Inversement, supposons que $y \in [\pi(B)]^c$ et m.q $y \in \pi[(B+F)^c]$. Puisque π est surjective, il existe $x \in E$ tel que $y = \pi(x)$. Alors $\pi(x) \notin \pi(B)$. Donc $x \notin \pi^{-1}(\pi(B)) = B+F \Rightarrow x \in (B+F)^c$ $\Rightarrow y \in \pi[(B+F)^c]$.

IV.6. Corollaire.

Si F est un s.e.v. fermé de l'e.v.n. E et G un sous-espace de dimension finie de E, alors $F+G$ est fermé dans E.

Preuve.

Si $F=E$, $F+G=E$. Donc $F+G$ est fermé dans E. Supposons que $F \neq E$ et considérons la projection canonique π de E sur E/F. Puisque G est de dimension finie, $\pi(G)$ est de dimension finie. Donc $\pi(G)$ est fermé dans E/G. D'après la proposition IV.5, $F+G$ est fermé dans E.

IV.7. Proposition.

Soit F un s.e.v. fermé de l'e.v.n. E. On suppose que E est complet. Alors E/F est complet.

Preuve

Lemme.

$$\forall u \in E, \ \exists v \in \dot{u} \text{ tel que } \|v\| \leq 2\|\dot{u}\|.$$

En effet: si $\dot{u} = \dot{0}$, on prend $v = 0$.

si $\dot{u} \neq \dot{0}$, alors $\|\dot{u}\| < 2\|\dot{u}\|$ càd $d(u,F) < 2\|\dot{u}\|$. Donc il existe $h \in F$ tel que $\|u-h\| < 2\|\dot{u}\|$. Posons $v = u-h$, alors $v \in \dot{u}$ et $\|v\| \leq 2\|\dot{u}\|$.

Démonstration de la proposition IV.7.

Soit $\sum \dot{u}_n$ une série normalement convergente dans E/F. Montrons qu'elle est convergente. D'après le lemme, $\forall n \in \mathbb{N}$, il existe $v_n \in \dot{u}_n$ tel que $\|v_n\| \leq 2\|\dot{u}_n\|$. Alors la série $\sum v_n$ est normalement convergente. Comme E est complet, elle est convergente. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. Puisque Π est linéaire $\Pi(S_n) = \sum_{k=0}^{n} \Pi(v_k) = \sum_{k=0}^{n} \dot{u}_k$ et puisque Π est continue la suite $(\Pi(S_n))$ est convergente. Donc la série $\sum u_n$ est C.V. Ainsi, dans E/F toute série normalement convergente est convergente. D'après le Théorème 1.3.6, E/F est complet.

V. Théorème de Banach-steinhaus.

V. 1. Théorème.

Soient E un espace de Banach, F un e.v.n, $(f_i)_{i\in I}$ une famille d'applications linéaires continues de E dans F. On suppose que :

$$\forall x \in E, \exists M_x > 0 \text{ tq } \forall i \in I, \|f_i(x)\| \leq M_x.$$

Alors

$$\exists M > 0, \quad \forall i \in I, \quad \|f_i\| \leq M.$$

Preuve

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$F_n = \{x \in E \mid \forall i \in I, \|f_i(x)\| \leq n\}.$$

Alors F_n est fermé[(1)] pour tout n et $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n = E$. En particulier $\overset{\circ}{\overline{\bigcup F_n}} \neq \phi$. Donc d'après le Théorème de Baire, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\overset{\circ}{F}_{n_0} \neq \phi$. Soient $a \in E$ et $r > 0$ tels que $B_f(a,r) \subset F_{n_0}$. On a :

$$\forall x \in B_f(a,r), \forall i \in I, \|f_i(x)\| \leq n_0.$$

D'où

$$\forall h \in B_f(0,1), \forall i \in I, \|f_i(a+rh)\| \leq n_0$$

D'autre part, on a $h = \frac{1}{r}(a+rh-a)$. Donc $\forall i \in I$,

$$\|f_i(h)\| = \frac{1}{r}\|f_i(a+rh) - f_i(a)\| \leq \frac{1}{r}\left(\|f_i(a+rh)\| + \|f_i(a)\|\right)$$

et par conséquent

$$\forall h \in B_f(0,1), \forall i \in I, \|f_i(h)\| \leq \frac{2n_0}{r}.$$

Ce qui montre que

$$\forall i \in I, \|f_i\| \leq \frac{2n_0}{r}.$$

Il suffit donc de prendre $M = \frac{2n_0}{r}$.

---

(1) En effet : Pour tout $i \in I$, considérons l'application

$$g_i : E \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \|f_i(x)\|.$$

Alors g_i est continue pour tout i et $F_n = \bigcap_{i \in I} g_i^{-1}(]-\infty, n])$.

V.2. Corollaire

Soient E un espace de Banach, F un e.v.n, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications linéaires continues de E dans F. On suppose que pour tout $x \in E$, $(f_n(x))$ admet une limite $f(x)$ dans F. Alors f est une application linéaire continue.

Preuve

1) Montrons que f est linéaire.

Soient $x_1, x_2 \in E$ et $\alpha_1, \alpha_2 \in K$. On a

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\quad f_n(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 f_n(x_1) + \alpha_2 f_n(x_2)$

En faisant tendre n vers l'infini, on obtient:

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2).$$

Donc f est linéaire.

2) Montrons que f est continue.

Pour tout $x \in E$, la suite $(f_n(x))$ est convergente. Donc elle est bornée. Autrement dit $\exists M_x > 0$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|f_n(x)\| \leq M_x.$$

D'après le Th. de Banach-Steinhaus, $\exists M > 0$ tel que:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|f_n\| \leq M.$$

Donc $\quad \forall x \in E, \forall n \in \mathbb{N}, \quad \|f_n(x)\| \leq M.$

En fixant x et en faisant tendre n vers l'infini, on obtient:

$$\forall x \in E, \quad \|f(x)\| \leq M.$$

Donc f est continue.

VI. Théorème de l'application ouverte.

VI.1. Proposition.

Soient E un espace de Banach, F un e.v.n, $L : E \longrightarrow F$ une application linéaire continue et C une partie convexe fermée bornée de E. Alors $\mathrm{Int}(\overline{L(C)}) = \mathrm{Int}(L(C))$.

Preuve (Voir T.D)

VI.2. Proposition.

Soient E et F deux e.v.n. et $L : E \longrightarrow F$ une application linéaire. On suppose qu'il existe $R > 0$ tel que $\mathrm{Int}(L(B_f(0,R))) \neq \phi$. Alors L est une application ouverte.

Preuve

1) Commençons par montrer le résultat suivant :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0 \text{ tq } B_f(0,\eta) \subset L(B_f(0,\varepsilon)).$$

Soit $y_0 \in \mathrm{Int}(L(B_f(0,R)))$, $\exists \alpha > 0$ tq $B_f(y_0,\alpha) \subset L(B_f(0,R))$.

En particulier $\exists x_0 \in B_f(0,R)$ tq $y_0 = L(x_0)$.

Soit $y \in B_f(0,1)$, on a $y_0 + \alpha y \in B_f(y_0,\alpha)$. Donc $\exists x \in B_f(0,R)$ tq $y_0 + \alpha y = L(x)$. Alors

$$y = \frac{1}{\alpha}(L(x) - y_0) = L\left(\frac{1}{\alpha}(x - x_0)\right) \quad \text{avec } \frac{1}{\alpha}(x-x_0) \in B_f\left(0,\frac{2R}{\alpha}\right)$$

Donc $y \in L(B_f(0,2R))$. Ceci étant vrai pour tout $y \in B_f(0,1)$. Donc $B_f(0,1) \subset L\left(B_f\left(0,\frac{2R}{\alpha}\right)\right)$.

On en déduit que $B_f\left(0,\frac{\alpha}{2R}\right) \subset L(B_f(0,1))$ et que par suite, $\forall \varepsilon > 0$, $B_f\left(0,\frac{\alpha\varepsilon}{2R}\right) \subset L(B_f(0,\varepsilon))$.

Il suffit donc de prendre $\eta = \frac{d\varepsilon}{2R}$.

