'elles se déplacent les unes par rapport aux autres. Cette interaction provoque une perte d'énergie mécanique sous forme de chaleur, ce qui se traduit par un ralentissement du mouvement du fluide.

Pour illustrer qualitativement ce phénomène, considérons l'expérience suivante : un fluide est placé entre deux plaques planes parallèles. La plaque inférieure reste immobile, tandis que la plaque supérieure se déplace à une vitesse \vec{V} constante.



Sous l'effet des forces d'adhésion entre les molécules du fluide et celles des deux plaques solides, la couche de fluide au contact de chaque paroi y adhère complètement (la lamelle du fluide qui avoisine la plaque solide se colle à celle-ci et se déplace de sa même vitesse). Ainsi,

la vitesse du fluide varie progressivement le long de la verticale : elle est nulle au contact de la plaque fixe et atteint la valeur \vec{V} au niveau de la plaque mobile. Cette variation crée un gradient de vitesse $\frac{dV}{dy}$ orthogonale à la direction du mouvement. Elle résulte des forces de frottement internes entre les couches du fluide. La contrainte de cisaillement τ (ou contrainte de frottement) exercée sur une unité de surface est proportionnelle à ce gradient de vitesse, la relation s'écrivant :

$$\tau = \mu \frac{dV}{dy}.$$

Où μ désigne le coefficient de viscosité dynamique du fluide. Son unité est $[Kg/(m.s)]$. Ce coefficient traduit le degré de viscosité du fluide. Sa valeur, propre à chaque fluide, est déterminée par voie expérimentale à l'aide de dispositifs appelés viscosimètres, dont la complexité peut varier selon la méthode de mesure utilisée.

Les fluides qui vérifient la loi de Newton mentionnée précédemment sont qualifiés de fluides newtoniens. C'est le cas notamment de l'eau, de l'air et de la majorité des liquides courants. En revanche, certains fluides ne suivent pas cette loi et sont appelés fluides non newtoniens. Parmi eux figurent les liquides viscoplastiques, comme certaines pâtes, peintures ou boues industrielles, dont le comportement dépend de la contrainte appliquée.

On définit également le coefficient de viscosité cinématique, noté ν , qui relie la viscosité dynamique μ ainsi que la densité ρ du fluide selon la relation :

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

L'unité de la viscosité cinématique est le mètre carré par seconde $[m^2/s]$.

En réalité, tous les fluides possèdent une certaine viscosité. Toutefois, dans certains types d'écoulements — comme ceux de l'air à faible vitesse — ou pour certaines conditions particulières (par exemple, l'air loin des parois), l'effet de la viscosité peut être considéré comme négligeable. On considère alors le fluide comme non visqueux, idéal ou parfait (avec $\mu = 0$).

Il convient de ne pas confondre cette notion avec celle de gaz parfait, qui relève d'un modèle thermodynamique distinct.

II) Equations de Navier Stockes :

Rappelons que dans le cas général d'un écoulement de fluide incompressible et visqueux est régi par les équations suivantes :

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = \rho \left[\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\operatorname{grad}} \vec{V} \right] = -\vec{\operatorname{grad}} P + \vec{F} + \mu \Delta \vec{V}$$

On les appelle : **Equations de Navier Stockes**

A ces équations il faut ajouter l'équation de conservation de masse :

$$\operatorname{Div} \vec{V} = 0$$

Si les forces volumiques se réduisent au poids : $\vec{F} = \rho \vec{g}$, les équations de l'écoulement deviennent :

$$\left[\begin{array}{l} \operatorname{Div} \vec{V} = 0 \\ \rho \frac{d\vec{V}}{dt} = \rho \left[\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\operatorname{grad}} \vec{V} \right] = -\vec{\operatorname{grad}} P + \rho \vec{g} + \mu \Delta \vec{V} \end{array} \right]$$

Soit un repère orthonormé direct $(O, \vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$, avec \vec{x}_3 dirigé vers le haut par exemple.

Dans ce cas $\rho \vec{g} = -\rho g \vec{x}_3$. Soit v_1, v_2 et v_3 les composantes du vecteur vitesse \vec{V} . Donc pour un point M de coordonnées x_1, x_2 et x_3 à l'instant t, les équations précédentes deviennent :

$$\left[\begin{array}{l} \operatorname{Div} \vec{V} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = 0 \\ \rho \left[\frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right] = -\frac{\partial P}{\partial x_1} + \mu \left[\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_3^2} \right] \\ \rho \left[\frac{\partial v_2}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right] = -\frac{\partial P}{\partial x_2} + \mu \left[\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_3^2} \right] \\ \rho \left[\frac{\partial v_3}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_3}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_3}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right] = -\frac{\partial P}{\partial x_3} + \mu \left[\frac{\partial^2 v_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_3^2} \right] - \rho g \end{array} \right]$$

Nous avons ainsi 4 équations aux dérivées partielles (du second ordre et non linéaires) à 4 inconnues : les 3 composantes de la vitesse $v_1(x_1, x_2, x_3, t)$, $v_2(x_1, x_2, x_3, t)$, $v_3(x_1, x_2, x_3, t)$ et la pression $P(x_1, x_2, x_3, t)$.

Dans le cas général, il est impossible de résoudre ce système analytiquement. On a souvent recours à des méthodes numériques d'approximation (différences finies, volumes finis ou éléments finis). Néanmoins, nous pouvons résoudre ce système analytiquement dans le cas d'écoulement **simples** tels que les écoulement permanent et unidirectionnels.

III) Ecoulements permanents et unidirectionnels

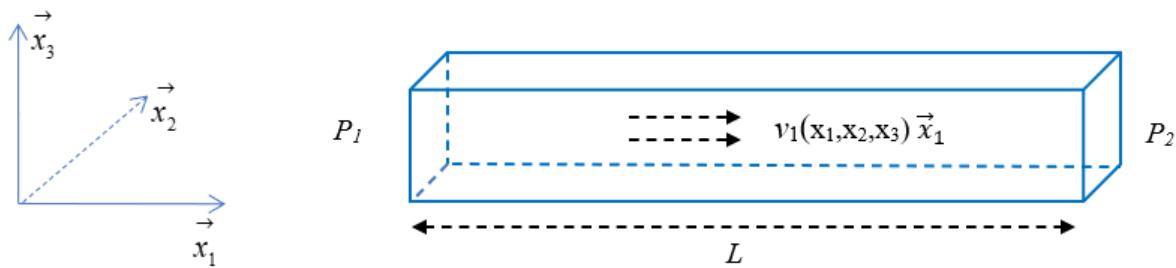
Dans ce cas, on suppose que la pression et la vitesse ne dépendent pas du temps, et la vitesse à une seule direction :

$$\vec{V} = \begin{bmatrix} v_1(x_1, x_2, x_3) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Cela implique que les lignes de courant soient des droites parallèles.

