Université Moulay Ismaïl
Faculté des Sciences et Techniques; Errachidia
Département :Sciences de l'ingénieur
Pr. SARA TEIDJ Année universitaire : 2024/2025

TD de Thermodynamique (GP, GC, GI, MSD) -S1

Série 2

Exercice 1 :

Déterminer les équations d'état à partir des coefficients thermoélastiques :

1. D'un fluide pour lequel : $\alpha = \frac{1}{T}$; $\beta = \frac{PV^2}{a\,T}$ (a étant une constante non nulle).
2. D'un fluide pour lequel : $\alpha = \frac{R}{RT+bP}$ et $\chi_T = \frac{RT}{P(RT+bP)}$ (R et b sont des constantes).

Exercice 2:

L'état initial d'une mole de gaz parfait est caractérisé par $P_0 = 10^5\ Pa$ et $V_0 = 14l$.

On fait subir successivement et réversiblement à ce gaz :

- une détente isobare qui double son volume initial.

- une compression isotherme qui le ramène à son volume initial.

- un refroidissement isochore qui le ramène à l'état initial.

1. A quelle température s'effectue la compression isotherme ? En déduire la pression maximale atteinte. Représenter le cycle de transformations dans le diagramme de Clapeyron.
2. Calculer le travail échangé par le système au cours du cycle.

On donne : constante des gaz parfait : $R = 8.3145\ J.mol^{-1}K^{-1}$

Exercice 3 :

On considère un cylindre de section droite d'aire S muni d'un piston de masse négligeable, tous deux imperméables à la chaleur. Le frottement du piston est négligeable. Dans l'état initial, le cylindre est rempli de gaz d'hélium (He) supposant parfait à la température T_0 et à la pression atmosphérique P_0. Le piston se trouve alors à une hauteur h_0 au-dessus du fond du cylindre. L'opérateur bloque le piston et pose sur lui une masse m. Il fait descendre ensuite très lentement le piston dans le cylindre jusqu'à ce qu'il se trouve en équilibre sur la colonne d'hélium.

1. Quelles sont, à la fin de l'expérience, la pression P_1, la hauteur h_1 et la température T_1 de l'hélium?
2. Calculer le travail W_1 reçu par le gaz.
   On admettra que lors d'une transformation adiabatique, P et V sont reliés par la relation $P\, V^{\gamma} = Cte$

Données :

Aire de la section du cylindre $S = 40\ cm^2$, $h_0 = 20cm, m = 20kg$, $\gamma = 1.66$ et $T_0 = 273\ K$

Exercice 4 :

Un calorimètre contient une masse $m_1 = 250g$ d'eau. La température initiale de l'ensemble est $\theta_1 = 18°\ C$. On ajoute une masse $m_2 = 300\ g$ d'eau à la température $\theta_2 = 80°\ C$ et un morceau de plomb de masse $m_3 = 30\ g$ à la température $\theta_3 = 60°\ C$.

1. Quelle serait la température d'équilibre thermique θ_{e} de l'ensemble si la capacité thermique du calorimètre et de ses accessoires était négligeable ?

2. On mesure en fait une température d'équilibre thermique $\theta_{\text{e}} = 50\ °C$. Déterminer la capacité thermique C du calorimètre et de ses accessoires.

Données :

Chaleur massique de l'eau $c_e = 4185\, J.Kg^{-1}K^{-1}$

Chaleur massique du plomb $c_{plomb} = 126.5\, J.Kg^{-1}K^{-1}$

Exercice 5 :

Un calorimètre de cuivre de masse $m_1 = 200g$ contient $m_0 = 100g$ d'eau à la température $\theta_i = 18°C$. On y plonge un morceau de glace de masse $m_g = 25g$ à $\theta_g = -10°C$.

Calculer la température d'équilibre θ_e.

On donne :

Chaleur latente de fusion de glace $L_f = 80\ cal/g$

Chaleur massique du cuivre $c_1 = 0.1\ cal\ \ /g°C$

Chaleur massique de glace $c_g = 0.5\ cal\ \ /g°C$

Chaleur massique de l'eau $c_0 = 1\ cal\ \ /g°C$

Correction de la série 2

Exercice 1

Les équations d'état à partir des coefficients thermoélastiques :

1. D'un fluide pour lequel : $\alpha = \frac{1}{T}$; $\beta = \frac{PV^2}{a\,T}$ (a étant une constante non nulle).

D'après la relation de Reech : $\alpha = P\beta\chi_T$

Alors $\frac{1}{T} = P\,\frac{PV^2}{a\,T}\,\chi_T \Longrightarrow \quad \chi_T = \frac{aT}{TP^2V^2} = \frac{a}{P^2V^2}$ (1)

Et on sait que $\chi_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T$ (2)