2) Soit A un ouvert de E, montrons que $L(A)$ est un ouvert de F. Soit $y \in L(A)$, $\exists x \in A$ tel que $y = L(x)$. Puisque A est ouvert, $\exists \varepsilon > 0$ tel que $B_f(x, \varepsilon) \subset A$. D'après 1), $\exists \eta > 0$ tq $B_f(0, \eta) \subset L(B_f(0, \varepsilon))$.

Alors $L(x) + B_f(0, \eta) \subset L(x + B_f(0, \varepsilon))$

càd $B_f(y, \eta) \subset L(B_f(x, \varepsilon))$. D'autre part, on a $B_f(x, \varepsilon) \subset A$, donc $L(B_f(x, \varepsilon)) \subset L(A)$ et par suite $B_f(y, \eta) \subset L(A)$. Ainsi $L(A)$ est voisinage de tous ses points. Donc $L(A)$ est ouvert.

VI.3. Théorème. (de l'application ouverte).

Soient E et F deux espaces de Banach, $L : E \to F$ une application linéaire continue. On suppose que L est surjective, alors L est une application ouverte.

Preuve

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n = L(B_f(0, n))$. Puisque L est surjective, on a $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n = F$. Donc $\mathrm{Int}(\bigcup \overline{F_n}) \neq \phi$. D'après le Th. de Baire, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\mathrm{int}(\overline{F_{n_0}}) \neq \phi$ et d'après la proposition VI.1, $\mathrm{int}(\overline{F_{n_0}}) = \mathrm{int}(F_{n_0})$. Donc $\mathrm{int}\, L(B_f(0, n_0)) \neq \phi$. D'après la proposition VI.2 L est une application ouverte.

VI.4. Corollaire.

Soient E et F deux espaces de Banach et soit L une application linéaire continue et bijective de E sur F. Alors L^{-1} est continue.

VI.5. Corollaire.

Soit E un espace vectoriel muni de deux norme $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$. On suppose que $(E, \|\cdot\|_1)$ et $(E, \|\cdot\|_2)$ est un espace de Banach et qu'il existe $c>0$ tq $\forall x \in E$, $\|x\|_2 \leq c\|x\|_1$. Alors les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont équivalentes.

Preuve.

On applique le corollaire VI.4 à l'application $id_E : (E, \|\cdot\|_1) \longrightarrow (E, \|\cdot\|_2)$.

VI.6. Corollaire.

Soient E et F deux espaces de Banach et $f: E \to F$ une application linéaire continue et surjective. Alors il existe une application $g: F \to E$ et une constante $c>0$ tel

$$\forall y \in F, \quad f(g(y)) = y \quad \text{et} \quad \|g(y)\| \leq c\|y\|.$$

Preuve

D'après le Th. de l'application ouverte, il existe $r>0$ tq:

$$B_0(0, r) \subset f(B_0(0, 1)).$$

Soit $y \in F$. si $y \neq 0$, $\frac{r}{2\|y\|} \cdot y \in B_0(0, r)$, donc il existe $x(y) \in B_0(0, 1)$ tq $\frac{r}{2\|y\|} \cdot y = f(x(y))$.

Posons

$$g(y) = \begin{cases} \frac{2}{r}\|y\|\, x(y) & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$$

Alors $\forall y \in F$, $f(g(y)) = y$ et $\|g(y)\| \leq \frac{2}{r}\|y\|$.

Il suffit donc de prendre $c = \frac{2}{r}$.

VI.7. Théorème du graphe fermé.

Soient E et F deux espaces de Banach et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. On suppose que le graphe de f est fermé dans $E \times F$. Alors f est continue.

Preuve

Munissons $E \times F$ de la norme définie par :

$\forall (x,y) \in E \times F$, $\|(x,y)\| = \max(\|x\|, \|y\|)$. Alors $E \times F$ est un espace de Banach. Puisque $G(f)$ est fermé dans $E \times F$, il est complet pour la norme induite par celle de $E \times F$.

D'autre part l'application $(x, f(x)) \longrightarrow x$ de $G(f)$ dans E est linéaire continue et bijective. Donc son inverse est continue. Il existe donc $M \geq 0$ tel que

$$\forall x \in E, \quad \|(x, f(x))\| \leq M\|x\|.$$

ce qui implique que

$$\forall x \in E, \quad \|f(x)\| \leq M.$$

Donc f est continue.

VI.8. Supplémentaire topologique.

VI.8.1. Définition Soit G un sous-espace fermé d'un e.v.n. E. On dit qu'un sous-espace vectoriel L de E est un supplémentaire topologique de G si :

i) L est fermé

ii) $L \cap G = \{0\}$ et $G + L = E$.

On dit aussi que L et G sont topologiquement supplémentaires ou encore que E est somme directe topologique de G et L

VI.8.2. Théorème

Soient E un espace de Banach, G et L deux sous-espaces vectoriels de E tels que $E = G + L$ et $G \cap L = \{0\}$. Désignons par p_1 et p_2 la projection de E sur G parallèlement à L et la projection de E sur L parallélement à G. Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) E est la somme directe topologique de G et de L.

b) p_1 est continue.

c) p_2 est continue.

Preuve On a $p_1 + p_2 = id_E$ et id_E est continue. Donc b) $\Leftrightarrow$ c).
D'autre part, on a $G = p_2^{-1}(\{0\})$ et $L = p_1^{-1}(\{0\})$. Donc b) $\Rightarrow$ a).
Il reste à montrer que a) $\Rightarrow$ b). Considérons l'application :

$$f : G \times L \longrightarrow E$$
$$(x_1, x_2) \longmapsto x_1 + x_2$$

Il est clair que f est linéaire continue et bijective. Donc si G et L sont fermés dans E, alors $G \times L$ est un espace de Banach. L'application f^{-1} est alors continue. Donc ses composantes p_1 et p_2 sont continues.

VII. Espaces Préhilbertiens. Espaces de Hilbert

I. Forme Hermitienne

I.1 Définition

Soit E un espace vectoriel sur K ($K=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On appelle forme hermitienne sur E toute application $\varphi : E\times E \longrightarrow K$ telle que :

1) $\forall y \in E$, L'application $\varphi(\cdot, y) : x \longmapsto \varphi(x,y)$ est une forme linéaire sur E.

2°) $\forall x, y \in E$, $\quad \varphi(y,x) = \overline{\varphi(x,y)}$

I.2. Conséquences.

C_1) $\forall x \in E$, $\quad \varphi(x,x) = \overline{\varphi(x,x)}$. Donc $\varphi(x,x) \in \mathbb{R}$.

C_2) $\forall x \in E, \forall y_1, y_2 \in E$, $\quad \varphi(x, y_1+y_2) = \overline{\varphi(y_1+y_2, x)}$

$$= \overline{\varphi(y_1, x) + \varphi(y_2, x)} = \overline{\varphi(y_1,x)} + \overline{\varphi(y_2,x)} = \varphi(x,y_1) + \varphi(x,y_2)$$

C_3) $\forall \lambda \in K$, $\quad \varphi(x, \lambda y) = \overline{\varphi(\lambda y, x)} = \bar{\lambda}\, \overline{\varphi(y,x)} = \bar{\lambda}\, \varphi(x,y)$.

C_3) si $K = \mathbb{R}$, φ est une forme bilinéaire symétrique

I.3. Exemples

1) Soient $(\alpha_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}}$ une famille de n^2 éléments de K tels que $\overline{\alpha_{ij}} = \alpha_{ji}$ et $E = K^n$. La fonction $\varphi(x,y) = \sum_{1\le i,j\le n} \alpha_{ij}\, x_i \overline{y_j}$ est une forme hermitienne sur E.

2) Soit E l'espace vectoriel $\mathcal{C}([0,1], K)$ et soit α une fonction ~~[illegible]~~ continue à valeurs réelles définie sur $[0,1]$. Pour tous $f, g \in E$, Posons $\varphi(f,g) = \int_0^1 \alpha(t) f(t) \overline{g(t)}\, dt$. Alors φ est une forme hermitienne sur E.

I.4. Définition

On dit qu'une forme hermitienne φ sur E est positive si $\varphi(x,x) \geq 0$, $\forall x \in E$. On dit qu'elle est définie positive si $\forall x \neq 0$, $\varphi(x,x) > 0$.