Les écoulements susceptibles d'être représentés par de tels champs de vitesse sont essentiellement les écoulements dans les conduites circulaires ou rectangulaires dont les dimensions de la section droite sans très petites par rapport à la longueur L et seulement dans des régions éloignées des bouts.

III-1 Ecoulement dans un canal plan :



Dans ce cas les équations de mouvement deviennent :

- Conservation de masse :

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial v_1}{\partial x_1} = 0$$

Donc v_1 est indépendante de x_1 , elle dépend seulement de x_2 et x_3 $\rightarrow v_1(x_2, x_3)$

- Equation de Navier Stockes projetée sur l'axe des x_1 :

$$\rho \left[\frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right] = - \frac{\partial P}{\partial x_1} + \mu \left[\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_3^2} \right]$$

→ $\mu \Delta v_1(x_2, x_3) = \frac{\partial P}{\partial x_1}$ (équation *)

- Equation de Navier Stockes projetée sur l'axe des x_2 :

$$\rho \left[\frac{\partial v_2}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right] = - \frac{\partial P}{\partial x_2} + \mu \left[\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_3^2} \right]$$

→ $\frac{\partial P}{\partial x_2} = 0$

P est indépendante de x_2 → $P = P(x_1, x_3)$

- Equation de Navier Stockes projetée sur l'axe des x_3 :
- $\rho \left[\frac{\partial v_3}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_3}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_3}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right] = - \frac{\partial P}{\partial x_3} + \mu \left[\frac{\partial^2 v_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_3^2} \right] - \rho g$

$-\frac{\partial P}{\partial x_3} - \rho g = 0$ → $P = -\rho g x_3 + \text{cte}(x_1, x_3)$ (équation **)

➤ Calcul de la pression $P(x_1, x_3)$

Montrons tout d'abord que $\frac{\partial P}{\partial x_1}$ est une constante.

Pour cela, il suffit de dériver les 3 équations de Navier Stokes par rapport à x_1 .

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left[\frac{\partial P}{\partial x_1} \right] = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\frac{\partial P}{\partial x_1} \right] = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial x_3} \left[\frac{\partial P}{\partial x_1} \right] = 0$$

Donc $\frac{\partial P}{\partial x_1}$ est une constante. Nous pouvons alors prendre :

$$\frac{\partial P}{\partial x_1} = \frac{P_2 - P_1}{L} = G$$

Avec P_2 est la pression à la sortie de la conduite de forme plane, P_1 la pression à l'entrée et L la longueur de la conduite plane.

Remarquons que si l'écoulement se fait de la gauche vers la droite alors :

$$G < 0 \text{ car } P_2 > P_1 \text{ et vice versa}$$

L'équation ** donne :

$$\frac{\partial P}{\partial x_1} = \frac{\partial \text{cte}(x_1)}{\partial x_1} = G$$

Finalement :

$$P(x_1, x_3) = -\rho g x_3 + G x_1 + \text{cte}$$

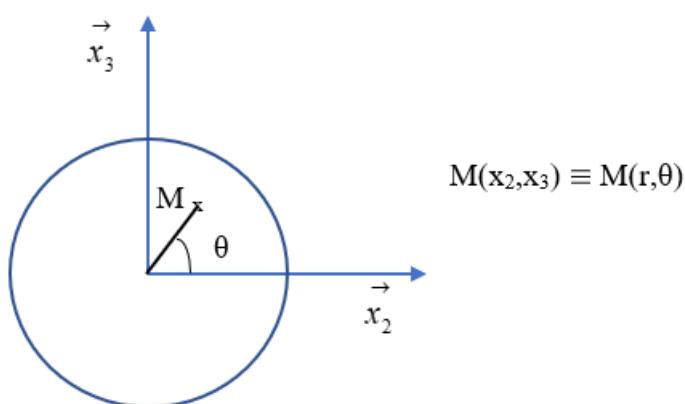
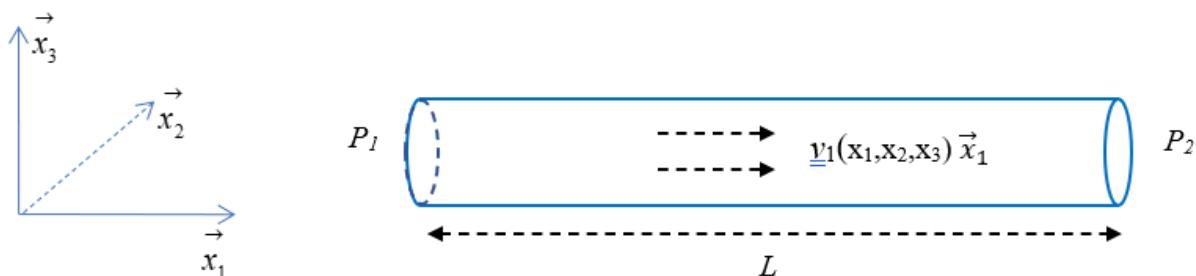
De l'équation *

$$\mu \Delta v_1(x_2, x_3) = \frac{\partial P}{\partial x_1} = G \quad (\text{équation ***})$$

III-2 Ecoulement dans une conduite circulaire : Ecoulement de Poiseuille

On considère un fluide réel qui s'écoule en régime permanent à l'intérieur d'une conduite cylindrique dont la dimension de sa longueur L est très supérieure à celle des dimensions du rayon de sa section qui est sous forme d'un disque $L \gg r$. Ceci permet de négliger l'effet de la pesanteur.

