

Circuits électriques

Parcours électronique

Chapitre 2 : Méthode d'analyse des circuits électriques

- Lois de base en régime sinusoïdal
- Théorème de Thévenin et de Norton
- Théorème de superposition
- Théorème de Milleman
- Simplification de Kennelly

LOIS DE BASE EN RÉGIME SINUSOÏDAL

Écriture des lois de Kirchhoff en régime sinusoïdal

Les lois de Kirchhoff restent valables dans l'ARQS.

Réécrivons-les en régime établi sinusoïdal, à l'aide de la notation complexe

règles simples du calcul algébrique sur les nombres complexes.

LOIS DE BASE EN RÉGIME SINUSOÏDAL

Loi des nœuds

Pour la même pulsation ω

termes en $e^{j\omega t}$ se simplifient

$$\sum_k \epsilon_k i_k = \operatorname{Re} \left(\sum_k \epsilon_k \hat{i}_k \right)$$

$$= \operatorname{Re} \left(\sum_k \epsilon_k \hat{i}_{km} e^{j\omega t} \right)$$

Loi des nœuds

termes en $e^{j\omega t}$ se simplifient

Donc

$$\text{Re}\left(e^{j\omega t} \sum_k \epsilon_k \hat{i}_{km}\right) = 0$$

$$\sum_k \epsilon_k \hat{i}_{km} = 0$$

$\epsilon_k = 1$ si le courant i_k est orienté vers le nœud

$\epsilon_k = -1$ si le courant i_k est orienté vers le sens contraire du nœud.

Loi des mailles

La somme algébrique des tensions aux bornes des branches d'une maille décrite dans un sens arbitraire est nulle :

$$\begin{aligned}
 \sum_k \epsilon_k u_k &= \operatorname{Re} \left(\sum_k \epsilon_k \hat{u}_k \right) \\
 &= \operatorname{Re} \left(\sum_k \epsilon_k \hat{u}_{km} e^{j\omega t} \right) \\
 &= \operatorname{Re} \left(e^{j\omega t} \sum_k \epsilon_k \hat{u}_{km} \right) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Loi des mailles

La somme algébrique des tensions aux bornes des branches d'une maille décrite dans un sens arbitraire est nulle :

$$\sum_k \epsilon_k \hat{u}_{km} = 0$$

$\epsilon_k = 1$ si la tension u_k est dans sens que la maille

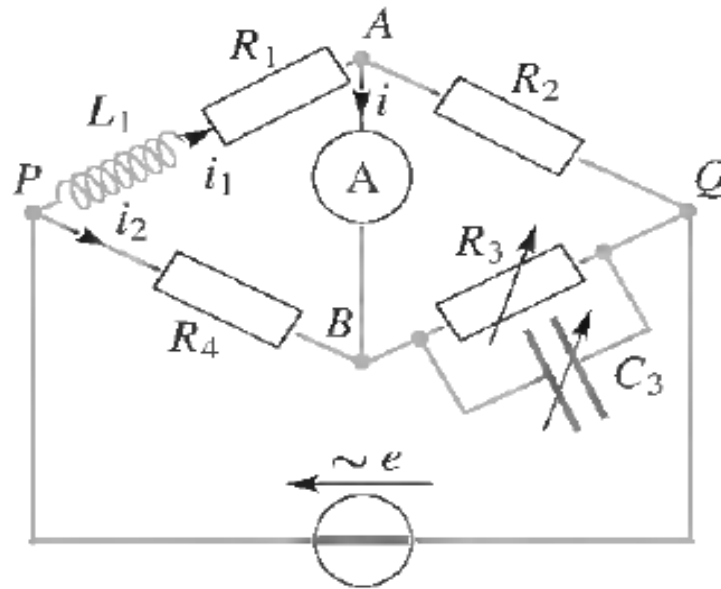
$\epsilon_k = -1$ si la tension u_k est dans le sens opposée de la maille.

LOIS DE BASE EN RÉGIME SINUSOÏDAL

Application à la détermination d'impédances

En régime stationnaire

pont de Wheatstone permet de déterminer la résistance d'un résistor inconnu.



En régime sinusoïdal établi le montage est alors appelé pont de Maxwell

LOIS DE BASE EN RÉGIME SINUSOÏDAL

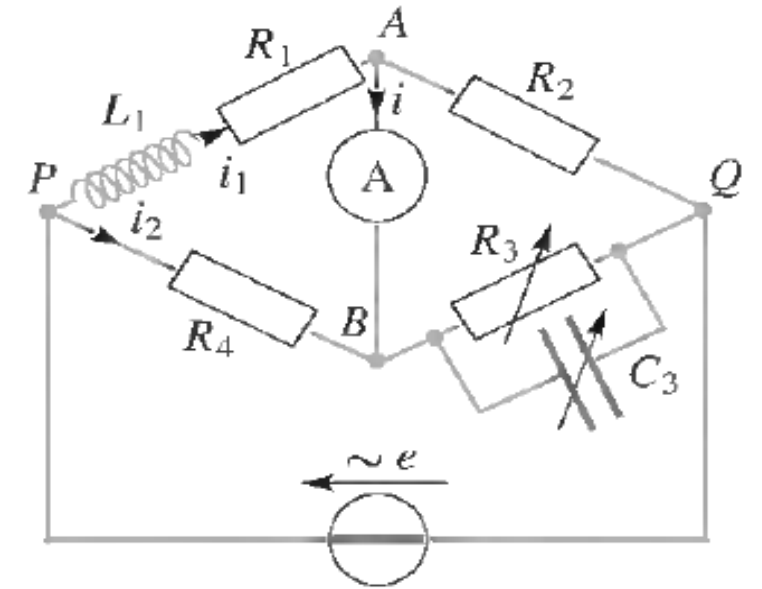
Application à la détermination d'impédances