Exemples

Dans l'exemple 1) ci-dessus, si $\alpha_{ij} = 0$ lorsque $i \neq j$ et $\alpha_{ii} \geq 0$ pour tout i, la forme φ est positive. Si en plus $\alpha_{ii} > 0$ pour tout i, elle est définie positive.

Dans l'exemple 2) ci dessus, si $\alpha \geq 0$, φ est positive, si $\alpha > 0$, elle est définie positive.

I.5. Proposition

Soit φ une forme hermitienne définie positive sur E.

1°) $\forall x, y \in E$, on a l'inégalité de Cauchy-Schwarz suivante

$$|\varphi(x,y)|^2 \leq \varphi(x,x) \cdot \varphi(y,y).$$

2°) L'application $x \longmapsto \sqrt{\varphi(x,x)}$ est une norme sur E.

II. Espaces Préhilbertiens

II.1 Définition

On appelle espace préhilbertien tout espace vectoriel E muni d'une forme hermitienne définie positive et de la norme associée à φ par la relation $\|x\|^2 = \varphi(x,x)$.

On notera en général $\varphi(x,y)$ par $\langle x|y\rangle$, et on appellera $\langle x|y\rangle$ le produit scalaire de x et de y. Pour simplifier l'écriture, on notera souvent $\langle x|y\rangle$ par $x.y$ et $x.x$ par x^2

II.2. Soient E un espace préhilbertien, F un sous-espace vectoriel de E. La restriction du produit scalaire de E à F est un produit scalaire sur F. Ainsi F devient automatiquement un espace préhilbertien.

II.3. Soient E un espace préhilbertien et $x, y \in E$. On dit que x, y sont orthogonaux si $\langle x | y \rangle = 0$. On dit que les sous-espaces M et N de E sont orthogonaux si $\forall x \in M$, $\forall y \in N$, $\langle x, y \rangle = 0$. L'ensemble des éléments de E orthogonaux à un sous-espace vectoriel M de E est un sous-espace vectoriel de E noté $M^\perp$ et est appelé le sous-espace vectoriel de E orthogonal à M.

II.4 Proposition

Soient E un espace préhilbertien et $x, y \in E$. On a

i) (identité de la médiane) :

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 .$$

ii) (identité de polarisation)

$$4\langle x | y \rangle = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2 .$$

II.5. Théorème de Pythagore

Soient E un espace préhilbertien et $x_1, \dots, x_n$ des éléments de E deux à deux orthogonaux. Alors

$$\|x_1 + \dots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \dots + \|x_n\|^2 .$$

II.6. Proposition

Soit E un espace préhilbertien.

L'application $(x, y) \longmapsto \langle x | y \rangle$ de $E \times E$ dans K est continue

III. Famille orthogonale, famille orthonormale.

III.1. Définition.

Soient E un espace préhilbertien. On dit qu'une famille $(e_i)_{i\in I}$ d'éléments de E est orthogonale si $e_i \neq 0$ pour tout $i \in I$ et $\langle e_i | e_j\rangle = 0$ pour tous $i, j \in I$ tels que $i \neq j$. On dit que la famille $(e_i)_{i\in I}$ est orthonormale si $(e_i)_{i\in I}$ est orthogonale et si en plus $\|e_i\| = 1$ pour tout $i \in I$.

III.2. Exemple.

Soit E l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ constitué par les suites $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des nombres complexes nuls à partir d'un certain rang. Pour $x = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $y = (\mu_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ posons $\langle x | y\rangle = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n \overline{\mu_n}$. On vérifie facilement qu'on obtient un produit scalaire sur E et que la famille $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $e_1 = (1, 0, 0, \dots)$, $e_2 = (0, 1, 0, 0 \dots)$, $e_3 = (0, 0, 1, 0, \dots)$, ... est une famille orthonormale.

III.3. Proposition.

Dans un espace préhilbertien E, toute famille orthogonale est libre.

Preuve

Soient $(e_i)_{i\in I}$ une famille orthogonale de E, J une partie finie de I et $(\alpha_j)_{j\in J}$ une famille d'éléments de K telle que $\sum_{j\in J} \alpha_j e_j = 0$. Alors pour tout $j \in J$, $\langle \sum_{i\in J} \alpha_i e_i , e_j\rangle = 0$. Donc $\alpha_j \|e_j\|^2 \Rightarrow \alpha_j = 0$ car $e_j \neq 0$.

III.4. Proposition.

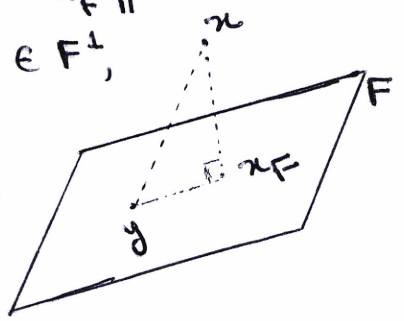
Soit E un espace préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de F. Pour tout $x \in E$, posons $x_F = \sum_{i=1}^{n} \langle x | e_i \rangle e_i$. Alors pour tout $x \in E$,

1) $x - x_F \in F^{\perp}$.
2) $d(x, F) = \|x - x_F\|$.

Preuve

1) Soit $x \in F$, on a pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $\langle x_F | e_i \rangle = \langle x_F | e_i \rangle = \langle x | e_i \rangle$. Donc $\langle x - x_F | e_i \rangle = 0$. Soit maintenant $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i \in F$, on a
$\langle x - x_F | y \rangle = \sum_{i=1}^{n} \overline{y_i} \langle x - x_F | e_i \rangle = 0$. Donc $x - x_F \in F^{\perp}$.

2) Il suffit de m.q. $\forall y \in F$, $\|x - y\| \geq \|x - x_F\|$.
Soit $y \in F$, on a $x_F - y \in F$ et $x - x_F \in F^{\perp}$, donc, d'après le Th. de Pythagore



$\|(x - x_F) + (x_F - y)\|^2 = \|x - x_F\|^2 + \|x_F - y\|^2$

càd $\|x - y\|^2 = \|x - x_F\|^2 + \|x_F - y\|^2$.

Donc $\|x - x_F\|^2 \leq \|x - y\|^2$. Ce qui implique que $\|x - x_F\| \leq \|x - y\|$. c.q.f.d.

III.5. Corollaire (procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt).

Soit E un espace préhilbertien et soit $(a_1, a_2, \dots)$ une suite finie ou infinie de vecteurs linéairement indépendants.

Posons

$$e_1 = \frac{a_1}{\|a_1\|} \qquad \text{et} \qquad e_{n+1} = \frac{a_{n+1} - \sum_{i=1}^{n} \langle a_{n+1} | e_i \rangle e_i}{\| a_{n+1} - \sum_{i=1}^{n} \langle a_{n+1} | e_i \rangle e_i \|}$$

Alors la suite (e_n) est une famille orthonormale qui engendre le même espace vectoriel que celui engendré par $(a_1, a_2, \dots)$.

III.6. Définitions.

- Soit $(\alpha_i)_{i \in I}$ une famille de nombres réels positifs. On dit que la famille $(\alpha_i)_{i\in I}$ est sommable s'il existe $M > 0$ tel que pour toute partie finie J de I, on a $\sum_{j \in J} \alpha_j \leq M$.

- Soit $(\alpha_i)_{i\in I}$ une famille sommable de nombres réels positifs. On appelle somme de la famille $(\alpha_i)_{i\in I}$ et on note $\sum_{i \in I} \alpha_i$ la borne supérieure de l'ensemble $\left\{ \sum_{j\in J} \alpha_j \ , \ J \text{ finie} \subset I \right\}$.

- Une famille $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments d'un e.v.n. est dite normalement sommable si la famille $(\|x_i\|)_{i\in I}$ est sommable.

III.7. Proposition.

Soient E un espace préhilbertien et $(e_i)_{i\in I}$ une famille orthonormale de E. Alors pour tout $x \in E$, la famille $\left(|\langle x|e_i\rangle|^2\right)_{i\in I}$ est sommable et on a :

$$\sum_{i\in I} |\langle x | e_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2 \qquad \text{(Inégalité de Bessel)}.$$

Preuve.