Puisque on étudie une géométrie cylindrique, il vaut mieux travailler en coordonnées cylindriques.



$$v_1(x_2, x_3) \equiv v(r, \theta) \text{ or } \frac{\partial}{\partial \theta} = 0 \quad (\text{vu la symétrie cylindrique}) \rightarrow v_1 = v_1(r)$$

Du coup, la vitesse v_1 ne dépend que de la distance r par rapport à l'axe. Dans ce cas le Laplacien de v_1 s'écrit sous la forme :

$$\Delta v_1 = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r \frac{dv_1}{dr} \right]$$

Ainsi l'équation *** devient : $\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r \frac{dv_1}{dr} \right] = \frac{G}{\mu}$

$$\begin{aligned} \rightarrow \quad \frac{d}{dr} \left[r \frac{dv_1}{dr} \right] &= r \frac{G}{\mu} \quad \rightarrow \quad r \frac{dv_1}{dr} = \frac{Gr^2}{\mu^2} + cte_1 \\ \rightarrow \quad \frac{dv_1}{dr} &= \frac{Gr}{2\mu} + \frac{cte_1}{r} \\ \rightarrow \quad v_1(r) &= \frac{Gr^2}{4\mu} + cte_1 \cdot \log r + cte_2 \end{aligned}$$

Si $r = 0$ (sur l'axe de la conduite), v_1 est infinie (ce qui est absurde). Pour cela, on prendra donc nulle la cte_1 ($cte_1 = 0$)

➤ **Les conditions aux limites :**

Si $r = R$ (sur les parois de la conduite), on a : $v_1(R) = 0$ (fluide visqueux).

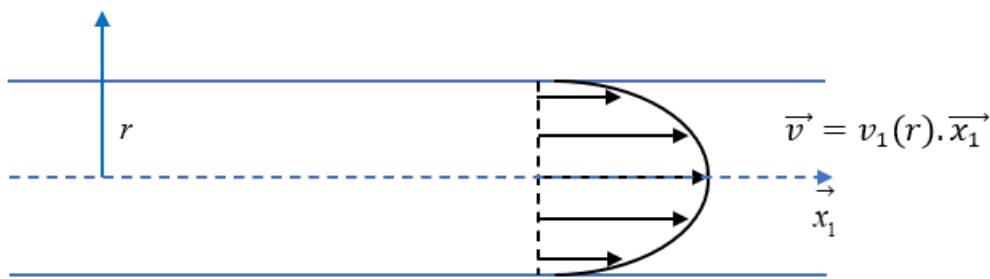
$$\rightarrow cte_2 = \frac{GR^2}{4\mu}$$

Finalement :

$$v_1(r) = \frac{G}{4\mu} \left[R^2 - r^2 \right] = -\frac{G}{4\mu} R^2 \left[1 - \frac{r^2}{R^2} \right] \quad (\text{Equation ****})$$

La vitesse v_1 est maximale sur l'axe ($r = 0$) : $[v_1]_{\max} = v_1(0) = -\frac{G}{4\mu} R^2$

$$\rightarrow v_1(r) = v_{\max} \left[1 - \frac{r^2}{R^2} \right]$$



Profile des vitesses le long d'un diamètre de la conduite

➤ **Calcul de la contrainte visqueuse :**

On définit la contrainte visqueuse exercée sur une couche de fluide par :

$$\sigma_{12} = \mu \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) = \mu \frac{dv_1}{dx_2} \equiv \sigma \equiv \mu \frac{dv_1}{dr}$$

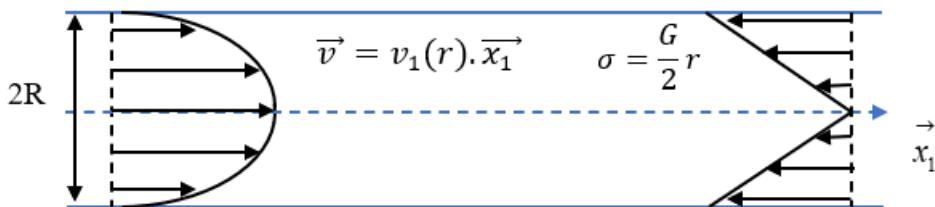
→ $\sigma = \frac{G}{2}r$

Ce résultat est obtenu en dérivant l'équation *** de $v_1(r)$ par rapport à r

On a $v_1(r) = \frac{G}{4\mu} \left[R^2 - r^2 \right]$

→ $\frac{dv_1(r)}{dr} = \frac{2G}{4\mu} r \rightarrow \mu \frac{dv_1(r)}{dr} = \frac{G}{2} r = \sigma$

Rappelons que G est négatif.



La contrainte visqueuse est nulle sur l'axe ($r = 0$) et elle est maximale sur les parois de la conduite :

$$\sigma_{max} = \sigma_{paroi} = \frac{G}{2}r$$

Remarque :

La contrainte visqueuse exercée par le fluide sur la paroi est : $-\frac{G}{2}r$

➤ **Calcul du débit volumique :**

$$Q_v = \int_S \vec{v} \cdot \vec{x}_1 dS = \int_0^R v_1(r) 2\pi r dr. \quad \text{Avec } S = \pi r^2 \longrightarrow dS = 2\pi r dr$$

$$Q_v = -\frac{GR^2}{4\mu} 2\pi \left[\int_0^R r dr - \frac{1}{R^2} \int_0^R r^3 dr \right]$$

→
$$Q_v = -\frac{G\pi R^4}{8\mu}$$

Cette relation est appelée **relation de Hagen Poiseuille**. Elle sert à calculer expérimentalement la viscosité μ d'un liquide quelconque.

Pour différentes valeurs $G = \frac{P_2 - P_1}{L}$, on mesure les valeurs des débits correspondants. On trace ensuite la courbe $Q_v = f(G)$ qui est une droite. A partir de la pente de la droite et la relation de Hagen Poiseuille, on déduit la viscosité μ du fluide utilisé.

Cette relation est valable seulement pour un écoulement laminaire.

IV) Nombre adimensionnel de Reynolds

IV-1) Nature du régime d'écoulement

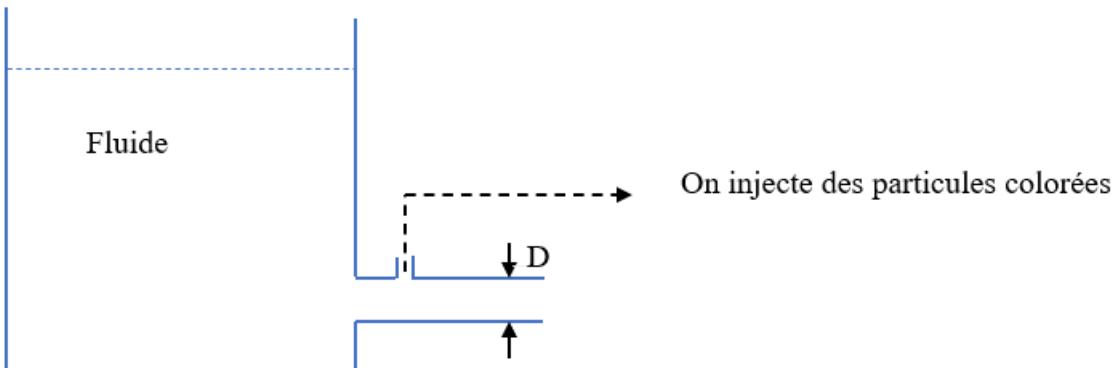
a- Régime laminaire :