D'après l'équation (1) et l'équation (2), on a : $\frac{a}{P^2V^2} = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T$

à $T = cste \Longrightarrow \frac{a}{P^2}\,dP = -VdV$ alors $\int \frac{a}{P^2}\,dP = -\int V\,dV$ donc $-\frac{1}{2}\,V^2 = -\frac{a}{P} + f(T)$

et finalement $V^2 = \frac{2a}{P} - f(T)$ (3)

on a: $\alpha = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$

On dérive l'équation (3), on obtient : $2VdV = -f'(T)$

à $P = cste \implies 2V\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = -f'(T)$ (4)

on a : $\alpha = \frac{1}{T} = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \implies \frac{V}{T} = \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$ (5)

On remplace l'équation (5) dans l'équation (4), on obtient : $2V\frac{V}{T} = -f'(T)$

Alors $f(T) = -\int \frac{2V^2}{T}\,dT = -2V^2\ln(T) + K$ (6)

On remplace l'équation (6) dans l'équation (3), et on obtient :

$$V^2 = \frac{2a}{P} + 2V^2\ln(T) + K$$

Et finalement, l'équation d'état un fluide : $V^2(1 - 2\ln(T)) = \frac{2a}{P} + K$

2 D'un fluide pour lequel : $\alpha = \frac{R}{RT+bP}$ et $\chi_T = \frac{RT}{P(RT+bP)}$ (R et b sont des constantes).

D'après la relation de Reech : $\alpha = P\beta\chi_T$

Alors $\frac{R}{RT+bP} = P\beta\,\frac{RT}{P(RT+bP)} \Longrightarrow \beta = \frac{1}{T}$

on a: $\alpha = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$

à $P = cste \implies \frac{dV}{dT} = \alpha V$

donc on remplace α par son expression, et on obtient :

$dV = \frac{R}{RT+bP} VdT \implies \frac{dV}{V} = \frac{R}{RT+bP}dT \implies \int \frac{dV}{V} = \int \frac{R}{RT+bP}dT$

$\implies lnV = \ln(RT+bP) + h(P)$ (1)

On dérive l'équation (1) par rapport à P

$$\frac{\partial \ln V}{\partial P} = \frac{\partial(\ln(RT+bP))}{\partial P} + h'(P)$$

$$\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial P} = \frac{b}{RT+bP} + h'(P)$$

On a :

$$-\chi_T = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T = \frac{b}{RT+bP} + h'(P)$$

$$-\frac{RT}{P(RT+bP)} = \frac{b}{RT+bP} + h'(P)$$

Alors $-h'(P) = \frac{RT}{P(RT+bP)} + \frac{b}{RT+bP} \implies -h'(P) = \frac{1}{P} \implies h(P) = -\ln P + K$ (2)

On remplace l'équation (2) on équation (1), et on obtient :

$lnV = \ln(RT+bP) - \ln P + K$

$lnV + \ln P = \ln(RT+bP) + K$

Donc $\ln(PV) = \ln(RT+bP) + K$

On pose $K = \ln K$

Alors $\ln(PV) = \ln(RT+bP) + \ln K$

Et finalement $PV = K(RT+bP)$

Exercice 2

L'état initial du gaz parfait est décrit par (P_0, V_0, T_0) avec : $P_0 = 10^5\ Pa$,et

$V_0 = 14l = 14 \times 10^{-3} m^3$ et le nombre de moles du gaz est $n = 1$

1. La température s'effectue à la compression isotherme :

La détente isobare se traduit par la transformation suivante :

$(P_0, V_0, T_0) \longrightarrow (P_1 = P_0, V_1 = 2V_0, T_1)$

D'après l'équation d'état d'un gaz parfait : $P_1V_1 = RT_1$ alors

$$T_1 = \frac{P_1V_1}{R} = \frac{2\,P_0V_0}{R} = \frac{10^5 \times 2 \times 14 \times 10^{-3}}{8.314} = 336.8\ K$$

La compression isotherme s'effectue à la température $T_1 = 336.8\ K$

Déduire la pression maximale atteinte :

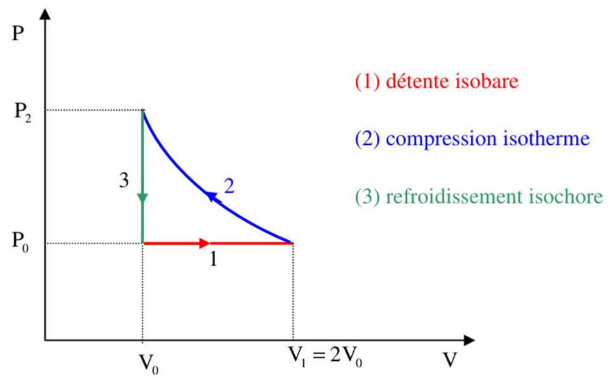
La compression isotherme se traduit par la transformation suivante :

$$(P_1, V_1, T_1) \longrightarrow (P_2, V_2 = V_0, T_2 = T_1)$$

$$P_2 = \frac{R\,T_2}{V_2} = \frac{R\,T_1}{V_0} = \frac{8.314 \times 336.8}{14 \times 10^{-3}} = 2\,.\,10^5\ Pa$$

Comme le gaz subit ensuite d'un refroidissement isochore qui fait baisser sa pression, la pression maximale atteinte lors du cycle est donc $P_2 = 2\,.\,10^5\ Pa$

La représentation dans le diagramme de Clapeyron.