Il suffit de montrer que pour toute partie finie J de I, on a :

$$\sum_{j\in J} |\langle x | e_j \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

Soit J une partie finie de I. Désignons par F_J le s.e.v. de E engendré par la famille $(e_j)_{j\in J}$ et pour tout $x \in E$, posons $x_J = \sum_{j\in J} \langle x/e_j\rangle e_j$. Pour tout $x \in E$, on a :

$x = x - x_J + x_J$ et d'après la proposition III.4, $x - x_J \in F_J^{\perp}$. Donc, d'après le th. de Pythagore $\|x\|^2 = \|x_J\|^2 + \|x - x_J\|^2$. Ce qui implique que $\|x_J\|^2 \leq \|x\|^2$. Or $\|x_J\|^2 = \sum |\langle x/e_j\rangle|^2$, donc $\sum_{j\in J} |\langle x/e_j\rangle|^2 \leq \|x\|^2$.

III.8. Définition.

- On dit qu'une famille d'un espace préhilbertien E est totale si le sous-espace vectoriel engendré par cette famille est dense dans E.
- On appelle base orthonormale d'un espace préhilbertien E toute famille orthonormale totale de E.

III.9. Proposition.

Soient E un espace préhilbertien et $(e_i)_{i\in I}$ une base o.N de E. Pour tout $x \in E$, on a :

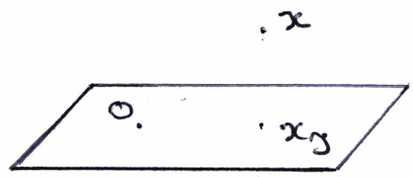
$$\|x\|^2 = \sum_{i\in I} |\langle x/e_i\rangle|^2. \qquad \text{(relation de Parseval).}$$

Preuve. Soit $x \in E$.

D'après l'inégalité de Bessel, on a $\sum_{i\in I} |\langle x/e_i\rangle|^2 \leq \|x\|^2$. Il reste à montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie finie J de I telle que $\|x\|^2 - \varepsilon \leq \sum_{j\in J} |\langle x/e_j\rangle|^2$. Soit F le s.e.v. engendré par la famille $(e_i)_{i\in I}$. Pour toute partie finie J de I désignons par F_J le s.e.v. de E engendré par la famille $(e_j)_{j\in J}$ et posons $x_J = \sum_{j\in J} \langle x/e_j\rangle e_j$. On a $\bar{F} = E$, donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $y \in F$ tel que $\|x - y\| \leq \sqrt{\varepsilon}$

Puisque F est engendré par la famille $(e_i)_{i\in I}$, il existe une partie finie J de I telle que $y \in F_J$. D'après la proposition III.4, $x - x_J \in F_J^{\perp}$ et $\|x - x_J\| \leq \|x-y\| \leq \sqrt{\varepsilon}$. Alors

$$\begin{aligned}\|x\|^2 &= \|(x - x_J) + x_J\|^2 \\ &= \|x - x_J\|^2 + \|x_J\|^2 \\ &\leq \varepsilon + \sum_{j\in J} |\langle x \mid e_j\rangle|^2\end{aligned}$$



Donc

$$\|x\|^2 - \varepsilon \leq \sum_{j\in J} |\langle x \mid e_j\rangle|^2 . \qquad \text{c.q.f.d.}$$

IV. Espaces de Hilbert.

IV.1. Définition.

On appelle espace de Hilbert tout espace préhilbertien complet pour la norme $x \longmapsto \sqrt{\langle x \mid x\rangle}$.

IV.2. Exemples.

1) Tout espace préhilbertien de dimension finie est un espace de Hilbert.

2) Soit X l'espace vectoriel des suites de nombres complexes. Désignons par $\ell^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{N})$ l'ensemble des suites $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$ telles que $\sum_{n=0}^{+\infty} |\lambda_n|^2 < +\infty$. Montrons que c'est un sous-espace vectoriel de X. Il est clair que si $S = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{N})$ et $\alpha \in \mathbb{C}$, alors $\alpha S = (\alpha\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{N})$. Soit maintenant $S = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $T = (\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux éléments de $\ell^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{N})$. Montrons que $S + T \in \ell^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{N})$.

On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $|\lambda_n + \mu_n|^2 \leq (|\lambda_n| + |\mu_n|)^2$

$$\leq (|\lambda_n| + |\mu_n|)^2 + (|\lambda_n| - |\mu_n|)^2$$

$$= 2(|\lambda_n|^2 + |\mu_n|^2).$$

Donc $\sum_{n=0}^{+\infty} |\lambda_n + \mu_n|^2 \leq 2\left(\sum_{n=0}^{+\infty} |\lambda_n|^2 + \sum_{n=0}^{+\infty} |\mu_n|^2 \right) < +\infty$

Ce qui montre que $S+T \in \ell^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{N})$. On conclut alors que $\ell^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{N})$ est un sous-espace vectoriel de E. Par ailleurs, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $|\lambda_n \bar{\mu}_n| = |\lambda_n||\mu_n| \leq \frac{1}{2}(|\lambda_n|^2 + |\mu_n|^2)$. Donc la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n \bar{\mu}_n$ est convergente. Posons $\langle S, T\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n \bar{\mu}_n$. On vérifie facilement qu'on obtient un produit scalaire sur $\ell^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{N})$. Montrons que $\ell^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{N})$ muni de ce produit scalaire est un espace de Hilbert. Soit $(S^n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $\ell^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{N})$. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S^n = (\lambda^n_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Soit $k \in \mathbb{N}$, on a pour tous $m, n \in \mathbb{N}$, $|\lambda^n_k - \lambda^m_k|^2 \leq \sum_{i=0}^{+\infty} |\lambda^n_i - \lambda^m_i|^2 = \|\lambda^n - \lambda^m\|^2$. Donc $|\lambda^n_k - \lambda^m_k| \leq \|\lambda^n - \lambda^m\|$. Donc la suite (λ^n_k) est de Cauchy. Comme $\mathbb{C}$ est complet elle converge vers un élément $\lambda_k \in \mathbb{C}$. Posons $S = (\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Montrons que $S \in \ell^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{N})$ et que $(S^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers S. Soit $\varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N, \ \forall m \geq N, \quad \|S^n - S^m\| \leq \varepsilon .$$

Soient $n \geq N$ et $p \in \mathbb{N}$, on a :

$$\forall m \geq N, \quad \sum_{i=0}^{p} |\lambda^n_i - \lambda^m_i|^2 \leq \|S^n - S^m\|^2 \leq \varepsilon^2.$$

En faisant tendre m vers l'infini, on obtient :

$$\sum_{i=0}^{p} |\lambda^n_i - \lambda_i|^2 \leq \varepsilon^2$$

Ceci étant vrai, $\forall p \in \mathbb{N}$, donc

$$\forall n \geq N, \qquad \sum_{i=0}^{+\infty} |\lambda_i^n - \lambda_i|^2 \leq \varepsilon^2 \qquad (*)$$

cela implique que $\lambda^n - \lambda \in \ell^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{N})$, $\forall n \geq N$.

Comme $\lambda = \lambda^n - (\lambda^n - \lambda)$. On déduit que $\lambda \in \ell^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{N})$. La relation $(*)$ s'écrit:

$$\forall n \geq N, \qquad \|\lambda^n - \lambda\| \leq \varepsilon .$$

Donc (λ^n) converge vers λ.

3) L'espace préhilbertient E des suites de nombres complexes nulles à partir d'un certain rang, muni du produit scalaire

$$E \times E \longrightarrow K$$
$$((\lambda_n),(\mu_n)) \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n \overline{\mu_n}$$

n'est pas un espace de Hilbert. En effet: puisque E est un sous-espace de $\ell^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{N})$, il suffit de montrer qu'il n'est pas fermé dans $\ell^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{N})$. Pour cela considérons la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E définie par: $T_n = (1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2^n}, 0, 0, \dots)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Posons $T = \left(\frac{1}{2^k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$. On a: $\|T\|^2 = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^k}\right)^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{4^k} < +\infty$. Donc $T \in \ell^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{N})$. D'autre part, $\forall n \in \mathbb{N}$, on a:

$$\|T - T_n\|^2 = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

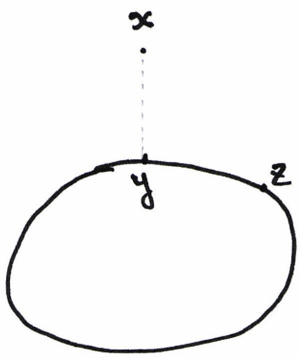
Donc (T_n) converge vers T. Puisque $T \notin E$, E n'est pas fermé dans $\ell^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{N})$.

c.q.f.d.