Les résistances R_2 et R_4 sont connues

R_3 et C_3 sont réglables

$e(t) = e_m \cos(\omega t)$ entre les points P et Q

l'ampèremètre de résistance R_a indique l'intensité i du courant dans la branche AB



LOIS DE BASE EN RÉGIME SINUSOÏDAL

Application à la détermination d'impédances

La loi des maille

$$Z_1 \hat{i}_1 + R_a \hat{i} - R_4 \hat{i}_2 = 0$$

$$-e + Z_2(\hat{i}_1 - \hat{i}) + Z_1 \hat{i}_1 = 0 \rightarrow \hat{i}_1 = \frac{e + Z_2 \hat{i}}{Z_1 + Z_2}$$

$$-e + Z_3(\hat{i}_1 + \hat{i}) + Z_4 \hat{i}_2 = 0 \rightarrow \hat{i}_2 = \frac{e - Z_3 \hat{i}}{Z_3 + Z_4}$$

Le pont est équilibré si l'ampèremètre n'est traversé par aucun courant $\rightarrow \hat{i} = 0$

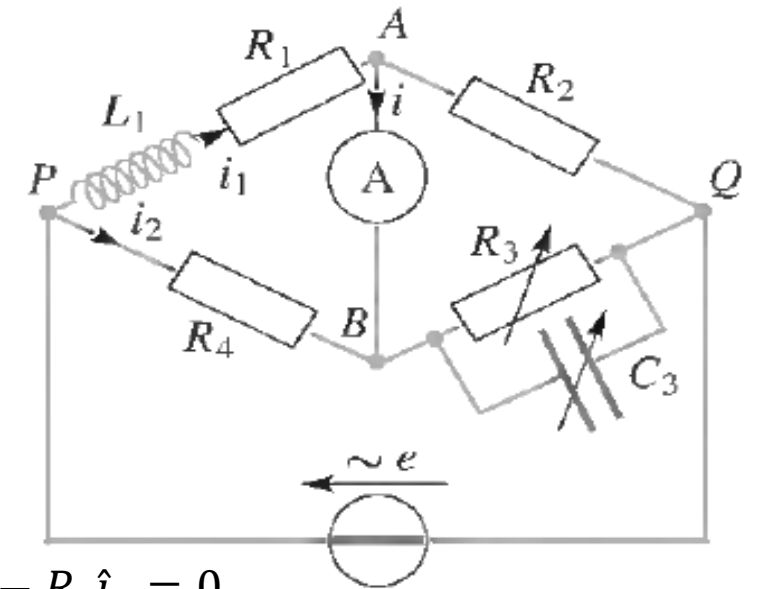
$$Z_1 Z_3 = Z_2 Z_4$$

$$(R_1 + jL_1\omega) \times R_3 / (1 + jR_3C_3\omega) = R_2 R_4$$

$$R_2 R_4 + jR_3 C_3 R_2 R_4 = R_1 R_3 + jL_1 \omega R_3$$

$$R_2 R_4 = R_1 R_3$$

$$L_1 = R_2 R_4 C_3$$



LOIS DE BASE EN RÉGIME SINUSOÏDAL

Théorème de Millman

en régime sinusoïdal dans l'ARQS

on utilise les amplitudes complexes des tensions

Au nœud A d'un circuit, la tension $\hat{u}_{mA} = \frac{\sum_k (Y_k (\hat{u}_{mk} + \epsilon_k \hat{e}_{km}) + \epsilon'_k \hat{i}_{km})}{\sum_k Y_k}$

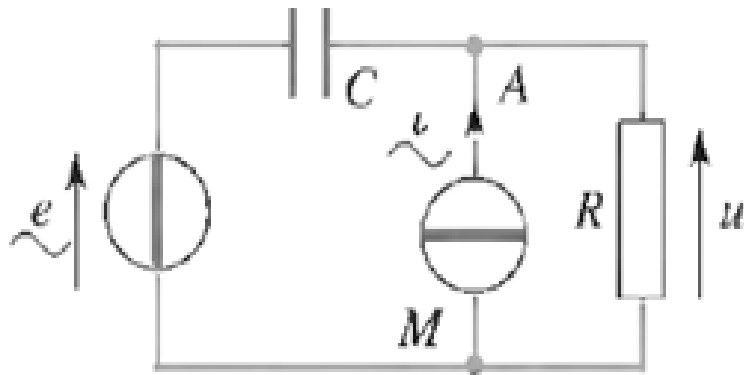
Pour les f.e.m orientées vers le nœud A $\epsilon_k = 1$

Pour les courants dirigés vers le nœud A $\epsilon'_k = 1$

LOIS DE BASE EN RÉGIME SINUSOÏDAL

Exemple

les générateurs de tension et de courant fournissent des signaux de même fréquence f , déphasé de $\frac{\pi}{2} rad$