Un régime est dit laminaire si l'écoulement est stable (pas de fluctuation) et stratifié (les lignes de courants sont parallèles et les particules fluides ne se mélangent pas) même si les perturbations sont présentes dans l'écoulement, elles seront atténuées.

b- Régime turbulent :

Un écoulement turbulent est écoulement irrégulier dans lequel les couches fluides se mélangent

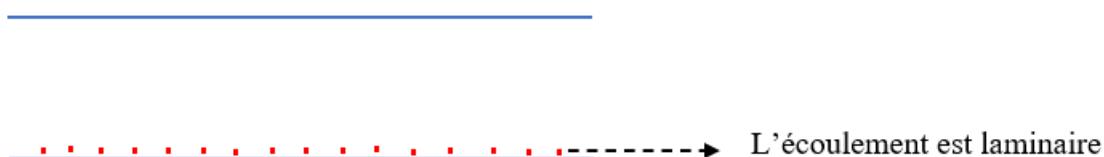
IV-2) Expérience de Reynolds 1883



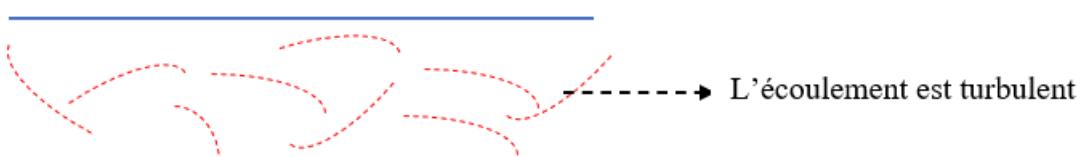
Un réservoir de très grande dimension contenant un fluide visqueux alimente une canalisation horizontale. Au même moment on injecte un colorant dans cette canalisation, et suivant les valeurs des paramètres du problème (débit, nature de fluide, dimensions de canalisation, ...) on observe la nature de l'écoulement.

➤ Pour les faibles débits

La trajectoire des particules fluides est une droite horizontale



➤ Pour des grands débits : les trajectoires sont aléatoires



Reynolds a constaté que la nature de l'écoulement (Laminaire ou turbulent) dépend de V_m , ρ , μ , D . en effet, il a démontré que cette nature dépend d'un nombre adimensionnel appelé **Nombre de Reynolds**, son expression est donnée par :

$$Re = \frac{\rho \langle V \rangle D}{\mu}$$

C'est un nombre sans dimension.

Avec $\langle V \rangle = V_m$ c'est la vitesse moyenne.

Si $Re \leq 2000$, l'écoulement est laminaire.

Si $Re > 2000$, l'écoulement est turbulent.

CALCUL DES PERTES DE CHARGES

I) Définition

On considère un écoulement permanent d'un fluide supposé réel qui circule à l'intérieur d'une conduite. En réalité, la sortie de cette conduite est caractérisée par une pression inférieure de celle observée à l'entrée de la canalisation. Cette différence de pression représente les pertes de charges qui dépendent essentiellement de la viscosité du fluide, la nature de l'écoulement ou la géométrie de la canalisation. On distingue deux principaux types de pertes de charge et qui sont les pertes de charges linéaires et singulières.

II) Pertes de charges linéaires

Dans le chapitre (V), nous avons mis en évidence que la pression chute de manière linéaire tout au long de l'axe d'une conduite rectiligne de section constante. Ce décalage de pression se traduit par la contribution d'une partie de cette énergie mécanique sous forme d'énergie interne, ainsi, ceci causera plus d'agitation atomique par le biais des forces de viscosité (ceci entraîne d'une manière explicite l'accroissement de l'entropie du système).

II-1) pertes de charges linéaires pour une conduite cylindrique en cas d'un écoulement laminaire

Pour une conduite cylindrique de longueur L ayant une section S sous forme d'un disque et caractérisée par un diamètre D , la différence de pression causée par la viscosité (frottement) est déduite à partir de :

$$Q_v = - \frac{G\pi R^4}{8\mu} = S\nu_m$$

Or $G = \frac{P_2 - P_1}{L}$, et ν_m représente la vitesse moyenne

$$\text{D'où, } P_2 - P_1 = \frac{8Q_v L \mu}{\pi R^4} = \frac{8S\nu_m L \mu}{\pi R^4} = \frac{8\pi R^2 \nu_m L \mu}{\pi R^4} = \frac{8\nu_m L \mu}{R^2}$$

$$\text{Donc } P_2 - P_1 = \frac{32\nu_m L \mu}{D^2}$$

$$\longrightarrow \quad \frac{P_2 - P_1}{\rho g} = \frac{32v_m L \mu}{\rho g D^2}$$

En remplaçant $Re = \frac{\rho v_m D}{\mu} = \frac{\rho v_m D}{\mu}$ dans l'expression précédente on obtient :

$$\frac{P_2 - P_1}{\rho g} = \frac{32v_m^2 L}{g D Re} = \frac{64L v_m^2}{Re D 2g}$$

Donc, l'expression de pertes de charges linéaires est représentée par :

$$H_l = \frac{P_2 - P_1}{\rho g} = \frac{64L v_m^2}{Re D 2g}$$

Avec $\lambda = \frac{64}{Re}$ représente le coefficient de perte de charge linéique

Finalement :

$$H_l = \frac{\lambda L v_m^2}{2 D g}$$

Remarque :

On ne peut utiliser cette loi qu'en cas d'un écoulement laminaire, c'est-à-dire pour $Re \leq 2000$.

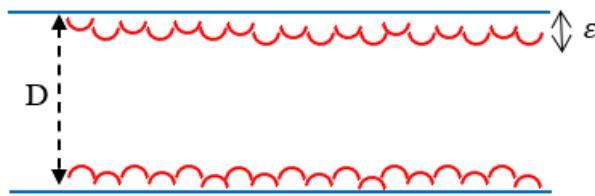
II-2) pertes de charges linéaires en cas d'un écoulement turbulent

Dans la plupart des systèmes existant, les valeurs du nombre de Reynolds Re sont très élevées par rapport au nombre $Re = 2000$. Cette situation donc stipule que les solutions analytiques des équations ne sont plus valables. Car dans la pratique, les tests effectués ont prouvé qu'un phénomène physique nouveau se manifeste au sein de l'écoulement appelé **la turbulence** ($Re > 10^5$).

