

TD de Thermodynamique (GP, GC, GI, MSD) -S1

Série 3

Exercice 1

On considère une mole d'un gaz parfait à l'état initial A (P_0, V_0, T_0). Toutes les transformations sont considérées réversibles.

1. Calculer la quantité de chaleur qu'il faut fournir au gaz pour maintenir sa température constante à $T_0 = 300K$ lorsque sa pression passe de P_0 à $P_1 = 2P_0$. On appellera (1) cette transformation.
2. Quelle serait la variation de la température du gaz si, au cours de la transformation où sa pression passe de P_0 à $P_2 = 2P_0$, il n'y a pas d'échange de chaleur avec le milieu extérieur? Calculer alors sa température finale T_2 . On appellera (2) cette transformation.
3. Calculer les volumes V_1 et V_2 en fonction de V_0 et représenter dans le diagramme de Clapeyron les deux transformations (1) et (2) en indiquant le sens.
4. On considère une 3ème transformation (3) qui fait passer le gaz de l'état final de (1) à l'état final de (2). Calculer le travail et la quantité de chaleur échangés lors de cette dernière transformation, donner leurs expressions en fonction de T_0 .

On donne : $R = 8.3145 J.mol^{-1}K^{-1}$ et $\gamma = 1.4$

Exercice 2

Une mole de gaz reçoit au cours d'une transformation réversible élémentaire, une quantité de chaleur élémentaire δQ qui s'exprime par :

$$\delta Q = c_v dT + l dV$$

$$\delta Q = c_p dT + h dP$$

$$\delta Q = \lambda dP + \mu dV$$

1. Donner les expressions des coefficients calorimétrique l, h, λ et μ en fonction de C_p, C_v et des dérivées partielles : $\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P$ et $\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V$.
2. Dans le cas du gaz parfait.
 - a. Exprimer l, h, λ et μ en fonction de P, V et $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$.
 - b. En déduire la relation entre P et V , au cours d'une transformation adiabatique réversible (on considère $\gamma = Cte$)

c. Montre que $\left| \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_{Q=0} \right| > \left| \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_T \right|$, sachant que $\gamma > 1$.

Que représentent ces deux quantités dans le diagramme de Clapeyron (P, V) ? Conclure.

Exercice 3

On considère une masse $m = 14g$ d'azote, supposé parfait, placée dans les conditions suivantes :

Etat A, pression $P_A = 10^5 Pa$, $T_A = 273K$. On donne $R = 8.32 J/mol K$. Masse molaire de l'azote $M = 28g/mol$. Rapport des chaleurs massiques à pression et à volume constants :

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} = 1.4$$

- Calculer le nombre de moles n et le volume V_A .
- Le gaz est comprimé de façon isotherme réversible jusqu'à l'état B où $P_B = 10 P_A$.
 - Calculer le volume V_B .
 - Calculer le travail W_{AB} de cette transformation et déduire la quantité de chaleur Q_{AB} .
- La même masse de gaz, après avoir été ramené à l'état A est comprimé de façon adiabatique réversible jusqu'à l'état C où $P_C = 10 P_A$.
 - Calculer le volume V_C et la température T_C .
 - Calculer le travail W_{AC} et déduire la chaleur massique à volume constant de ce gaz.
- Représenter sur un diagramme de Clapeyron ces transformations.
- Calculer pour chaque transformation la variation de l'énergie interne.

Exercice 4

Une mole de gaz parfait subit le cycle de transformations réversibles suivant :

A (P_1, V_1, T_1) \rightarrow B (P_2, V_2, T_2) : une compression adiabatique.

B (P_2, V_2, T_2) \rightarrow C (P_3, V_3, T_3) : une dilatation isobare.

C (P_3, V_3, T_3) \rightarrow D (P_4, V_4, T_4) : une détente adiabatique.

D (P_4, V_4, T_4) \rightarrow A (P_1, V_1, T_1): un refroidissement isochore.

En A, on donne $P_1 = 10^5 Pa$ et $T_1 = 300 K$.

On note $a = \frac{V_1}{V_2} = 9$, $b = \frac{V_4}{V_3} = 3$, $R = 8.3145 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \text{K}^{-1}$ et on suppose que $\gamma = 1.4$.