VI.3. Théorème.

Soient E un espace de Hilbert et C une partie convexe fermée non vide de E. Alors pour tout $x \in E$, il existe un unique point y de C tel que $\|x-y\| = d(x, C)$. Cet élément y est caractérisé par : $\text{Réel} \langle x-y, z-y \rangle \leq 0, \forall z \in C$.

Preuve.



Posons $d = d(x, C)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $y_n \in C$ tel que $\|x-y_n\| \leq d + \frac{1}{n}$.
Montrons que (y_n) est de Cauchy.
D'après l'identité de la médiane, on a :
$\forall n, m \in \mathbb{N}^*$

$$\|(x-y_n)-(x-y_m)\|^2 + \|(x-y_n)+(x-y_m)\|^2 = 2\|x-y_n\|^2 + 2\|x-y_m\|^2.$$

càd

$\forall n, m \in \mathbb{N}^*$

$$\|y_m - y_n\|^2 + 4\|x - \tfrac{1}{2}(y_n+y_m)\|^2 = 2\|x-y_n\|^2 + 2\|x-y_m\|^2.$$

Donc, $\forall n, m \in \mathbb{N}^*$

$$\|y_m - y_n\|^2 + 4\|x - \tfrac{1}{2}(y_n+y_m)\|^2 \leq 2\left(d+\tfrac{1}{n}\right)^2 + 2\left(d+\tfrac{1}{m}\right)^2$$

Puisque C est convexe, $\frac{1}{2}(y_n+y_m) \in C$. Donc

$d \leq \|x - \frac{1}{2}(y_n+y_m)\|$ et par suite

$$\begin{aligned}\|y_m - y_n\|^2 + 4d^2 &\leq \|y_m - y_n\|^2 + 4\|x - \tfrac{1}{2}(y_n+y_m)\|^2 \\ &\leq 2\left(d+\tfrac{1}{n}\right)^2 + 2\left(d+\tfrac{1}{m}\right)^2 \\ &= 4d^2 + \frac{4d}{n} + \frac{2}{n^2} + \frac{4d}{m} + \frac{2}{m^2}\end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$\|y_m - y_n\|^2 \leq \frac{4d}{n} + \frac{2}{n^2} + \frac{4d}{m} + \frac{2}{m^2}.$$

Donc la suite (y_n) est de Cauchy. Comme E est complet, la suite (y_n) converge vers un élément y. Puisque C est fermé, $y \in C$. D'autre part, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad d \leq \|x - y_n\| \leq d + \frac{1}{n}.$$

En faisant tendre n vers l'infini, on obtient: $\|x-y\| = d$.

<u>Unicité de y</u>

Soit y' un autre élément de C tel que $\|x - y'\| = d$. Appliquons l'identité de la médiane à $a = x - y$ et $b = x - y'$, on obtient:

$\|2x - (y+y')\|^2 + \|y' - y\|^2 = 4d^2$. càd :

$4\|x - \frac{1}{2}(y+y')\|^2 + \|y' - y\|^2 = 4d^2$.

Puisque C est convexe, $\frac{1}{2}(y+y') \in C$. Donc $\|x - \frac{1}{2}(y+y')\| \geq d$ et par suite $4\|x - \frac{1}{2}(y+y')\|^2 + \|y'-y\|^2 \geq 4d^2 + \|y'-y\|^2$

$\Rightarrow \quad 4d^2 + \|y'-y\|^2 \leq 4d^2$

càd $\quad \|y' - y\|^2 \leq 0$. Donc $y' = y$.

<u>Equivalence des propriétés caractérisant y.</u>

Supposons que $y \in C$ et $\|x-y\| = d(x, C)$. Soit $z \in C$, montrons que $\mathrm{Réel}\langle x-y, z-y\rangle \leq 0$. Puisque C est convexe, $\forall t \in [0,1]$, $(1-t)y + tz \in C$. Donc

$$\|x - y\|^2 \leq \|x - (1-t)y - tz\|^2 = \|x - y - t(z-y)\|^2$$
$$= \|x-y\|^2 - 2t\,\mathrm{Réel}\langle x-y, z-y\rangle + t^2\|z-y\|^2$$

ce qui implique que

$$2t \,\mathrm{R\acute{e}l}\, \langle x-y\, ,\, z-y\rangle - t^2\|z-y\|^2 \leq 0 .$$

En divisant par $2t$ puis en faisant tendre t vers 0, il vient:

$$\mathrm{R\acute{e}l}\, \langle x-y\, ,\, z-y\rangle \leq 0 .$$

Inversement si $y \in C$ vérifie, $\mathrm{R\acute{e}l}\langle x-y, z-y\rangle \leq 0$, $\forall z \in C$, alors $\forall z \in C$,

$$\begin{aligned}\|x-z\|^2 &= \|(x-y)-(z-y)\|^2\\ &= \|x-y\|^2 - 2\,\mathrm{Rel}\,\langle x-y\, ,\, z-y\rangle + \|z-y\|^2\\ &\geq \|x-y\|^2 .\end{aligned}$$

Donc $\|x-y\| = d(x, C)$.

IV.4. Définition.

Soient E un espace de Hilbert et C une partie convexe fermée de E. On appelle projection orthogonale de E sur C l'application $P: E \longrightarrow C$ qui à tout $x \in E$ associe l'unique élément y de C tel que $\|x-y\| = d(x, C)$.

IV.5. Proposition.

Les notations sont celles de la définition ci-dessus. Alors $\forall\, x_1, x_2 \in E$, $\|P(x_1) - P(x_2)\| \leq \|x_1 - x_2\|$.

Preuve. (voir T. D)

IV.6. Remarque.

La projection orthogonale P d'un espace de Hilbert E sur une partie convexe fermée non vide C de E n'est pas en général une application linéaire. C'est le cas cependant si C est un s.e.v. fermé de E.

IV.7. Proposition.

Soient F un s.e.v. fermé d'un espace de Hilbert E et P la projection orthogonale de E sur F. Alors P est une application linéaire continue de norme ≤ 1 et pour tout $x \in E$, $P(x)$ est caractérisé par

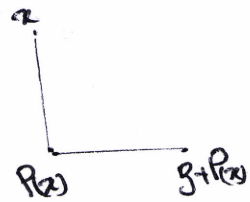
$$P(x) \in F \quad \text{et} \quad x - P(x) \in F^{\perp}.$$

Si $F \neq \{0\}$, $\|P\| = 1$.

Preuve

• Montrons que $x - P(x) \in F^{\perp}$.

Soit $z \in F$, on a $P(x) + z \in F$, donc



$$\mathrm{Réel}\, \langle x - P(x), (P(x)+z) - P(x) \rangle \leq 0$$

càd $$\mathrm{Réel}\, \langle x - P(x), z \rangle \leq 0$$

En changeant z en $-z$, on obtient $\mathrm{Réel}\, \langle x - P(x), z \rangle \geq 0$.
Donc $\mathrm{Réel}\, \langle x - P(x), z \rangle = 0$. Puisque $iz \in F$, on a aussi

$\mathrm{Réel}\, \langle x - P(x), iz \rangle = 0$ càd $\mathrm{Réel}(-i \langle x - P(x), z \rangle) = 0$

Posons $\langle x - P(x), z \rangle = \alpha + i\beta$. On a :

$\alpha = \mathrm{Réel}\, \langle x - P(x), z \rangle = 0$ et $\beta = \mathrm{réel}(-i\langle x - P(x), z \rangle) = 0$

Donc $\langle x - P(x), z \rangle = 0$.

• Réciproque

Inversement si un élément y de F vérifie $x - y \in F^{\perp}$, alors $\forall z \in F$, $\langle x - y, z - y \rangle = 0$. Donc $\mathrm{Réel}\langle x - y, z - y \rangle \leq 0 \Rightarrow y = P(x)$.

• Linéarité de P.