2. Le travail échangé au cours du cycle est égal à la somme des travaux échangés au cours de chaque transformation élémentaire : $W_{cycle} = W_1 + W_2 + W_3$
   - Calcul de W_1 ?

La transformation est isobare, donc $\delta W = -P\,dV = -P_0 dV$

$$W_1 = \int_0^1 -P_0 dV = -P_0(V_1 - V_0) = -P_0(2V_0 - V_0) = -P_0V_0 = -RT_0$$

- Calcul de W_2?

La transformation est isotherme à la température T_1 , donc $P_1V_1 = RT_1 = PV$

$$\delta W = -P\,dV = -\frac{RT_1}{V}\ dV$$

Alors :

$$W_2 = \int_1^2 -P\,dV = \int_1^2 -\frac{RT_1}{V}\,dV = -RT_1\int_1^2 \frac{dV}{V} = -R\,T_1 \ln\frac{V_2}{V_1} = -R\,T_1 \ln\frac{V_0}{2V_0} = RT_1 \ln(2)$$

- Calcul de W_3 ?

La transformation est isochore, donc $dV = 0$, ce qui donne $\delta W = -P\,dV = 0$ d'où $W_3 = 0$

Le travail total échangé lors du cycle est donc : $W_{cycle} = -RT_0 + RT_1 \ln(2)$,

Or, d'après l'équation d'état du gaz parfait, on a :

$$T_0 = \frac{P_0V_0}{R} = \frac{10^5 \times 14 \times 10^{-3}}{8.314} = 168.4\,K$$

soit :

$$W_{cycle} = R(T_1 \ln(2) - T_0) = 8.314 \times (336.8 \times \ln 2 - 168.4) = 540.8\,J$$

Exercice 3

1. Le gaz subit une compression très lente donc de type quasi-statique. Cette transformation est représentée sous la forme suivante : $(P_0, V_0, T_0) \longrightarrow (P_1, V_1, T_1)$. A L'équilibre le gaz est soumis à l'action de la pression atmosphérique P_0 et celle due à la masse m, en l'absence de tout frottement :

$P_1 = P_0 + \frac{mg}{S}$ Où S est l'aire de la section droite du cylindre.

AN : $P_1 = 10^5 + \frac{20\times9.81}{40\times10^{-4}} = 1.49 \times 10^5\,Pa$

La transformation adiabatique, $P\,V^\gamma = Cte$, d'où $P_1V_1^\gamma = P_0V_0^\gamma$.

Mais $V_0 = Sh_0$ et $V_1 = Sh_1$ d'où $P_1h_1^\gamma = P_0h_0^\gamma$ et $h_1 = h_0\left(\frac{P_0}{P_1}\right)^{1/\gamma}$

AN : $h_1 = 20 \times 10^{-2} \times \left(\frac{10^5}{1.49\times10^5}\right)^{1/1.66} = 0.1573\,m = 15.7\,cm$

En appliquant l'équation d'état des gaz parfaits, on a $P_1V_1 = n\,R\,T_1$ et $P_0V_0 = n\,R\,T_0$

D'où $n\,R = \frac{P_0V_0}{T_0}$ et $T_1 = \frac{P_1V_1}{nR} = T_0\frac{P_1V_1}{P_0V_0} = T_0\frac{P_1h_1}{P_0h_0}$

AN : $T_1 = 273 \times \frac{1.49\times10^5\times0.1573}{10^5\times0.2} = 320\,K$

2. La transformation se fait de manière quasi-statique et sans frottement, donc elle est réversible et $P_{ext} = P$ où P est la pression dans le gaz. D'où $\delta W = -P_{ext}\,dV = -PdV$. Or , $P\,V^\gamma = Cte = P_1V_1^\gamma = P_0V_0^\gamma$ ce qui donne, $P = \frac{P_0V_0^\gamma}{V^\gamma}$