De plus, pour un fluide caractérisé par régime turbulent à l'intérieur d'une conduite, le coefficient de perte de charge linéique λ dépend aussi de la rugosité de la paroi de la canalisation :

$$\lambda = f \left(R_e, \frac{\varepsilon}{D} \right)$$

Avec ε représente la longueur caractéristique de la rugosité et D le diamètre de la conduite.



$f \left(R_e, \frac{\varepsilon}{D} \right)$ est donnée par le diagramme de Moody illustré dans la figure suivante :

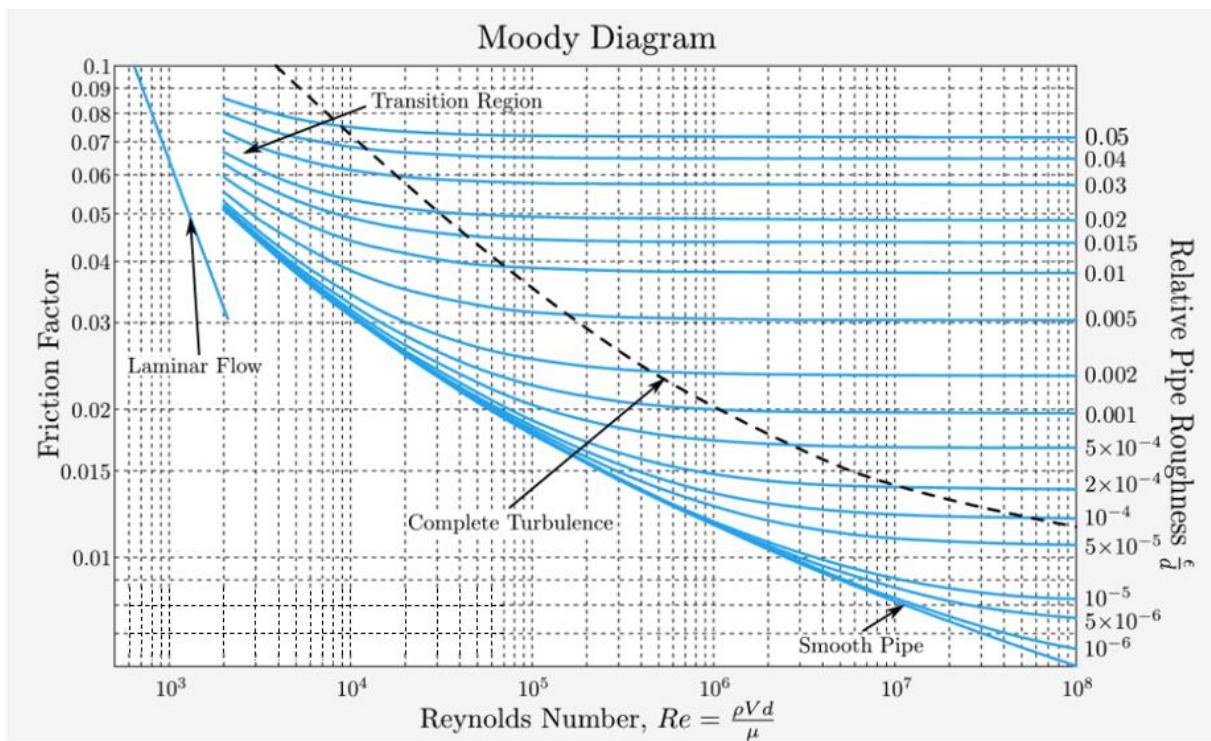


Fig. : coefficient de perte de charge dans une conduite de section circulaire

Il existe aussi d'autres formules empiriques qui fournissent des informations sur λ

- **Pour des conduites lisses :** $\frac{\varepsilon}{D} = 0$ et pour $2.10^3 < Re < 10^5$ l'écoulement est turbulent et régit par la **loi de Blasius** :

$$\lambda = \frac{0,316}{Re^{\frac{1}{4}}}$$

sous ces mêmes condition l'écoulement et aussi régit par **la formule implicite de PRANDTL :**

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \operatorname{Log}(Re\sqrt{\lambda}) - 0,8$$

- Pour des conduites rugueuses : c'est la **loi de COLEBROOK et WHITE** qui régit l'écoulement turbulent. Son expression est :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \operatorname{Log} \left(\frac{\varepsilon}{3,71D} + \frac{2,51}{Re\sqrt{\lambda}} \right)$$

- Pour des canalisations ayant des sections non circulaires, le diamètre hydraulique est caractérisé par l'expression suivante :

$$D_H = \frac{4S}{P}$$

Avec S représente la section de la canalisation et P représente son périmètre.

Par conséquent, l'expression de la perte de charge est exprimée par la relation suivante:

$$H_l = 8\lambda \rho q_v^2 \frac{L}{\pi^2 D_H^5}$$

Dans ce cas, le coefficient de perte de charge linéique dépend de la géométrie de la section.

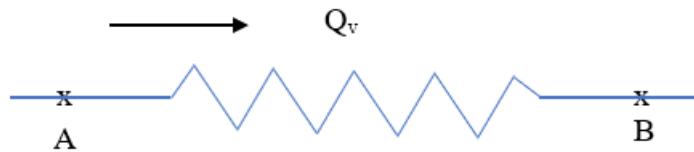
II-3) Pertes de charges linéaires pour une association des conduites montées en série et en parallèle

a) Analyse et analogie électrique :

Loi d'ohm



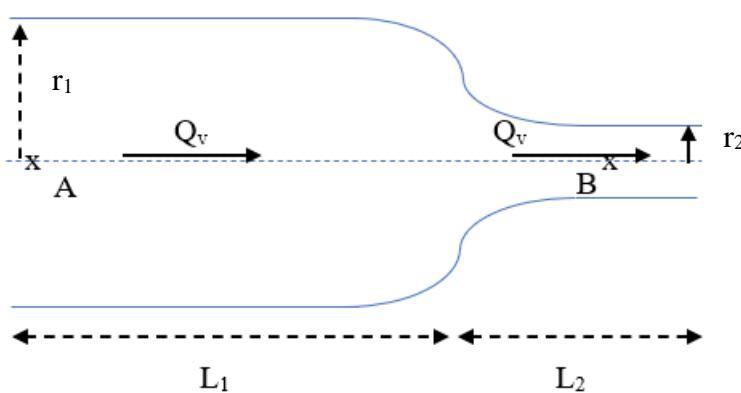
L'expression de la différence de potentielle : $V_A - V_B = R \cdot I$ (I : c'est le courant électrique)