Soit $e(t) = e_m \sin(\omega t) \longrightarrow \hat{e}(t) = u_m e^{j(\omega t)} = e_m e^{j\omega t}$

$$\hat{i}(t) = i_m e^{j\omega t} e^{j\frac{\pi}{2}} = j i_m e^{j\omega t}$$

LOIS DE BASE EN RÉGIME SINUSOÏDAL

Exemple

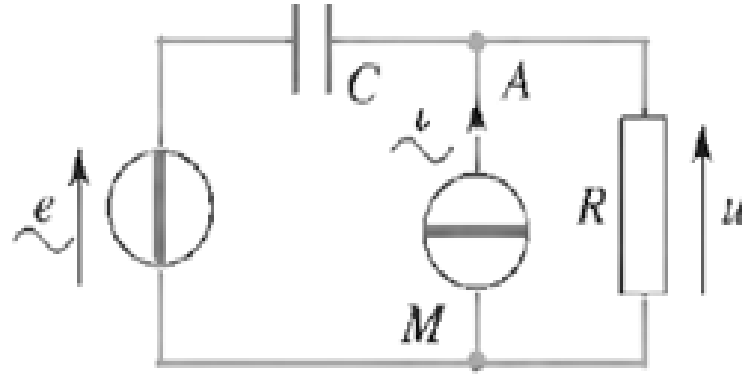
la tension $u(t)$ en appliquant le théorème de Millman en A

$$\hat{u} = \frac{j\hat{e}C\omega + \hat{i}}{jC\omega + 1/R} = \frac{\hat{e}_m C\omega + \hat{i}_m}{C\omega - j/R} e^{j\omega t}$$

$$u_m = |\hat{u}| = \frac{e_m C\omega + i_m}{(C\omega)^2 + 1/R^2)^{1/2}}$$

Soit $u(t) = u_m \cos(\omega t + \varphi)$

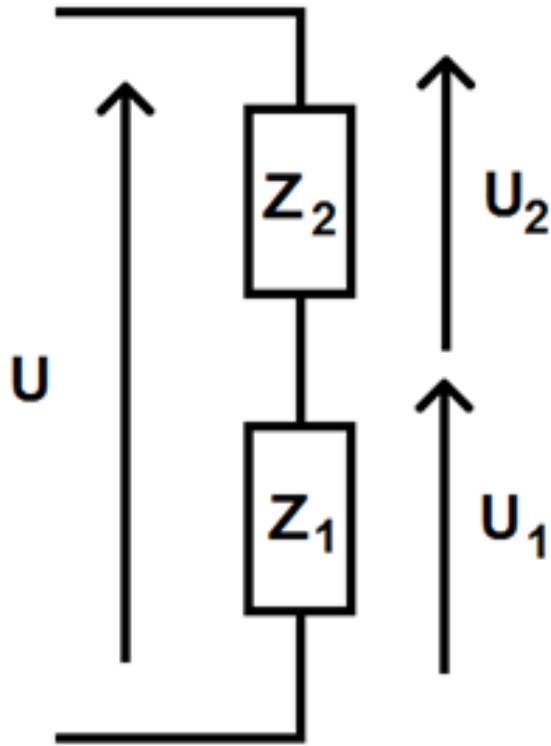
$$\varphi = \arctan\left(\frac{1}{RC\omega}\right)$$



LOIS DE BASE EN RÉGIME SINUSOÏDAL

Diviseurs de tension et de courant

Diviseurs de tension



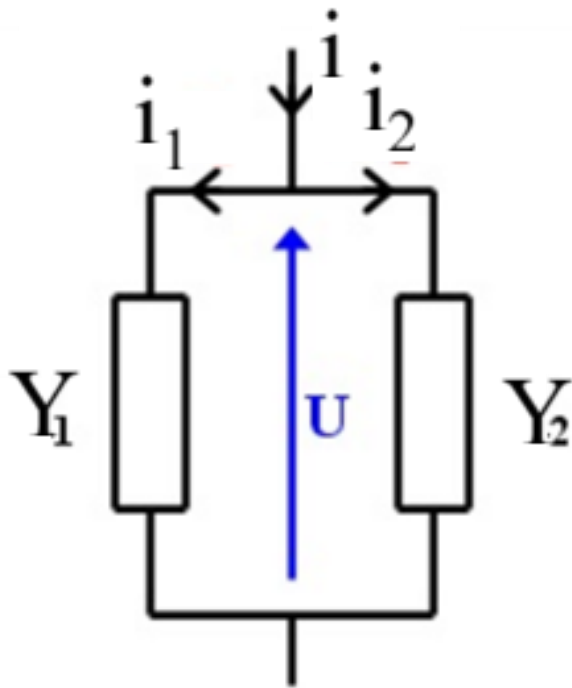
$$\hat{u}_2 = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} \hat{u}$$