Soient $x_1, x_2 \in E$ et $\alpha_1, \alpha_2 \in K$. On a :
$\alpha_1 P(x_1) + \alpha_2 P(x_2) \in F$ et $(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) - (\alpha_1 P(x_1) + \alpha_2 P(x_2))$
$= \alpha_1 (x_1 - P(x_1)) + \alpha_2 (x_2 - P(x_2)) \in F^\perp$. Donc
$P(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 P(x_1) + \alpha_2 P(x_2)$.

• La continuité de P résulte de la proposition IV.5. On déduit aussi de la proposition IV.5. que $\|P\| \leq 1$. Il reste à montrer que si $F \neq \{0\}$, alors $\|P\| = 1$.

Supposons $F \neq \{0\}$, soit $x \in F \setminus \{0\}$. On a $P(x) = x$. Donc $\|x\| \leq \|P\| \|x\|$. Ce qui implique que $\|P\| \geq 1$.

IV.8. Corollaire.

Tout s.e.v. fermé F d'un espace de Hilbert E admet un suplémentaire topologique; $F^\perp$ est un tel supplémentaire.

Preuve.

On a $\forall x \in E$, $x = (x - P(x)) + P(x)$ avec $P(x) \in F$ et $x - P(x) \in F^\perp$. Donc $E = F + F^\perp$. D'aute part si $x \in F \cap F^\perp$, alors $\langle x | x \rangle = 0$ càd $\|x\|^2 = 0$. Donc $F \cap F^\perp = \{0\}$. De plus F et $F^\perp$ sont fermés. Donc F et $F^\perp$ sont topologiquement supplémentaires.

IV.9. Théorème.

Tout espace de Hilbert possède une base orthonormale.

Preuve.

L'ensemble $\mathcal{F}$ des familles O.N. de E ; ordonné par inclusion est un ensemble inductif. D'après le Th. de Zorn $\mathcal{F}$ contient une famille O.N. maximale. Soit $(e_i)_{i\in I}$ une telle famille. Montrons que $(e_i)_{i\in I}$ est totale. Soit F le s.e.v. engendré par cette famille. Supposons que $\bar{F} \neq E$. Soit x un élément de E n'appartenant pas à $\bar{F}$ et soit $P(x)$ la projection orthogonale de x sur $\bar{F}$. Posons $e = \dfrac{x - P(x)}{\|x - P(x)\|}$. Alors la famille $\{e\} \cup (e_i)_{i\in I}$ est une famille O.N de E contenant strictement $(e_i)_{i\in I}$. Ce qui est en contradiction avec la maximalité de $(e_i)_{i\in I}$.

Théorème de représentation de Riesz.

Soit E un espace de Hilbert. Pour toute forme linéaire continue ξ sur E, il existe un unique élément $y \in E$ tel que :

$$\forall x \in E, \quad \xi(x) = \langle x \mid y \rangle.$$

Preuve

Existence

Si $\xi = 0$, il suffit de prendre $y = 0$

si $\xi \neq 0$. Soit $e \in \operatorname{Ker}(\xi)^{\perp}$ tel que $\xi(e) = 1$. Posons $y = \dfrac{e}{\|e\|^2}$. Pour tout $x \in E$, il existe $h \in \operatorname{Ker}\xi$ et $\lambda \in K$ tq $x = h + \lambda y$. Alors $\xi(x) = \lambda\, \xi(y) = \dfrac{\lambda}{\|e\|^2}$.

et $\langle x \mid y \rangle = \lambda \|y\|^2 = \dfrac{\lambda}{\|e\|^2}$. Donc, $\forall x \in E$, $\xi(x) = \langle x \mid y \rangle$.

<u>unicité.</u>

si y_1 et y_2 sont deux représentations de ξ, alors $\forall x \in E$,
$\langle y_1 | x \rangle = \langle y_2 | x \rangle$. Càd $\langle y_1 - y_2 , x \rangle = 0$. On prenant $x = y_1 - y_2$, on obtient $\|y_1 - y_2\|^2 = 0$. Donc $y_1 = y_2$.

Exercice 3

2) a) il existe $r>0$ tel que $B_F(y,r) \subset \overline{L(C)}$. Posons $\varepsilon = \frac{r}{4}$. Alors $B_F(y,r) = B_F(y, 4\varepsilon) = y + 4\varepsilon B_Y$. Donc

$$y + 4\varepsilon B_Y \subset \overline{L(C)} \subset L(C) + \varepsilon B_Y .$$

b) On a $y \in \overline{L(C)}$, donc $B_F(y,\varepsilon) \cap L(C) \neq \emptyset$. Soit $z \in B_F(y,\varepsilon)\cap L(C)$. Il existe $x \in C$ tel que $z = L(x)$. Comme $z \in B_F(y,\varepsilon)$, on a $\|y - z\| \leq \varepsilon$. Càd $\|y - L(x)\| \leq \varepsilon$.

c) D'après a), on a :

$$\begin{aligned} 4\varepsilon B_Y &\subset L(C) - y + \varepsilon B_Y \\ &= L(C) - L(x) + L(x) - y + \varepsilon B_Y \\ &\subset L(C-x) + 2\varepsilon B_Y . \end{aligned}$$

Posons $r = 2\varepsilon$, alors $2r B_Y \subset L(C-x) + r B_Y$. Comme $C-x$ est un ensemble convexe fermé borné, d'après 1°) on a : $r B_Y \subset L(C-x)$ càd $L(x) + 2\varepsilon B_Y \subset L(C)$.

d) On a $\|y - L(x)\| \leq \varepsilon$. Donc $y \in L(x) + \varepsilon B_Y$ et par suite

$$y + \varepsilon B_Y \subset L(x) + 2\varepsilon B_Y \subset L(C).$$

On peut donc conclure que $y \in \mathrm{int}\,(L(C))$.

Exercice 4

Désignons par E/F l'espace quotient de E par F muni de la norme induite par celle de E. Alors pour tous $m, n \in \mathbb{N}$,

$$d(x_m - x_n, F) = \| \dot{\overbrace{x_m - x_n}} \| = \| \dot{x}_m - \dot{x}_n \| .$$

Donc $\lim\limits_{\substack{m \to +\infty \\ n \to +\infty}} \|\dot{x}_m - \dot{x}_n\| = 0$. C'est à dire que la suite $(\dot{x}_n)$ est de Cauchy dans E/F. Comme E est complet, E/F est complet. Donc la suite $(\dot{x}_n)$ admet une limite $\dot{x}$ dans E/F. Cela implique que $\lim\limits_{n \to +\infty} \|\dot{x}_n\| = \|\dot{x}\|$.
càd $\lim\limits_{n \to +\infty} d(x_n, F) = d(x, F)$.

Exercice 5.

Désignons par E/F l'espace quotient de E par F muni de la norme induite par celle de E et par π la projection canonique de E sur E/F. Puisque $F \neq E$, $\|\pi\| = 1$. Donc pour tout $c \in]0, 1[$, $c < \|\pi\|$.
Comme $\|\pi\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|\pi(x)\|$, il existe $x \in S(0,1)$ tel que $\|\pi(x)\| > c$. Or $\|\pi(x)\| = \|\dot{x}\| = d(x, F)$. Donc $d(x, F) > c \Rightarrow d(x, F) \geq c$.

Exercice 6

1) Supposons que B est continue. Alors la continuité de B en $(0,0)$ implique que pour $\varepsilon = 1$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall (x,y) \in E \times F, \ (\|x\| \leq \eta \text{ et } \|y\| \leq \eta) \Rightarrow \|B(x;y)\| \leq 1 \qquad (*)$$

Soit $(x,y) \in E \times F$. Supposons que $x \neq 0$ et $y \neq 0$. Alors $\|\eta \frac{x}{\|x\|}\| \leq \eta$ et $\|\eta \frac{y}{\|y\|}\| \leq \eta$. Donc, d'après $(*)$,

$\|B(\eta \frac{x}{\|x\|} ; \eta \frac{y}{\|y\|})\| \leq 1$. Ce qui implique que

$\|B(x,y)\| \leq \frac{1}{\eta^2} \|x\| \|y\|$. Cette inégalité est aussi vérifiée si $x=0$ ou $y=0$. Donc pour $C=\frac{1}{\eta^2}$, on a :

$\forall (x,y) \in E\times F$, $\|B(x,y)\| \leq C\|x\|\|y\|$.