1. Représenter l'allure du cycle dans le diagramme de Clapeyron. Comment vérifier simplement qu'il s'agit d'un cycle moteur?
2. Déterminer les expressions de P_2, P_3 et P_4 en fonction de a, b, γ et P_1 et faire l'application numérique. Calculer V_1, V_2, V_3 et V_4 .
3. Donner les expressions des capacités thermiques molaires C_{pm} et C_{vm} en fonction de γ et R .
4. On donnera les résultats numériques suivants en kJ et avec deux chiffres significatifs seulement.
 - a. Calculer les quantités de chaleurs échangées au cours du cycle.
 - b. Calculer les travaux échangés au cours de ce cycle.
 - c. Montrer que le premier principe est vérifié.

Correction de la série 3

Exercice 1

1. La quantité de la chaleur ?

Une mole de Gaz Parfait subit à une transformation isotherme et passe de l'état initial (P_0, V_0, T_0) à l'état 1 $(2P_0, V_1, T_0)$, puisque la variation de la température est nulle et que l'on connaît la variation totale de la pression durant de cette transformation, il y a lieu d'utiliser comme variable d'état le couple (T, P) pour lesquelles l'expression de la quantité de chaleur élémentaire est :

$$\delta Q = C_{pm} dT + h dP \quad \text{et} \quad dT = 0$$

Dans le cas d'un Gaz Parfait le coefficient calorimétrique : $h = -V$ d'où $\delta Q = -V dP$ et puisque $V = \frac{RT_0}{P}$.

La quantité de chaleur échangée par le gaz durant la transformation $(P_0, V_0, T_0) \rightarrow (2P_0, V_1, T_0)$ est alors :

$$Q = - \int_{P_0}^{2P_0} V dP = - \int_{P_0}^{2P_0} \frac{RT_0}{P} dP = -RT_0 \int_{P_0}^{2P_0} \frac{dP}{P} = -RT_0 \ln \frac{2P_0}{P_0} = -RT_0 \ln 2$$

$$\text{AN : } Q = -8.3145 \times 300 \times \ln 2 = -1729J$$

2. La température T_2 ?

Puisqu'il n'y a pas d'échange de la chaleur avec le milieu extérieur, la transformation est adiabatique. Par hypothèse, elle est réversible et fait passer le système de l'état initial (P_0, V_0, T_0) à l'état 2 $(2P_0, V_2, T_2)$, on peut appliquer la loi de Laplace : $P^{1-\gamma} T^\gamma = cste$.

$$\text{D'où : } P_0^{1-\gamma} T_0^\gamma = P_2^{1-\gamma} T_2^\gamma = 2^{1-\gamma} P_0^{1-\gamma} T_2^\gamma \Rightarrow T_2^\gamma = 2^{\gamma-1} T_0^\gamma \Rightarrow T_2 = 2^{(\gamma-1)/\gamma} T_0$$

$$\text{Avec } \gamma = 1.4 \quad \text{alors, AN : } T_2 = 2^{(1.4-1)/1.4} \times 300 = 365.7K$$

3. Le diagramme de Clapeyron pour les deux transformations en indiquant le sens et les volumes V_1 et V_2 en fonction de V_0 ?

Il suffit d'utiliser la loi des gaz parfaits qui s'écrit ici dans le premier cas sous la forme :

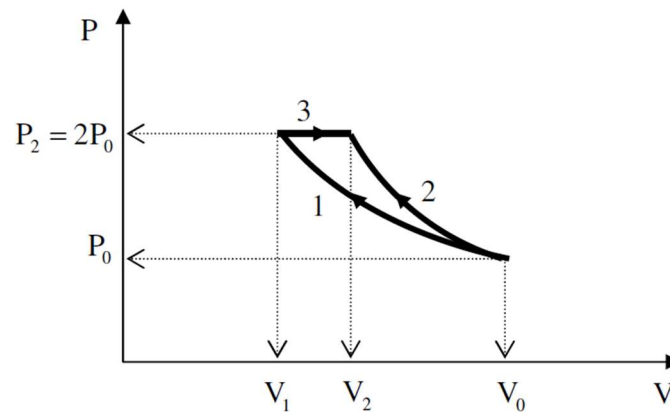
$$P_0 V_0 = R T_0 \quad \text{et} \quad P_1 V_1 = R T_0, \text{ soit: } P_0 V_0 = P_1 V_1 \Rightarrow P_0 V_0 = 2P_0 V_1 \Rightarrow V_1 = \frac{V_0}{2}$$