$$\hat{u}_1 = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} \hat{u}$$

LOIS DE BASE EN RÉGIME SINUSOÏDAL

Diviseurs de tension et de courant

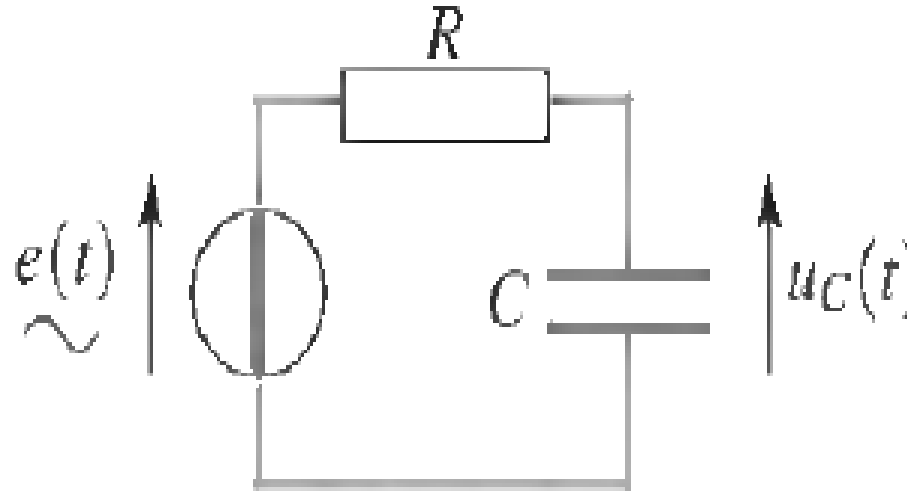
Diviseurs de courant



$$\hat{i}_1 = \frac{Y_1}{Y_1 + Y_2} \hat{i}$$

$$\hat{i}_2 = \frac{Y_2}{Y_1 + Y_2} \hat{i}$$

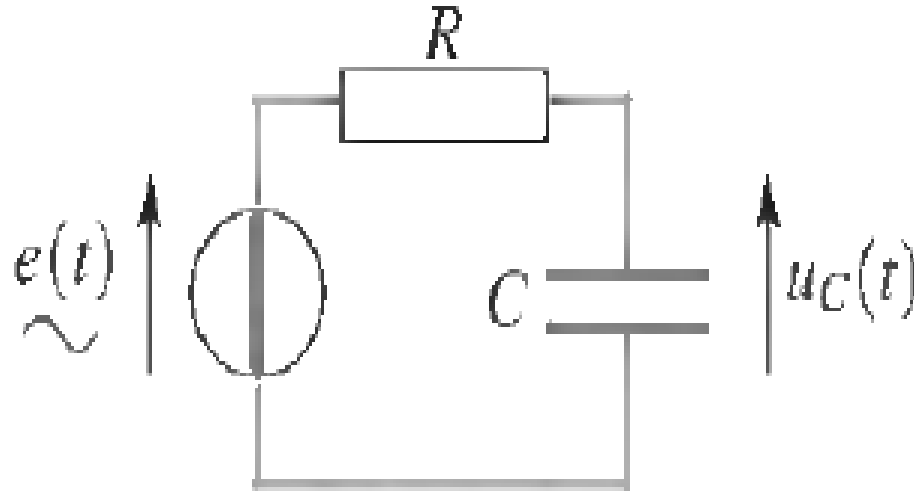
Exemple :



En notation complexe

$$\begin{aligned}\hat{u}_C &= \frac{Z_C}{Z_C + R} \hat{e}_m = \frac{1/jC}{\omega 1/jC\omega + R} \hat{e}_m \\ &= \frac{1}{1 + jRC\omega} \hat{e}_m \\ &= \frac{1}{1 + j\tau\omega} \hat{e}_m\end{aligned}$$

Exemple :



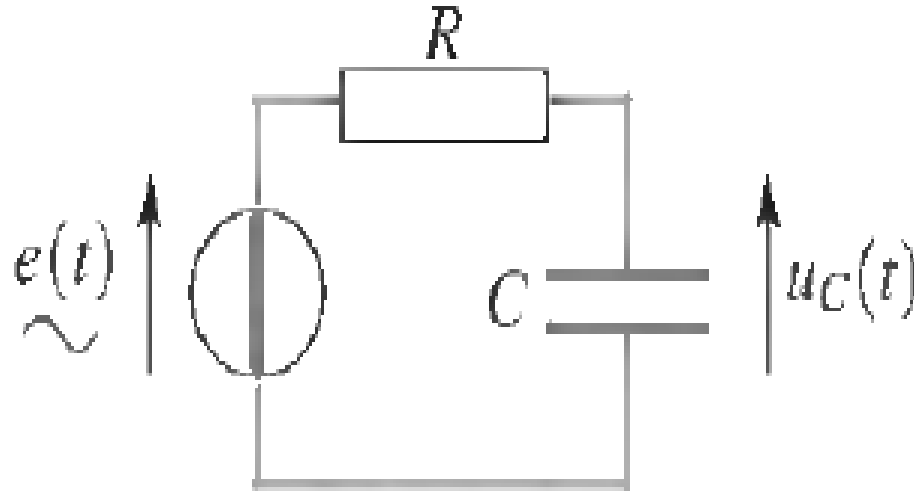
$$u_C = \left| \frac{1}{1 + j\tau\omega} \hat{e}_m \right| = \frac{1}{(1 + (\tau\omega)^2)^{1/2}} e_m$$

$$\text{Soit } \tau = RC = 500\Omega \times 2.2 \cdot 10^{-6}F = 1.1ms$$

$$\varphi = \arg(\hat{u}_C) = \arg\left(\frac{1}{1 + jRC\omega} \hat{e}_m\right) = -\arctan(\tau\omega)$$

$$0 \text{ (régime stationnaire)} < \varphi < \frac{\pi}{2} \text{ (haute fréquence)}$$