Par analogie on trouve : $P_A - P_B = R \cdot Q_v$

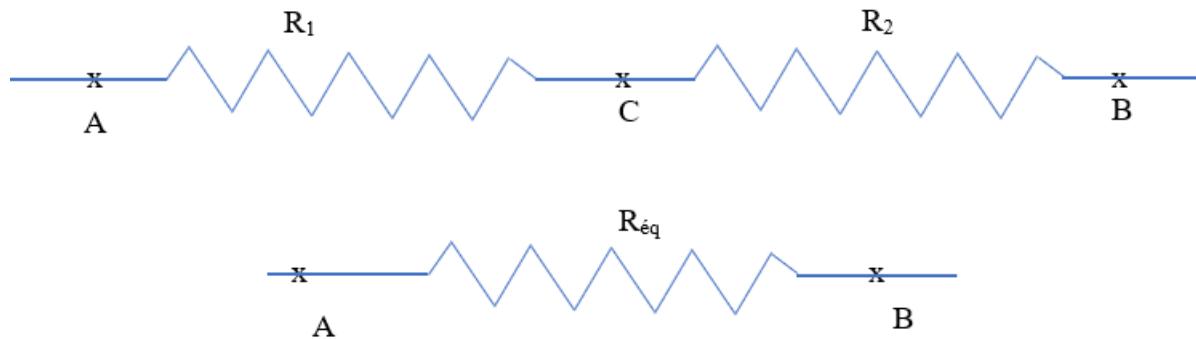
Avec $R = \frac{8L\mu}{\pi r^4}$, elle représente la résistance à l'écoulement,

b) Association en série :



$$R_1 = \frac{8L_1\mu}{\pi r_1^4}, \quad R_2 = \frac{8L_2\mu}{\pi r_2^4}$$

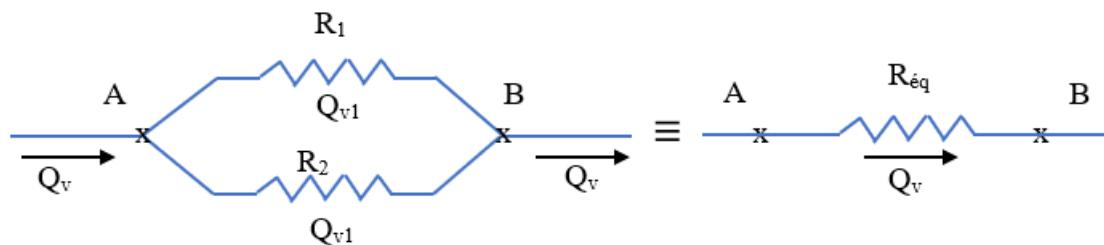
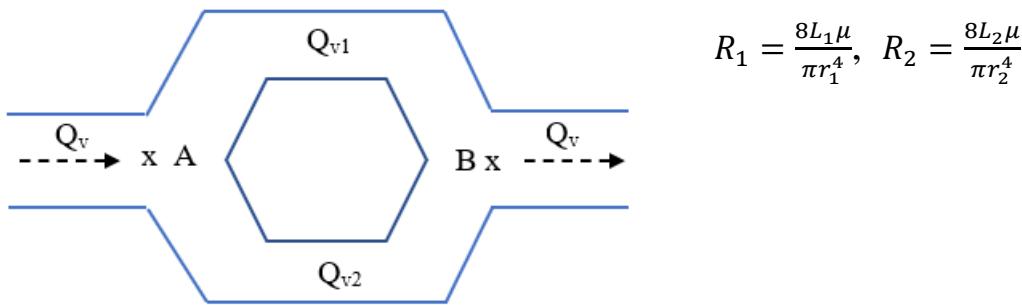
Le débit reste le même car le fluide est considéré comme incompressible



$$P_A - P_C = R_1 \cdot Q_v \quad \text{et} \quad P_C - P_B = R_2 \cdot Q_v$$

$$\text{Donc } P_A - P_B = R_{\text{éq}} \cdot Q_v = (R_1 + R_2) \cdot Q_v \quad \text{avec } R_{\text{éq}} = (R_1 + R_2)$$

c) Association en parallèle :



$$Q_v = Q_{v1} + Q_{v2}$$

$$P_A - P_B = R_1 \cdot Q_{v1} \quad \longrightarrow \quad Q_{v1} = \frac{P_A - P_B}{R_1}$$

$$\text{On peut écrire aussi que : } P_A - P_B = R_2 \cdot Q_{v2} \quad \longrightarrow \quad Q_{v2} = \frac{P_A - P_B}{R_2}$$

$$\text{De même on a : } P_A - P_B = R_{\text{éq}} \cdot Q_v \quad \longrightarrow \quad Q_v = \frac{P_A - P_B}{R_{\text{éq}}}$$

→ $\frac{1}{R_{\text{éq}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$

$$\text{Or } Q_v = SV_m \quad \longrightarrow \quad Q_v = \pi R^2 V_m$$

Si on remplace Q_v par $\pi R^2 V_m$ dans l'expression de $P_A - P_B$

$$\text{Donc } P_A - P_B = \frac{8\mu L V_m}{R^2}$$

Finalement l'expression de la perte de charge linéaire s'écrit sous la forme :

$$\frac{P_A - P_B}{\rho g} = \frac{8\mu L V_m}{\rho g R^2}$$

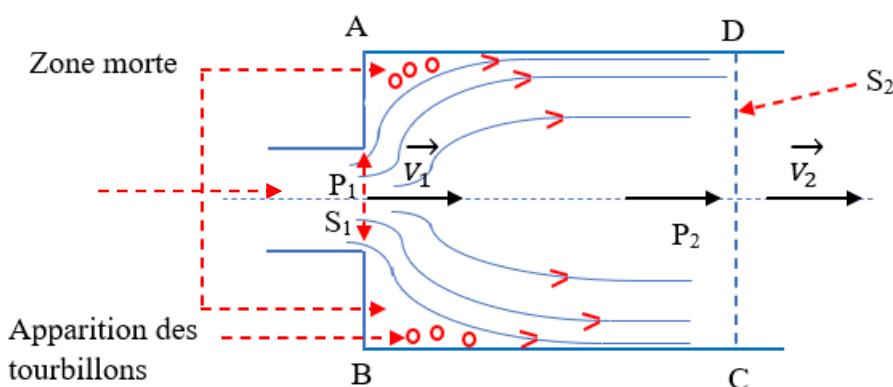
Son unité est le mètre.