Pour le volume V_2 , on a $P_0 V_0 = R T_0$ et $P_2 V_2 = R T_2$, soit $P_2 V_2 = R 2^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} T_0 = 2^{(\gamma-1)/\gamma} P_0 V_0$

$$2P_0 V_2 = 2^{(\gamma-1)/\gamma} P_0 V_0 \Rightarrow V_2 = 2^{(\gamma-1)/\gamma} 2^{-1} V_0 \Rightarrow V_2 = \frac{V_0}{2^{1/\gamma}}$$

On peut constater, puisque $\gamma > 1$ et que $\frac{1}{\gamma} < 1$ et $2^{1/\gamma} < 2$ et on a : $V_1 = \frac{V_0}{2}$, $V_0 = 2V_1$
 donc $V_2 = \frac{2V_1}{2^{1/\gamma}}$, ce qui donne $V_2 > V_1$.

Le diagramme de Clapeyron pour les deux transformations :



4. La transformation (3) est isobare et s'effectue à la pression $2P_0$. Elle fait passer le système de l'état $(2P_0, V_1, T_0)$ à l'état $(2P_0, V_2, T_2)$. Elle est représentée par la tranche 3 du diagramme de Clapeyron.

- Calcul du travail échangé durant la transformation (3) :

La transformation est réversible, donc $\delta W = -PdV$. Le travail échangé est :

$$W = \int_{V_1}^{V_2} -PdV = -2P_0 \int_{V_1}^{V_2} dV = 2P_0(V_2 - V_1) = -P_0V_0 \left(2^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right) = -RT_0 \left(2^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right)$$

$$\text{AN : } W = -8.3145 \times 300 \times \left(2^{\frac{1.4-1}{1.4}} - 1 \right) = -546.3J$$

- Calcul de la quantité de chaleur échangée durant la transformation (3) :

Il suffit d'utiliser les coefficients calorimétriques appropriés. En effet, on connaît la variation de la température et la pression est ici constante, il y a donc lieu d'utiliser la quantité de chaleur élémentaire sous la forme : $\delta Q = C_{Pm} dT + h dP$. Ce qui donne pour cette transformation isobare : $\delta Q = C_{Pm} dT$. La quantité de chaleur échangée est alors : $Q = \int_{T_0}^{T_2} C_{Pm} dT$. Pour calculer la chaleur spécifique molaire C_{Pm} , il suffit de se rappeler la relation de Mayer :

$$C_{Pm} - C_{Vm} = R \text{ et de la définition } \gamma = \frac{C_{Pm}}{C_{Vm}}, \text{ ce qui donne : } C_{Pm} = \frac{\gamma R}{\gamma-1}.$$

$$\text{D'où } Q = \int_{T_0}^{T_2} C_{Pm} dT = \frac{\gamma R}{\gamma-1} (T_2 - T_0) \Rightarrow Q = \frac{\gamma R}{\gamma-1} T_0 \left(2^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right)$$

$$\text{AN : } Q = \frac{1.4 \times 8.3145}{1.4-1} \times 300 \times \left(2^{\frac{1.4-1}{1.4}} - 1 \right) = 1912J$$

Exercice 2

Une mole de gaz reçoit au cours d'une transformation réversible élémentaire, une quantité de chaleur élémentaire δQ qui s'exprime par :

$$\delta Q = c_v dT + l dV \quad (1)$$

$$\delta Q = c_p dT + h dP \quad (2)$$

$$\delta Q = \lambda dP + \mu dV \quad (3)$$

1. Les expressions des coefficients calorimétrique l, h, λ et μ en fonction de C_p, C_v et des dérivées partielles : $\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P$ et $\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V$.