Exemple :



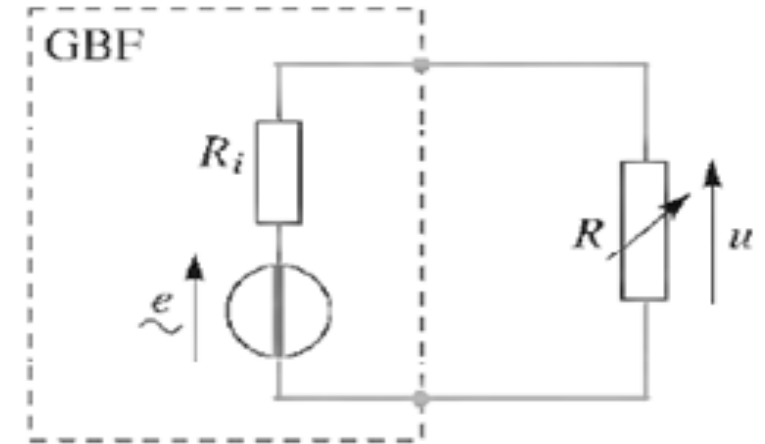
$$\begin{cases} u_{Cm} \approx e_m \text{ pour } \tau\omega \text{ très faible} \\ u_{Cm} \approx 0 \text{ pour } \tau\omega \text{ très grande} \end{cases}$$

$$u_C(t) = u_{Cm} \cos(\omega t + \varphi)$$

LOIS DE BASE EN RÉGIME SINUSOÏDAL

Application à la mesure de l'impédance interne d'un GBF méthode de la tension moitié

Après avoir relevé la f.e.m e_m du GBF
on branche sur celui-ci une résistance variable



que l'on ajuste jusqu'à ce que la tension u à ses bornes soit égale à $e_m/2$

La résistance variable est alors égale à la résistance interne du GBF

$$u = \frac{R}{R+R_i} e_m = \frac{e_m}{2} \longrightarrow R = R_i$$

LOIS DE BASE EN RÉGIME SINUSOÏDAL

Théorème de superposition

Ce théorème s'applique aux réseaux qui comportent plusieurs générateurs. Soit un circuit électrique composé de n sources indépendantes de tension et de courant:

$S_1, S_2, \dots, S_n$

Calculons par exemple le courant I_K circulant dans la branche K .

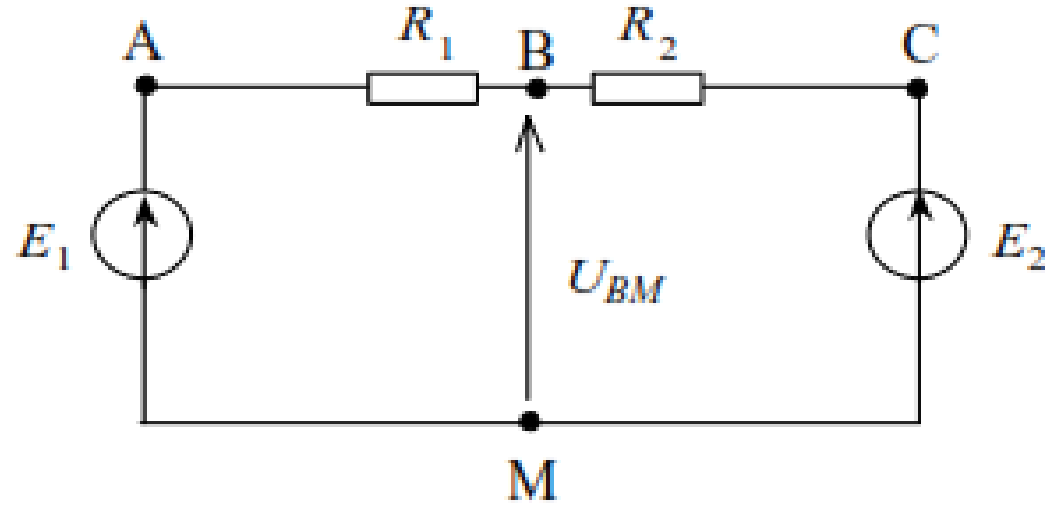
Appelons $I_{K1}, I_{K2}, \dots, I_{Kn}$ les valeurs de cette grandeur créée individuellement dans cette branche par chaque source agissant seule.