III) Pertes de charges singulières

En outre des pertes de charges linéaires créées au sein des systèmes de distribution de fluide, on rajoute d'autres facteurs particuliers tels que les raccords entre canalisations caractérisés par des géométries différentes comme les (coudes, vannes, élargissements, branchements). Leurs présences engendrent de zones tourbillonnaires et un décollement du fluide des parois de la canalisation. Aussi, Ces facteurs contribuent d'une manière explicite à la diminution de la pression au niveau de sortie de la conduite et d'augmenter de plus les pertes de charge. D'où la notion de perte de charge singulière.

III-1) Cas d'une conduite horizontale avec un changement brusque de section

On considère un écoulement de fluide qui circule à l'intérieur d'une canalisation horizontale et qui représente une variation brusque la section.



Puisque le fluide est considéré comme incompressible, la condition de la conservation du débit volumique et massique est bien vérifiée.

$$Q_m = \text{cte} \longrightarrow \rho V_1 S_1 = \rho V_2 S_2$$

En utilisant le **théorème d'Euler** qui stipule que la somme des forces appliquées sur l'élément ABCD égale au débit massique multiplié par la différence de vitesse d'entrée et de sortie.

$$\sum \overrightarrow{F_{ABCD}} = Q_m (\overrightarrow{V_2} - \overrightarrow{V_1})$$

Projection horizontale :

$$Q_m(\vec{V}_2 - \vec{V}_1) = Q_m(V_2 - V_1) \vec{x}$$

➤ Sur la partie gauche on a :

$$[P_1 S_1 + P_1 (S_2 - S_1)] \vec{x} = P_1 S_2 \vec{x}$$

Le terme $P_1 (S_2 - S_1)$ représente la poussée de la paroi sur le fluide stagnant (zone morte dans les coins. Ce fluide est en équilibre avec le jet sortant de S_1 et il a une pression P_1 . La poussée de la paroi est donc $P_1 (S_2 - S_1)$.

➤ Sur la partie droite on a :

$$-P_2 S_2 \vec{x}$$

-----► Théorème d'Euler devient : $P_1 S_2 - P_2 S_2 = Q_m(V_2 - V_1)$

$$-----► \rho V_2 S_2 (V_2 - V_1)$$

$$-----► P_1 - P_2 = \rho V_2 (V_2 - V_1) = \frac{\rho}{2} [V_2^2 - V_1^2 + (V_2 - V_1)^2]$$

$$-----► P_1 + \frac{\rho}{2} V_1^2 = P_2 + \frac{\rho}{2} V_2^2 + \frac{\rho}{2} (V_2 - V_1)^2$$

$$-----► \underbrace{\frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g}}_{\mathbf{H}_1} = \underbrace{\frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g}}_{\mathbf{H}_2} + \underbrace{\frac{1}{2g} (V_2 - V_1)^2}_{\mathbf{H}_S: \text{Perte de charge singulière}}$$

$$\mathbf{H}_1$$

$$\mathbf{H}_2$$

$$\mathbf{H}_S: \text{Perte de charge singulière}$$

$$\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_2 + \mathbf{H}_S$$

$$\text{Avec } \mathbf{H}_S = \frac{1}{2g} (V_2 - V_1)^2$$

$$\text{Or } V_2 - V_1 = -(V_1 - V_2) \quad -----► \quad (V_2 - V_1)^2 = (V_1 - V_{12})^2$$

$$-----► \mathbf{H}_S = \frac{1}{2g} (V_1 - V_2)^2$$

$$\text{Or on sait que } V_1 S_1 = V_2 S_2 \quad -----► \quad V_2 = \frac{V_1 S_1}{S_2}$$

$$-----► H_S = \frac{1}{2g} V_1^2 \left(1 - \frac{S_1}{S_2}\right)^2$$

Posons $\xi = (1 - \frac{S_1}{S_2})^2$: elle représente le coefficient de perte de charge singulière dû à l'élargissement de la section. Donc :

$$H_S = \frac{1}{2g} \xi V_1^2$$

Si la conduite est horizontale on va obtenir :

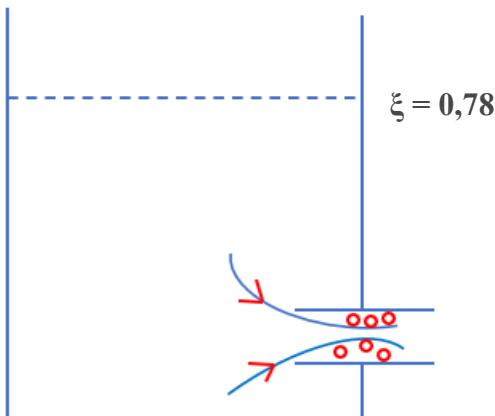
$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + Z_1 = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + Z_2 + \frac{1}{2g} \xi V_1^2$$

Dans une canalisation, il peut y avoir plusieurs types de singularité géométrique. On a toujours :

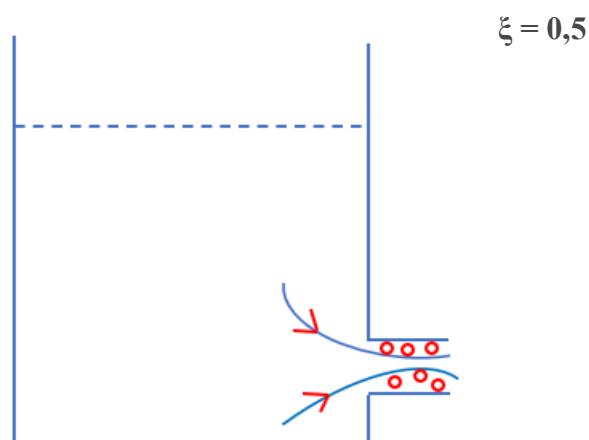
$$H_S = \frac{1}{2g} \xi V_1^2$$

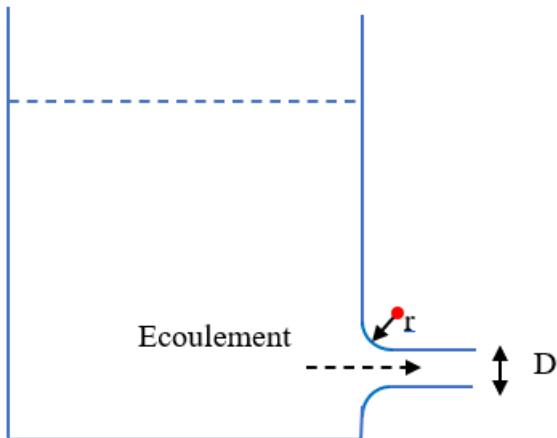
III-2) Coefficient de pertes de charges singulières pour différentes géométries en régime turbulent

a) Entrée entrante :