La forme différentielle de T : $dT = \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V dP + \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P dV \quad (4)$

On remplace l'équation (4) dans l'équation (1) et (2), et on obtient :

$$\delta Q = c_v \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V dP + \left[c_v \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P + l \right] dV \quad (5)$$

$$\delta Q = \left[c_p \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V + h \right] dP + c_p \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P dV \quad (6)$$

On compare les équations (5) et (6) avec l'équation (3), et on obtient :

$$\lambda = c_v \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V = c_p \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V + h \quad (7)$$

$$\mu = c_p \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P = c_v \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P + l \quad (8)$$

Soit encore :

D'après (7) on aura : $h = (c_v - c_p) \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V$

Et d'après (8) on aura : $l = (c_p - c_v) \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P$

$$\lambda = c_v \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V \quad \text{et} \quad \mu = c_p \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P$$

2. Dans le cas du gaz parfait.

- a. Les coefficients l, h, λ et μ en fonction de P, V et $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$.

On calcule : $\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V$ et $\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P$ à partir de l'équation d'état d'une mole de Gaz Parfait : $PV = RT$,
 alors : $\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P = \frac{P}{R}$ et $\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V = \frac{V}{R}$

D'après la relation de Mayer, on a : $c_p - c_v = R$ et $\gamma = \frac{c_p}{c_v} \rightarrow c_p = \gamma c_v$

$$\gamma c_v - c_v = R \rightarrow (\gamma - 1)c_v = R \rightarrow c_v = \frac{R}{\gamma - 1} \text{ et } c_p = \frac{R\gamma}{\gamma - 1}$$

On remplace alors :

$$h = (-R) \frac{V}{R} = -V \rightarrow h = -V \text{ et } l = (R) \frac{P}{R} = P \rightarrow l = P$$

$$\lambda = \frac{R}{\gamma - 1} \frac{V}{R} = \frac{V}{\gamma - 1} \rightarrow \lambda = \frac{V}{\gamma - 1} \text{ et } \mu = \frac{R\gamma}{\gamma - 1} \frac{P}{R} = \frac{\gamma P}{\gamma - 1} \rightarrow \mu = \frac{\gamma P}{\gamma - 1}$$

b. La relation entre P et V , au cours d'une transformation adiabatique réversible (on considère $\gamma = Cte$) :

$$\delta Q = 0 \rightarrow \lambda dP + \mu dV = 0$$

$$\frac{V}{\gamma - 1} dP + \frac{\gamma P}{\gamma - 1} dV = 0 \rightarrow \frac{PV}{\gamma - 1} \left(\frac{dP}{P} + \gamma \frac{dV}{V} \right) = 0$$

Or : $\frac{PV}{\gamma - 1} \neq 0$

Alors $\frac{dP}{P} + \gamma \frac{dV}{V} = 0 \rightarrow \frac{dP}{P} = -\gamma \frac{dV}{V} \rightarrow \int \frac{dP}{P} = -\gamma \int \frac{dV}{V} \rightarrow \ln P = -\gamma \ln V + Cste$

$\ln P + \gamma \ln V = Cste \rightarrow \ln P + \ln V^\gamma = Cste \rightarrow \ln(P \cdot V^\gamma) = Cste \rightarrow P \cdot V^\gamma = Cste$

c. On Montre que $\left| \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_{Q=0} \right| > \left| \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T \right|$, sachant que $\gamma > 1$.

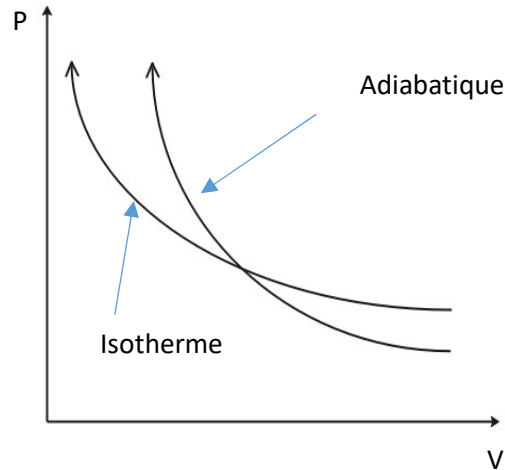
Que représentent ces deux quantités dans le diagramme de Clapeyron (P, V) ? Conclure.