Les autres sources seront annulées.

$$\Rightarrow I_K = I_{K1} + I_{K2} + \dots + I_{Kn}$$

LOIS DE BASE EN RÉGIME SINUSOÏDAL

Exemple



En tenant compte des deux sources, nous obtenons :

$$U_{BM} = U_1 + U_2 = E_1 \frac{R_2}{R_1 + R_2} + E_2 \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

LOIS DE BASE EN RÉGIME SINUSOÏDAL

Théorème de Thévenin et de Norton

Théorème de Thévenin

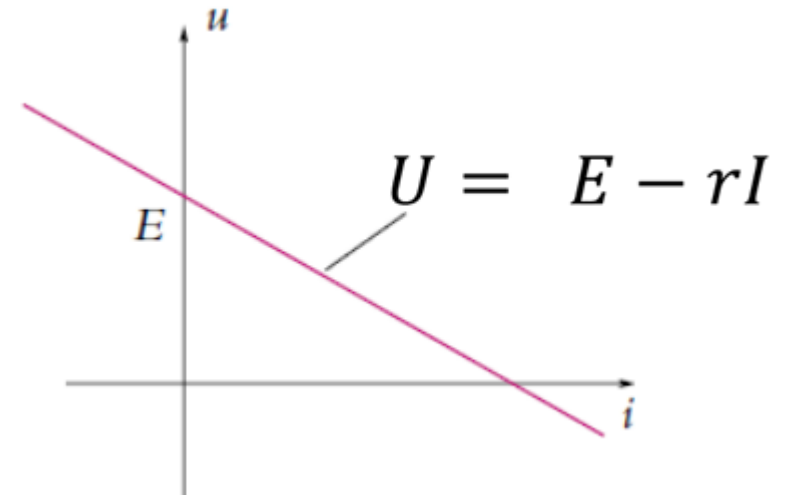
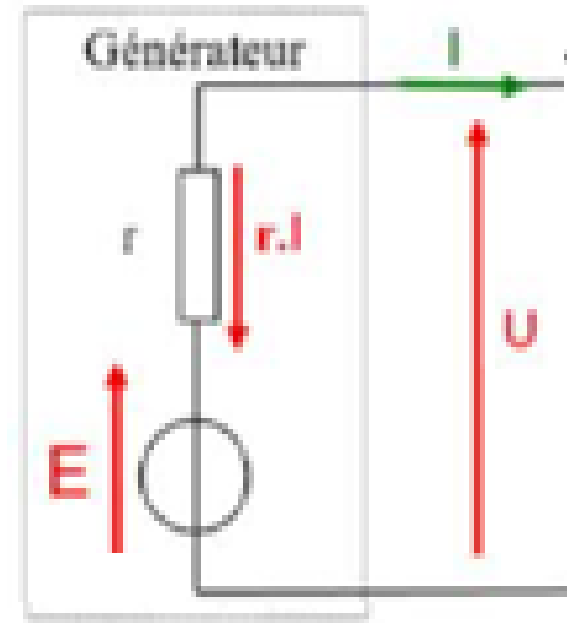
Générateur de tension réel