   Le travail échangé au cours de la transformation s'écrit :

$$W_1 = \int_0^1 -PdV = -\int_0^1 \frac{P_0V_0^\gamma}{V^\gamma}\, dV = -P_0V_0^\gamma \int_0^1 \frac{dV}{V^\gamma} = -P_0V_0^\gamma \left[\frac{V^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right]_0^1$$

$$W_1 = -\frac{P_0V_0^\gamma\left(V_1^{1-\gamma} - V_0^{1-\gamma}\right)}{1-\gamma} = \frac{P_1V_1 - P_0V_0}{\gamma - 1} = S\,\frac{P_1h_1 - P_0h_0}{\gamma - 1}$$

AN : $W_1 = 40 \times 10^{-4} \times \frac{1.49\times10^5\times0.1573-10^5\times0.2}{1.66-1} = 20.8J$

Exercice 4 :

1. La température d'équilibre thermique θ_e de l'ensemble si la capacité thermique du calorimètre et de ses accessoires était négligeable.

La quantité de chaleur échangée par l'eau froide : $Q_1 = m_1c_e(\theta_e - \theta_1)$

La quantité de chaleur échangée par l'eau chaude : $Q_2 = m_2c_e(\theta_e - \theta_2)$

La quantité de chaleur échangée par le morceau de plomb : $Q_3 = m_3c_{plomb}(\theta_e - \theta_3)$

A l'équilibre thermique le système (eau froide +eau chaude +morceau de plomb) est isolé :

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0$$

$$m_1c_e(\theta_e - \theta_1) + m_2c_e(\theta_e - \theta_2) + m_3c_{plomb}(\theta_e - \theta_3) = 0$$

Ce qui donne : $\theta_e = \frac{m_1c_e\theta_1 + m_2c_e\theta_2 + m_3c_{plomb}\theta_3}{m_1c_e + m_2c_e + m_3c_{plomb}}$

AN : $\theta_e = \frac{0.25\times4185\times(273+18)+0.3\times4185\times(273+80)+0.03\times126.5\times(273+60)}{0.25\times4185+0.3\times4185+0.03\times126.5} = 324.8\,K = 51.8\,°C$

2. On mesure en fait une température d'équilibre thermique $\theta_e = 50\,°C$. Déterminer la capacité thermique C du calorimètre et de ses accessoires.

   On suppose que la capacité thermique du calorimètre et ses accessoires n'est pas négligeable. Les quantités de chaleur échangée s'écrivent :

$$Q_1 = (m_1c_e + C)(\theta_e - \theta_1)$$
$$Q_2 = m_2c_e(\theta_e - \theta_2)$$
$$Q_3 = m_3c_{plomb}(\theta_e - \theta_3)$$

A l'équilibre thermique le système (eau froide +eau chaude+morçeau de plomb) est isolé :

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0$$

$$(m_1c_e + C)(\theta_e - \theta_1) + m_2c_e(\theta_e - \theta_2) + m_3c_{plomb}(\theta_e - \theta_3) = 0$$

Ce qui donne :

$$C = -\frac{m_1c_e(\theta_e - \theta_1) + m_2c_e(\theta_e - \theta_2) + m_3c_{plomb}(\theta_e - \theta_3)}{\theta_e - \theta_1}$$

AN : $C = \frac{0.25\times4185\times(50-18)+0.3\times4185\times(50-80)+0.03\times126.5\times(50-60)}{18-50} = 132J/K$

Université Moulay Ismaïl
Faculté des Sciences et Techniques; Errachidia
Département :Sciences de l'ingénieur
Pr. SARA TEIDJ Année universitaire : 2024/2025

Exercice 5 :

Pour calculer la température de l'équilibre θ_e, en faisant le bilan des quantités de chaleur mises en jeu.

L'ensemble (calorimètre+eau) fournit la quantité de chaleur :

$Q_1 = (m_0c_0 + m_1c_1)(\theta_e - \theta_i)$ à la glace, une partie de cette quantité sert à chauffer la glace pour que sa température passe de θ_g à 0°C.

$Q_2 = -m_gc_g\theta_g$ une autre partie sert à la fondre la glace (fusion de la glace se fait à 0°C) (sous la pression P=1atm) $Q_3 = m_gL_F$ le reste sert à porter la température de la glace fondue à 0°C à θ_e. $Q_4 = m_gc_0\theta_e$

D'où l'équation calorimétrique : $Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 = 0$

$$(m_0c_0 + m_1c_1)(\theta_e - \theta_i) - m_gc_g\theta_g + m_gL_F + m_gc_0\theta_e = 0$$

$$\theta_e = \frac{m_gc_g\theta_g - m_gL_F + (m_0c_0 + m_1c_1)\theta_i}{m_0c_0 + m_1c_1 + m_gc_0}$$

AN :

$$\theta_e = \frac{25 \times 0.5 \times (-10) - 25 \times 80 + (100 + 200 \times 0.1) \times 18}{100 + 200 \times 0.1 + 25 \times 0.5} = 0.26°C$$