- La transformation est adiabatique : $PV^\gamma = Cste = A$ alors $P = \frac{A}{V^\gamma}$
- La transformation est isotherme : $PV = Cste = B$ alors $P = \frac{B}{V}$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T = -\frac{B}{V^2} = -\frac{P}{V} \text{ et } \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_{Q=0} = -\gamma \frac{A}{V^{\gamma+1}} = -\frac{\gamma P}{V}$$

Alors , $\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_{Q=0} = \gamma \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T$ sachant que $\gamma > 1$ alors $\left| \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_{Q=0} \right| > \left| \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T \right|$

Donc la pente adiabatique est toujours plus élevée que la pente isotherme.



Exercice 3

On considère une masse $m = 14g$ d'azote, supposé parfait, placée dans les conditions suivantes :

Etat A, pression $P_A = 10^5 Pa$, $T_A = 273k$.

On donne $R = 8.32 J/mol K$. Masse molaire de l'azote $M = 28g/mol$. Rapport des chaleurs massiques à pression et à volume constants : $\gamma = \frac{c_p}{c_v} = 1.4$

1. Le nombre de moles n et le volume V_A :

$$n = \frac{m}{M} = \frac{14}{28} = 0.5 \text{ mole}$$

L'azote est un gaz parfait, alors $P_A V_A = n R T_A$

$$\text{Donc } V_A = \frac{n R T_A}{P_A}$$

$$\text{AN : } V_A = \frac{0.5 \times 8.32 \times 273}{10^5} = 0.0114 \text{ m}^3 = 11.4 \text{ l}$$

2. Le gaz est comprimé de façon isotherme réversible jusqu'à l'état B où $P_B = 10 P_A$.

a. Le volume V_B :

(AB) est une transformation isotherme réversible : $PV = Cste$

$$P_A V_A = P_B V_B \rightarrow V_B = \frac{P_A V_A}{P_B} = \frac{P_A V_A}{10 P_A} = \frac{V_A}{10}$$

$$\text{AN : } V_B = \frac{11.4}{10} = 1.14 \text{ l}$$

b. Le travail W_{AB} de cette transformation et la quantité de chaleur Q_{AB} :

Par définition : $\delta W = -PdV$ et comme $PV = P_A V_A = Cste \rightarrow P = \frac{P_A V_A}{V}$

Alors : $\delta W = -\frac{P_A V_A}{V} dV$

$$W_{AB} = -P_A V_A \int_A^B \frac{dV}{V} = -P_A V_A \ln \frac{V_B}{V_A} = P_A V_A \ln \frac{V_A}{V_B}$$

$$\text{AN : } W_{AB} = 10^5 \times 0.0114 \times \ln \frac{11.4}{1.14} = 2613 \text{ J}$$

D'après le 1^{er} principe de la thermodynamique : $\Delta U_{AB} = W_{AB} + Q_{AB}$

D'après le 1^{er} loi de Joule : $\Delta U_{AB} = C_v dT$ et on la transformation (AB) est isotherme, $T = Cste \rightarrow \Delta U_{AB} = 0$

$$\text{Alors : } Q_{AB} = W_{AB} = -2613 \text{ J}$$

3. La même masse de gaz, après avoir été ramené à l'état A est comprimé de façon adiabatique réversible jusqu'à l'état C où $P_C = 10 P_A$.

a. Le volume V_C et la température T_C :

(AC) est une transformation adiabatique réversible $Q = 0$, alors la loi de Laplace $PV^\gamma = Cste$.

$$P_C V_C^\gamma = P_A V_A^\gamma \rightarrow V_C = V_A \left(\frac{P_A}{P_C} \right)^{\frac{1}{\gamma}} = V_A \left(\frac{P_A}{10 P_A} \right)^{\frac{1}{\gamma}} = V_A \left(\frac{1}{10} \right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

$$\text{AN : } V_C = 11.4 \times \left(\frac{1}{10} \right)^{\frac{1}{1.4}} = 2.2 \text{ l}$$