Loi des mailles

$$U - E + rI = 0$$

f.é.m

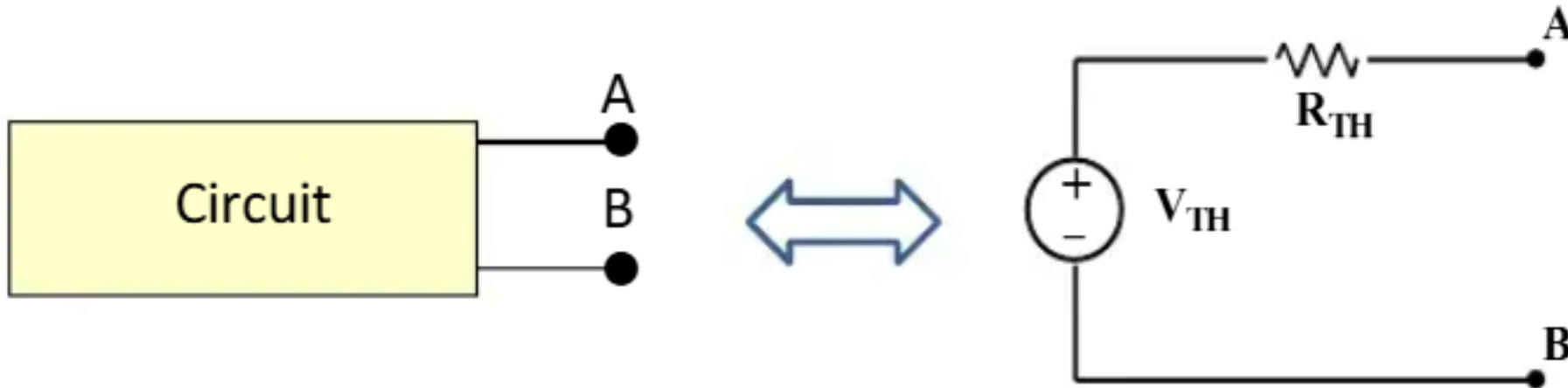
résistance interne du générateur



LOIS DE BASE EN RÉGIME SINUSOÏDAL

Théorème de Thévenin et de Norton

Théorème de Thévenin

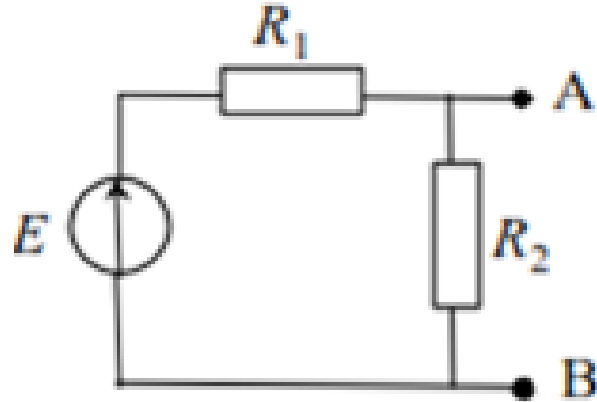


V_{TH} = tension mesurée entre A et B

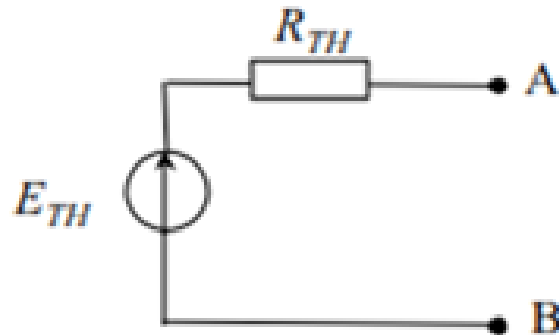
R_{TH} = résistance mesurée entre A et B en l'absence de toute source idéale de tension ou de courant

Exemple

Considérons un circuit électrique linéaire placé entre deux points A et B.

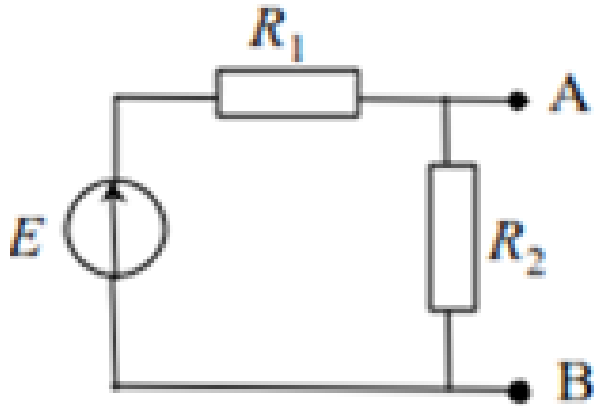


Remplacez ce circuit par un générateur équivalent de Thévenin de force électromotrice E_{TH} et de résistance interne R_{TH} .



Exemple

La tension de Thévenin est la tension obtenue à vide entre A et B. Cette tension obtenue aux bornes de R_2 se calcule en appliquant le théorème du pont diviseur.



$$E_{TH} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E$$

La résistance R_{TH} est obtenue en passivant la source de tension E . Il suffit de remplacer la source E par un court-circuit.

$$R_{TH} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

LOIS DE BASE EN RÉGIME SINUSOÏDAL

Théorème de Thévenin et de Norton

Théorème de Norton

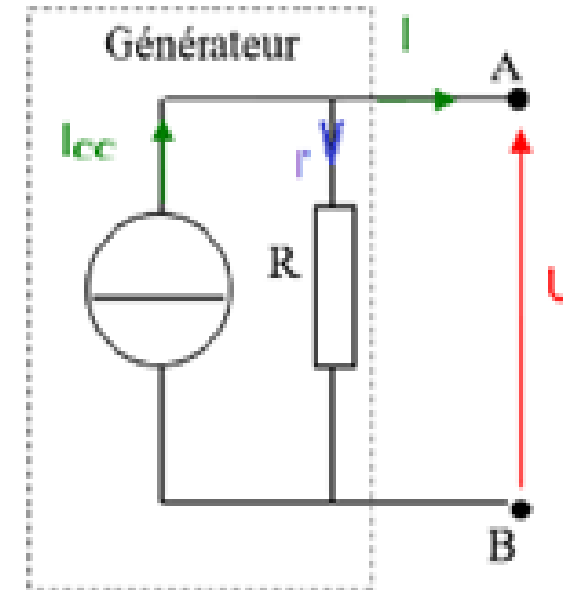
Générateur de courant réel

Loi des mailles

$$U - RI' = 0$$

courant débité par le générateur

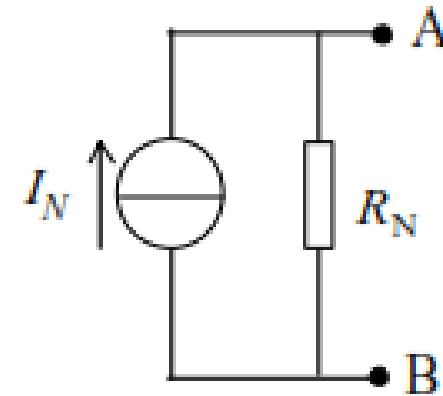
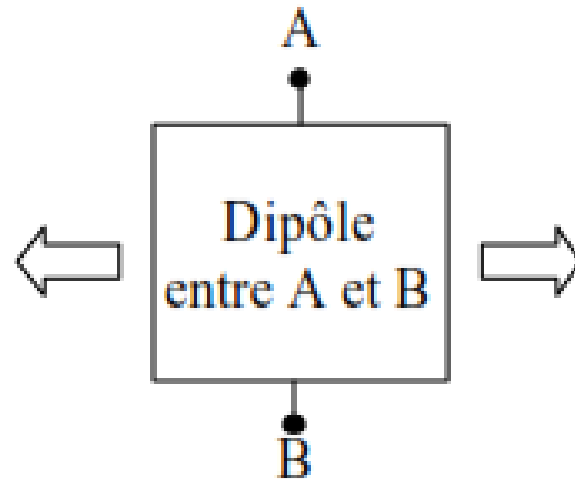
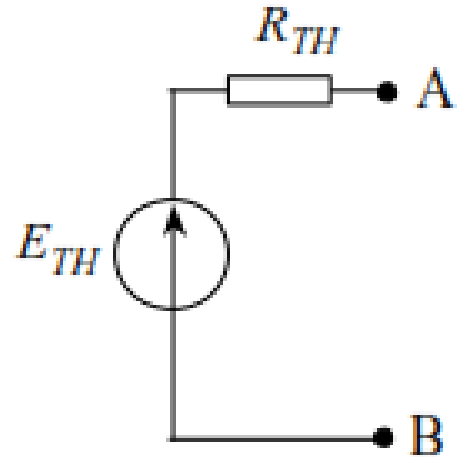
$$I = I_{CC} - I' = I_{CC} - \frac{U}{R}$$