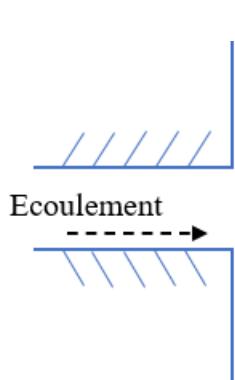
b) Entrée sans arrondi :



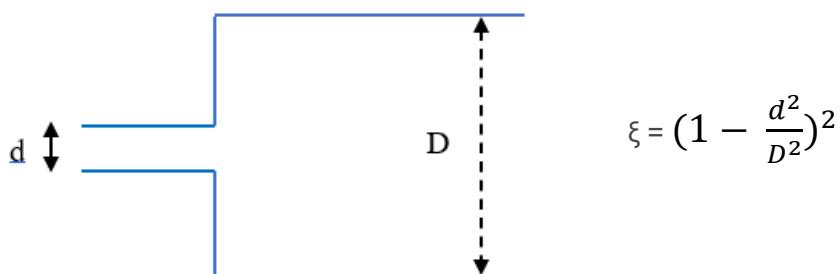
c) Entrée avec arrondi :

ξ dépend de r et D

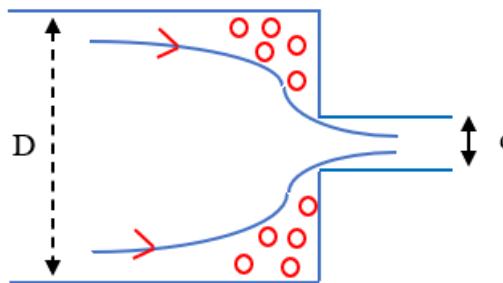
$\frac{r}{D}$	0,02	0,06	$\geq 0,15$
ξ	0,28	0,15	0,04

d) Sortie avec ou sans arrondi :

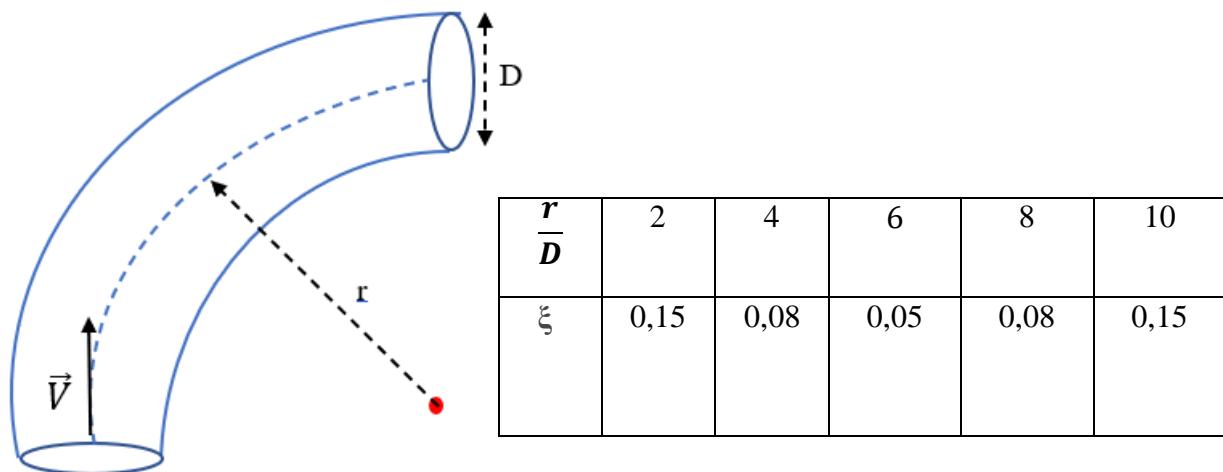
$$\xi = 1$$

e) Elargissement brusque :

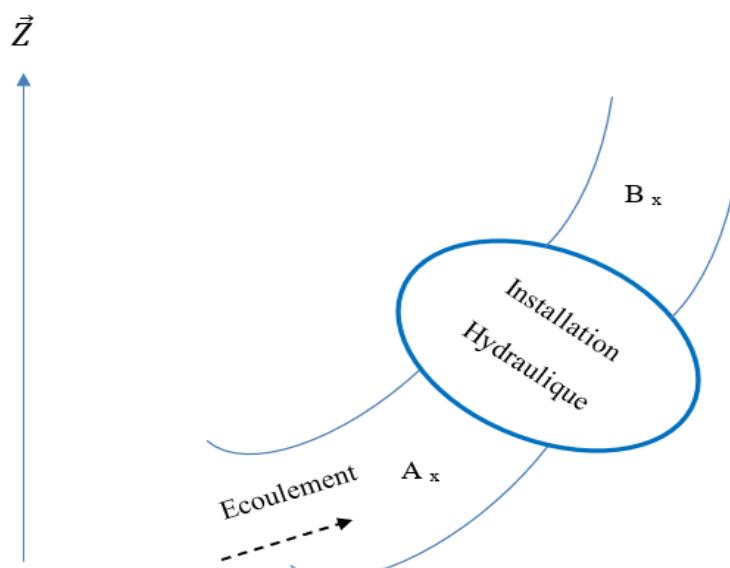
$$\xi = \left(1 - \frac{d^2}{D^2}\right)^2$$

f) Rétrécissement brusque :

$$\xi = 0,42 \left(1 - \frac{d^2}{D^2}\right)^2$$

g) Coudes :

IV) Généralisation du théorème du Bernoulli pour une installation hydraulique :



- Si l'installation hydraulique est une pompe, l'équation de Bernoulli prend la forme suivante :

$$\frac{P_A}{\rho g} + \frac{V_A^2}{2g} + Z_A = \frac{P_B}{\rho g} + \frac{V_B^2}{2g} + Z_B + H_l + H_S - H_{pompe}$$

Avec

$$H_A = \frac{P_A}{\rho g} + \frac{V_A^2}{2g} + Z_A \quad \text{et} \quad H_B = \frac{P_B}{\rho g} + \frac{V_B^2}{2g} + Z_B$$

Où H_A et H_B sont respectivement les charges aux points A et B.

Donc :

$$H_A = H_B + H_l + H_S - H_{pompe}$$

La pompe permet d'augmenter la charge d'un fluide dans un tel système.

- Si l'installation hydraulique est une turbine, l'équation de Bernoulli prend la forme suivante :

$$H_A = H_B + H_l + H_S + H_{Turbine}$$

La turbine permet de diminuer la charge d'un fluide dans un tel système.