D'après la loi de Laplace : $T V^{\gamma-1} = Cste$

$$\text{Alors : } T_C V_C^{\gamma-1} = T_A V_A^{\gamma-1} \rightarrow T_C = T_A \left(\frac{V_A}{V_C} \right)^{\gamma-1}$$

$$\text{AN : } T_C = 273 \times \left(\frac{11.4}{2.2} \right)^{1.4-1} = 527.2 \text{ K}$$

b. Le travail W_{AC} et déduire la chaleur massique à volume constant de ce gaz.

$$\text{On a : } \delta W = -PdV \text{ et } PV^\gamma = P_A V_A^\gamma = P_C V_C^\gamma \rightarrow P = \frac{P_A V_A^\gamma}{V^\gamma}$$

$$\delta W = -PdV, \quad \delta W = -\frac{P_A V_A^\gamma}{V^\gamma} dV$$

$$\text{Alors : } W_{AC} = -P_A V_A^\gamma \int_A^C \frac{dV}{V^\gamma} = -P_A V_A^\gamma \left[\frac{V^{1-\gamma}}{1-\gamma} \right]_A^C = -P_A V_A^\gamma \left(\frac{V_C^{1-\gamma} - V_A^{1-\gamma}}{1-\gamma} \right)$$

$$W_{AC} = \frac{P_C V_C - P_A V_A}{\gamma - 1} = \frac{nR(T_C - T_A)}{\gamma - 1}$$

$$\text{AN : } W_{AC} = \frac{0.5 \times 8.32 \times (527.2 - 273)}{1.4 - 1} = 2643.6 \text{ J}$$

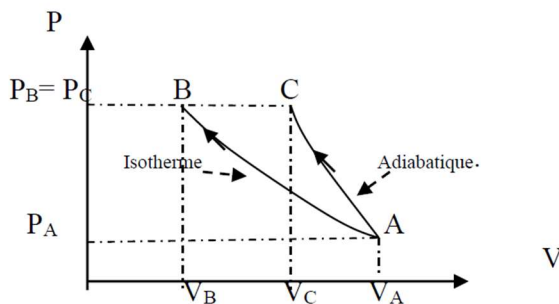
D'après le 1^{er} principe de la thermodynamique : $\Delta U_{AC} = W_{AC} + Q_{AC}$ or $Q_{AC} = 0$

D'après le 1^{er} loi de Joule $\Delta U_{AC} = m c_v (T_C - T_A) = W_{AC}$ d'où $c_v = \frac{W_{AC}}{m (T_C - T_A)}$

$$\text{AN : } c_v = \frac{2643.6}{14 \times (527.2 - 273)} = 0.7434 \text{ J/g.K}$$

A partir de $\gamma = \frac{c_p}{c_v} \rightarrow c_p = \gamma c_v$ alors, AN : $c_p = 1.4 \times 0.7434 = 1.0408 \text{ J/g.K}$

4. Le diagramme de Clapeyron ces transformations :



5. La variation de l'énergie interne pour chaque transformation :

$\Delta U_{AB} = 0$ car la transformation est isotherme.

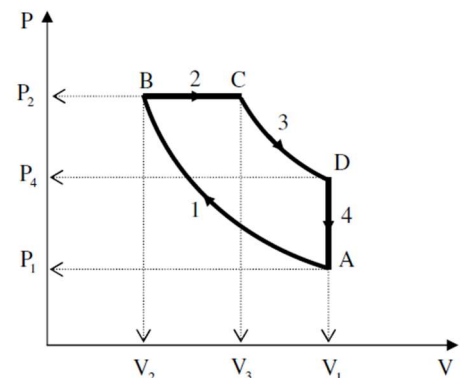
$\Delta U_{AC} = W_{AC}$ car la transformation est adiabatique.

Exercice 4

1. Représentation de l'allure du cycle dans le diagramme de Clapeyron.

Le cycle est moteur car le travail échangé par le système durant le cycle est négatif.

On le voit directement à partir du diagramme : le cycle est décrit dans le sens des aiguilles d'une montre, donc $W < 0$.