LOIS DE BASE EN RÉGIME SINUSOÏDAL

Théorème de Thévenin et de Norton

Théorème de Norton



$$R_N = R_{TH}$$

$$I_N = \frac{E}{R_{TH}}$$

LOIS DE BASE EN RÉGIME SINUSOÏDAL

Simplification de Kennelly

Pour passer de la structure triangle (ABC)

à la structure étoile ($OABC$) nous procédons

déconnectons le point A, égalité des impédances entre B et C

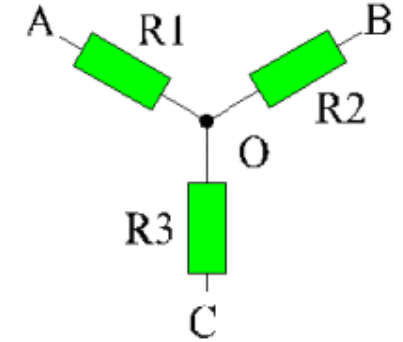
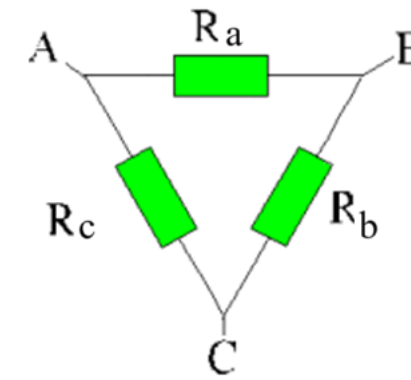
$$R_2 + R_3 = R_b // (R_a + R_c) = \frac{R_b(R_a + R_c)}{R_a + R_b + R_c}$$

déconnectons le point B, égalité des impédances entre A et C

$$R_1 + R_3 = R_c // (R_a + R_b) = \frac{R_c(R_a + R_b)}{R_a + R_b + R_c}$$

déconnectons le point C, égalité des impédances entre A et B

$$R_1 + R_2 = R_a // (R_c + R_b) = \frac{R_a(R_c + R_b)}{R_a + R_b + R_c}$$



$$R_1 = \frac{R_a R_c}{R_a + R_b + R_c}$$

$$R_2 = \frac{R_a R_b}{R_a + R_b + R_c}$$

$$R_3 = \frac{R_b R_c}{R_a + R_b + R_c}$$

LOIS DE BASE EN RÉGIME SINUSOÏDAL

Simplification de Kennelly

Pour la transformation inverse :

Relions B et C et nous écrivons alors : $R_a // R_c = R_1 + R_2 // R_3 = Z_a$

Relions C et A et nous écrivons alors : $R_a // R_b = R_2 + R_1 // R_3 = Z_b$

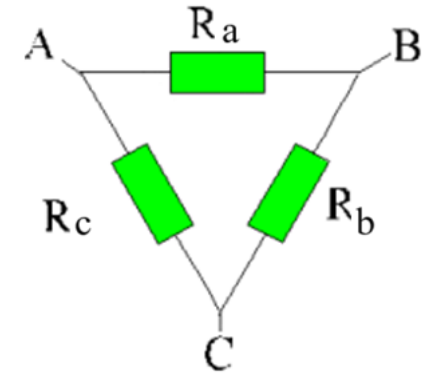
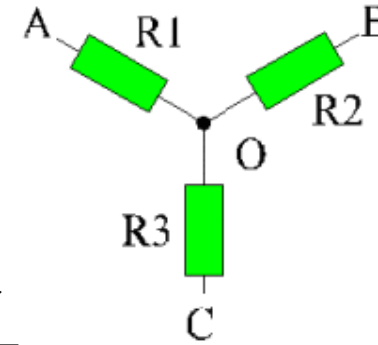
Relions B et A et nous écrivons alors : $R_c // R_b = R_3 + R_1 // R_2 = Z_c$

Combinons

$$\frac{1}{Z_a} + \frac{1}{Z_b} - \frac{1}{Z_c} = \frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_c} + \frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_b} - \frac{1}{R_c} - \frac{1}{R_b} = \frac{2}{R_a} = \frac{2R_2}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}$$

$$\frac{1}{Z_a} - \frac{1}{Z_b} + \frac{1}{Z_c} \quad \rightarrow \quad R_b = \frac{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}{R_2}$$

$$-\frac{1}{Z_a} + \frac{1}{Z_b} + \frac{1}{Z_c} \quad \rightarrow \quad R_c = \frac{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}{R_3}$$



$$R_a = \frac{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}{R_1}$$

FIN