2. Calcul de P_2 , P_3 et P_4 en fonction de a , b , γ et P_1 :

- Calcul de P_2 :

La transformation qui fait passer le système de $A \rightarrow B$ est adiabatique, donc $P_1 V_1^\gamma = P_2 V_2^\gamma$

$$P_2 = P_1 \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^\gamma = P_1 a^\gamma$$

- Calcul de P_3 :

La transformation faisant passer le système de l'état $B \rightarrow C$ est isobare.

D'où $P_3 = P_2 = P_1 a^\gamma$

- Calcul de P_4 :

La transformation qui fait passer le système de $C \rightarrow D$ est adiabatique, donc $P_4 V_4^\gamma = P_3 V_3^\gamma$

- $P_4 = P_3 \left(\frac{V_3}{V_4} \right)^\gamma = P_3 b^{-\gamma} = P_1 (a/b)^\gamma$

$$\text{AN : } P_2 = 10^5 \times 9^{1.4} = 21.67 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$P_3 = P_2 = 10^5 \times 9^{1.4} = 21.67 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$P_4 = 10^5 (9/3)^{1.4} = 4.66 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

Calculer V_1, V_2, V_3 et V_4 .

- Calculer V_1 : Le gaz est parfait, donc : $P_1 V_1 = R T_1$. Ce qui donne : $V_1 = \frac{R T_1}{P_1}$

$$\text{AN : } V_1 = \frac{8.314 \times 300}{10^5} = 24.94 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

- Calculer V_2 : $a = \frac{V_1}{V_2} \rightarrow V_2 = \frac{V_1}{a}$

$$\text{AN : } V_2 = \frac{24.94 \cdot 10^{-3}}{9} = 2.77 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

- Calculer V_3 : $b = \frac{V_4}{V_3}$ et $V_4 = V_1 \rightarrow V_3 = \frac{V_1}{b}$

$$\text{AN : } V_3 = \frac{24.94 \cdot 10^{-3}}{3} = 8.314 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

- Calculer V_4 : $V_4 = V_1$ car la transformation (DA) est isochore.

3. On a d'après la relation de Mayer $C_{Pm} - C_{Vm} = R$ et on $\gamma = \frac{C_{Pm}}{C_{Vm}} \rightarrow C_{Pm} = \gamma C_{Vm}$

Alors $\gamma C_{Vm} - C_{Vm} = R \rightarrow (\gamma - 1)C_{Vm} = R \rightarrow C_{Vm} = \frac{R}{(\gamma-1)}$ et $C_{Pm} = \gamma \frac{R}{(\gamma-1)}$

4. On donnera les résultats numériques suivants en kJ et avec deux chiffres significatifs seulement.

a. Quantités de chaleur échangées durant le cycle :

La transformation (1) : $A \rightarrow B$ est adiabatique, donc $Q_1 = 0 \text{ kJ}$

La transformation (2) : $B \rightarrow C$ est isobare, il est pertinent de prendre pour l'expression de la quantité de chaleur élémentaire.

$$\delta Q = C_{pm} dT + h dP$$

Ici : $dP = 0$ alors $Q_2 = \int_{T_2}^{T_3} C_{pm} dT = \gamma \frac{R}{(\gamma-1)} \int_{T_2}^{T_3} dT = \frac{\gamma R}{(\gamma-1)} (T_3 - T_2)$

En utilisant la loi de gaz parfait : $T_3 = \frac{P_3 V_3}{R}$ et $T_2 = \frac{P_2 V_2}{R}$

$$Q_2 = \frac{\gamma R}{(\gamma - 1)} \left(\frac{P_3 V_3}{R} - \frac{P_2 V_2}{R} \right) = \frac{\gamma R}{(\gamma - 1)} \left(\frac{P_2 V_3}{R} - \frac{P_2 V_2}{R} \right) = \frac{\gamma P_2}{(\gamma - 1)} (V_3 - V_2)$$

AN : $Q_2 = \frac{1.4 \times 21.67 \cdot 10^5}{(1.4-1)} (8.314 \cdot 10^{-3} - 2.77 \cdot 10^{-3}) = 42 \text{ kJ}$

La transformation (3) : $C \rightarrow D$ est adiabatique, donc $Q_3 = 0 \text{ kJ}$

La transformation (4) : $D \rightarrow A$ est isochore, il est pertinent de prendre pour l'expression de la quantité de chaleur élémentaire.

$$\delta Q = C_{vm} dT + l dV$$

Ici : $dV = 0$ alors $Q_4 = \int_{T_4}^{T_1} C_{vm} dT = \frac{R}{(\gamma-1)} (T_1 - T_4)$

En utilisant la loi de gaz parfait : $T_1 = \frac{P_1 V_1}{R}$ et $T_4 = \frac{P_4 V_1}{R}$

$$Q_4 = \frac{V_1}{(\gamma - 1)} (P_1 - P_4)$$

AN : $Q_4 = \frac{24.94 \cdot 10^{-3}}{(1.4-1)} (10^5 - 4.66 \cdot 10^5) = -23 \text{ kJ}$

b. Les travaux échangés durant le cycle :

La transformation (1) : $A \rightarrow B$ est adiabatique réversible, donc le travail élémentaire échangé est : $\delta W = -P dV$ avec la loi de Laplace $PV^\gamma = Cste$.

D'où $P_1 V_1^\gamma = P_2 V_2^\gamma = PV^\gamma = Cste \rightarrow P = \frac{P_1 V_1^\gamma}{V^\gamma}$

$$\delta W = -\frac{P_1 V_1^\gamma}{V^\gamma} dV$$

$$W_1 = -P_1 V_1^\gamma \int_1^2 \frac{dV}{V^\gamma} = -P_1 V_1^\gamma \left[\frac{V^{1-\gamma}}{1-\gamma} \right]_1^2 = -P_1 V_1^\gamma \left(\frac{V_2^{1-\gamma} - V_1^{1-\gamma}}{1-\gamma} \right) = \frac{P_2 V_2 - P_1 V_1}{\gamma - 1}$$

$$\text{AN : } W_1 = \frac{(21.67 \cdot 10^5 \times 2.77 \cdot 10^{-3}) - (10^5 \times 24.94 \cdot 10^{-3})}{1.4-1} = 8.9 \text{ kJ}$$

La transformation (2) : $B \rightarrow C$ est isobare réversible, donc le travail élémentaire échangé est :

$$\delta W = -P dV \quad \text{avec } P_2 = P_3 = P$$

$$W_2 = \int_2^3 -P dV = -P_2 \int_2^3 dV = -P_2 (V_3 - V_2)$$

$$\text{AN : } W_2 = -21.67 \cdot 10^5 \times (8.314 \cdot 10^{-3} - 2.77 \cdot 10^{-3}) = -12 \text{ kJ}$$

La transformation (3) : $C \rightarrow D$ est adiabatique réversible, donc le travail élémentaire échangé est : $\delta W = -P dV$ avec la loi de Laplace $PV^\gamma = Cste$.

$$\text{Alors : } W_3 = \frac{P_4 V_4 - P_3 V_3}{\gamma - 1}$$

$$\text{AN : } W_3 = \frac{(4.66 \cdot 10^5 \times 24.94 \cdot 10^{-3}) - (21.67 \cdot 10^5 \times 8.314 \cdot 10^{-3})}{1.4-1} = -16 \text{ kJ}$$

La transformation (4) : $D \rightarrow A$ est isochore réversible, donc le travail élémentaire échangé est : $\delta W = -P dV$ où $V = cste$ alors $dV = 0$ donc $W_4 = 0 \text{ kJ}$

- c. Durant un cycle, l'état final coïncide avec l'état initial, du fait que l'énergie interne est une fonction état, elle ne varie pas de sorte que durant le cycle $\Delta U = 0$

$$\text{Or } \Delta U = W + Q = 0$$

$$\text{Avec } W = W_1 + W_2 + W_3 + W_4 = 8.9 - 12 - 16 + 0 = -19 \text{ kJ}$$

$$\text{Et } Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 = 0 + 42 + 0 - 23 = 19 \text{ kJ}$$

$$\Delta U = W + Q = 0$$

On peut donc conclure que le 1^{er} principe de la thermodynamique est bien vérifié.