Inversement, supposons qu'il existe $C>0$ tel que

$$\forall (x,y)\in E\times F, \quad \|B(x,y)\| \leq C\|x\|\|y\|.$$

Soit $(x_0,y_0)\in E\times F$, montrons que B est continue en (x_0,y_0).
Soit $(x,y)\in E\times F$, on a : $x = x_0 + x - x_0$, donc
$B(x,y) = B(x_0,y) + B(x-x_0,y)$. De même on a :
$y = y_0 + y - y_0$. Donc $B(x_0,y) = B(x_0,y_0) + B(x_0,y-y_0)$.
On en déduit que $B(x,y) = B(x_0,y_0) + B(x_0,y-y_0) + B(x-x_0,y)$.
Donc

$$\|B(x,y) - B(x_0,y_0)\| \leq C\|x_0\|\,\|y-y_0\| + C\|x-x_0\|\|y\|.$$

Ce qui montre que $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} B(x,y) = B(x_0,y_0)$.

Donc B est continue en (x_0,y_0). Ceci étant vrai pour tout $(x_0,y_0)\in E\times F$. Donc B est continue.

2. Pour tout $x\in E$, désignons par f_x l'application linéaire $y \mapsto B(x,y)$ et pour tout $y\in F$, désignons par f_y l'application linéaire $x \mapsto B(x,y)$. La famille $(f_x)_{x\in S(0,1)}$ est une famille d'applications linéaires continues de F dans G.
De plus F est un espace de Banach et pour tout $y\in F$,
on a : $\|f_x(y)\| \leq \|f_y\|$, $\forall x \in S(0,1)$.
Donc, d'après le Théorème de Banach steinhaus, il existe $M>0$ tel que pour tout $x\in S(0,1)$, $\|f_x\|\leq M$.
Càd $\forall x\in S(0,1)$, $\forall y\in F$, $\|B(x,y)\|\leq M\|y\|$.

Soit maintenant $(x, y) \in E \times F$. Supposons que $x \neq 0$. Alors $\left\| \frac{x}{\|x\|} \right\| = 1$. Donc $\left\| B\left(\frac{x}{\|x\|}, y\right) \right\| \leq M \|y\|$.

Ce qui implique que $\| B(x, y) \| \leq M \|x\| \|y\|$.

Cette inégalité est aussi vérifiée pour $x = 0$. Donc elle est vérifiée pour tout $(x, y) \in E \times F$. On peut donc conclure que B est continue.

Exercice 7

1. Montrons que $\bar{f}$ est bien définie.

Soit $\dot{x} \in E/_{\mathrm{Ker} f}$. On a pour tout $x' \in \dot{x}$, $x' - x \in \mathrm{Ker} f$. Donc $f(x' - x) = 0$. Ce qui implique que $f(x') = f(x)$. Donc $\bar{f}(\dot{x})$ ne dépend pas du représentant de $\dot{x}$.

Montrons que $\bar{f}$ est linéaire.

Soient $\dot{x}_1, \dot{x}_2 \in E/_{\mathrm{Ker} f}$ et $\alpha, \beta \in K$. On a :

$$\bar{f}(\alpha \dot{x}_1 + \beta \dot{x}_2) = \bar{f}(\overline{\alpha x_1 + \beta x_2}) = f(\alpha x_1 + \beta x_2)$$
$$= \alpha f(x_1) + \beta f(x_2) = \alpha \bar{f}(\dot{x}_1) + \beta \bar{f}(\dot{x}_2).$$

Donc $\bar{f}$ est linéaire.

Montrons que $\bar{f}$ est continue.

Soit $\dot{x} \in E/_{\mathrm{Ker} f}$. On a pour tout $h \in \mathrm{Ker} f$,

$$\|\bar{f}(\dot{x})\| = \|f(x)\| = \|f(x - h)\| \leq \|f\| \|x - h\|.$$

Donc $$\|\bar{f}(\dot{x})\| \leq \|f\| \inf \{ \|x - h\|, h \in \mathrm{Ker} f \}$$
$$= \|f\| \|\dot{x}\|.$$

Ce qui implique que $\bar{f}$ est continue et que $\|\bar{f}\| \leq \|f\|$.

2) Nous avons montré que $\|\bar{f}\| \leq \|f\|$. D'autre part, on a pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| = \|\bar{f}(\dot{x})\| \leq \|\bar{f}\|\|\dot{x}\|$

$$= \|\bar{f}\| \, d(x, \mathrm{Ker} f)$$

$$\leq \|\bar{f}\| \, d(x, 0) \quad \text{car } 0 \in \mathrm{Ker} f$$

$$= \|\bar{f}\| \, \|x\|.$$

Donc $\|f\| \leq \|\bar{f}\|$. On peut donc conclure que $\|\bar{f}\| = \|f\|$.

3. On a $\mathrm{Ker}\bar{f} = \{ \dot{x} \in E/\mathrm{Ker} f \mid \bar{f}(\dot{x}) = 0 \}$

$$= \{ \dot{x} \in E/\mathrm{Ker} f \mid f(x) = 0 \}$$

$$= \{ \dot{x} \in E/\mathrm{Ker} f \mid x \in \mathrm{Ker} f \}$$

$$= \{ \dot{0} \}$$

Donc $\bar{f}$ est injective. De plus, par définition de $\bar{f}$, on a : $\mathrm{Im}\bar{f} = \mathrm{Im} f = F$. Donc $\bar{f}$ est surjective. On peut donc conclure que $\bar{f}$ est bijective. Il reste à montrer que $\bar{f}^{-1}$ est continue. On a $E/\mathrm{Ker} f$ et F sont des espaces de Banach et $\bar{f}$ est une application linéaire continue et bijective. Donc, d'après le corollaire VI.4, $\bar{f}^{-1}$ est continue.

<u>Exercice 8</u>

1. Désignons par π la projection canonique de E sur $E/\mathrm{Ker} f$ et considérons l'application $\bar{f}$ définie dans l'exercice 7. On a $f(A) = \bar{f}(\pi(A))$. Donc $f(A)$ est fermé ssi $\bar{f}(\pi(A))$ est fermé. Comme $\bar{f}$ est un isomorphisme topologique, cela signifie que $\pi(A)$ est continue. D'après la proposition IV.5, cela est équialent à $A + \mathrm{Ker} f$ est fermé.

2° méthode.

On montre que $f^{-1}(f(A)) = A + \operatorname{Ker} f$ et que $[f(A)]^c = f[(A+\operatorname{Ker} f)^c]$. Démonstration analogue à celle de la Proposition IV.5. Donc si $f(A)$ est fermé, alors puisque f est continue, $f^{-1}(f(A))$ est fermé. Càd $A + \operatorname{Ker} f$ est fermé.

Inversement, si $A + \operatorname{Ker} f$ est fermé, alors $(A + \operatorname{Ker} f)^c$ est ouvert. D'après le Th. de l'application ouverte, $f((A+\operatorname{Ker} f)^c)$ est ouvert. Càd $(f(A))^c$ est ouvert. Donc $f(A)$ est fermé.

2. D'après le Corollaire VI.6, il existe une application g de F dans E et un constante $c>0$ tel

$$\forall y \in F, \quad f(g(y)) = y \quad \text{et} \quad \|g(y)\| \leq c\|y\|.$$

Soient $y \in F$ et $x \in E$. On a :

$$f(g(y - f(x))) = y - f(x)$$

Donc $y = f(x + g(y - f(x)))$. cela implique que $x + g(y-f(x)) \in f^{-1}(y)$. Donc

$$d(x, f^{-1}(y)) \leq \|x - (x + g(y - f(x)))\| \leq c\|y - f(x)\|.$$

2° méthode

Soit $x' \in f^{-1}(y)$. On a $f^{-1}(y) = x' + \operatorname{Ker} f = \dot{x}'$. Donc

$$d(x, f^{-1}(y)) = d(x, \dot{x}') = \|\dot{\overline{x - x'}}\| = \|\bar{f}^{-1}(\bar{f}(\dot{\overline{x - x'}}))\|$$

$$\leq \|\bar{f}^{-1}\| \|f(x) - f(x')\| = \|\bar{f}^{-1}\| \|y - f(x)\|.$$

Université Moulay Ismail
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
et Informatique

Année universitaire 19-20
Filières : SMA
Ana.fonct (S_6)

Série $n°$ 7

Exercice 1 :
Soient E un espace préhilbertien. Montrer que pour tous $x, y \in E$; on a :

1. $2|< x/y >| \leq x^2 + y^2$
2. $(x+y)^2 \leq 2(x^2+y^2)$
3. $4xy = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2)$

Exercice 2 :
Soit E un e.v.n. On dit qu'une famille $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments de E est sommable de somme x si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie finie I_ε de I telle que pour toute partie finie J de I contenant I_ε, on a $\|(\sum_{j\in J} x_j) - x\| \leq \varepsilon$. Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille normalement sommable de E.

1. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble $I_\varepsilon = \{i \in I : \|x_i\| \geq \varepsilon\}$ est fini. En déduire que $\{i \in I \mid x_i \neq 0\}$ est au plus dénombrable.

   Dans le reste de l'éxercice on suppose que E est complet et que $\{i \in I \mid x_i \neq 0\}$ est infini et soit $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une numérotation de cet ensemble.

2. Montrer que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} x_{i_n}$ est convergente.
3. Montrer que la famille $(x_i)_{i\in I}$ est sommable de somme $x = \sum_{n=0}^{+\infty} x_{i_n}$.

Exercice 3 :
Soit E un espace préhilbertien et soit $(e_i)_{i\in I}$ une base orthonormale de E. Montrer que:

1. Pour tout $x \in E$, la famille $(< x|e_i > e_i)_{i\in I}$ est sommable de somme x.
2. Pour tous $x, y \in E$, la famille $(< x|e_i >\overline{< y|e_i >})_{i\in I}$ est sommable de somme $< x|y >$.

Exercice 4 :
Soit E l'espace vectoriel des applications continues de $[0.1]$ dans $\mathbb{C}$. On munit E du produit scalaire défini par

$$< f|g >= \int_0^1 f(t)\overline{g}(t)\, dt \quad , \quad \forall f, g \in E$$

Pour tout $k \in \mathbf{Z}$, désignons par a_k la fonction $t \mapsto e^{2ik\pi t}$.

1. Montrer que la famille $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est orthonormale.
2. On admet que la famille $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est totale. Montrer que pour tous $f, g \in E$ on a :
   (a) $f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\int_0^1 f(t) e^{2ik\pi t} dt \right) a_k$
   (b) $\int_0^1 f(t)\overline{g(t)}\, dt = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\int_0^1 f(t)\overline{e}^{2ik\pi t} \right) \left(\int_0^1 e^{2ik\pi t}\overline{g(t)} dt \right)$

Exercice 5 :
On considère dans $\mathbb{R}^3$ le s.e.v. F engendré par les vecteurs $a_1 = (1, -1, 0)$ et $a_2 = (0, 1, -1)$. Soit $e_1 = (1, 0, 0)$, calculer $d(e_1, F)$.

Exercice 6 :
Soient E un espace préhilbertien, F et G deux sous-espaces affines de E de dimensions finies. Montrer que : $\inf\{\|x - y\|, x \in F \text{ et } y \in G\}$ est atteint .

Exercice 7 :
Soient E un espace de Hilbert et C une partie convexe fermée non vide de E. On note P la projection orthogonale de E sur C. Montrer que

$$\forall x_1, x_2 \in E \text{ on a : } \|P(x_1) - P(x_2)\| \leq \|x_1 - x_2\|.$$

Exercice 8 :
Soit E un espace vectoriel normé. On note E' le dual topologique de E et E'' le dual topologique de E'. Pour tout $x \in E$, désignons par $J(x)$ l'application

$$\begin{array}{rccc} J(x): & E' & \longrightarrow & K \\ & \xi & \mapsto & \xi(x) \end{array}$$

1. Montrer que $J(x) \in E''$.
2. Montrer que pour tout $x \in E$, $\|J(x)\| = \|x\|$.
3. Montrer que l'application :
$$\begin{array}{rccc} J: & E & \longrightarrow & E'' \\ & x & \mapsto & J(x) \end{array}$$
est une application linéaire continue injective de norme 1.
4. On dit que E est reflexif si l'application J est surjective. Montrer que tout espace de Hilbert est reflexif.

Exercice 9 :
Soit E un espace vectoriel. On appelle forme sesquilinéaire sur E toute application B de $E \times E$ dans K telle que :

1. $\forall y \in E$, l'application $x \mapsto B(x, y)$ est linéaire.
2. $\forall x \in E$, l'application $y \mapsto B(x, y)$ est antilinéaire. (càd $\forall y_1, y_2 \in E$, $B(x, y_1 + y_2) = B(x, y_1) + B(x, y_2)$ et $\forall \lambda \in K, \forall y \in E$, $B(x, \lambda y) = \overline{\lambda} B(x, y)$).
   (a) Montrer que quelle que soit la forme sesquilinéaire continue B sur un espace de Hilbert E, il existe un unique endomorphisme continu A de E tel que :
   $$\forall (x, y) \in E \times E \ , \ B(x, y) = < x | Ay > .$$
   (b) On suppose qu'il existe $\alpha > 0$ tel que
   $$\forall x \in E \ , \ |B(x, x)| \geq \alpha \|x\|^2 ,$$
   Montrer que A est un isomorphisme.

Exercice 10 :
Soient E un espace de Hilbert réel , C une partie convexe fermée non vide de E et x un point de E qui n'appartient pas à C. Montrer
qu'il existe $a \in E$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ telsque $< a|x > \ > \ \alpha$ et $< a|y > \ < \alpha, \forall y \in C$.

Série 7

Exercice 1

1) On a $x^2+y^2-2\|x\|\|y\| = \|x\|^2+\|y\|^2-2\|x\|\|y\|$
$= (\|x\|-\|y\|)^2 \geq 0$. Donc $x^2+y^2 \geq 2\|x\|\|y\| \geq 2|\langle x|y\rangle|$.

2) $$2(x^2+y^2)-(x+y)^2 = 2x^2+2y^2-x^2-\langle x|y\rangle-\langle y|x\rangle-y^2$$
$$= x^2-\langle x|y\rangle-\langle y|x\rangle+y^2$$
$$= (x-y)^2$$
$$\geq 0$$

Donc $2(x^2+y^2) \geq (x+y)^2$.

3) On a

$$\|x+iy\|^2 = (x+iy)^2 = x^2+\langle x,iy\rangle+\langle iy,x\rangle+\langle iy,iy\rangle$$
$$= x^2-i\langle x|y\rangle+i\langle y,x\rangle-y^2$$

et

$$\|x-iy\|^2 = x^2-\langle x,iy\rangle-\langle iy,x\rangle+\langle iy,iy\rangle$$
$$= x^2+i\langle x|y\rangle-i\langle y,x\rangle-y^2$$

Donc

$$\|x+iy\|^2-\|x-iy\|^2 = -2i\langle x|y\rangle+2i\langle y,x\rangle$$
$$\Rightarrow \quad i\left(\|x+iy\|^2-\|x-iy\|^2\right) = 2\langle x|y\rangle-2\langle y|x\rangle$$

De même $\|x+y\|^2-\|x-y\|^2 = 2\langle x|y\rangle+2\langle y|x\rangle$

Donc

$$\|x+y\|^2-\|x-y\|^2+i\left(\|x+iy\|^2-\|x-iy\|^2\right) = 4\langle x|y\rangle.$$

Exercice 2.

1. Puisque la famille $(x_i)_{i\in I}$ est sommable, il existe $M>0$ tel que pour toute partie finie J de I, on a :

$$\sum_{j\in J}\|x_j\| \leq M. \qquad (1)$$

Soit $\varepsilon>0$, il existe $n\in\mathbb{N}$ tel que $n\varepsilon > M$. Supposons que I_ε est infini. Alors il contient une partie finie J de cardinal $> n$. D'où $\sum_{j\in J}\|x_j\| \geq n\varepsilon > M$. Ce qui est en contradiction avec (1). Donc I_ε est fini.

Montrons que $\{i\in I \mid x_i\neq 0\}$ est au plus dénombrable.
On a $\{i\in I \mid x_i \neq 0\} = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}^*} I_{1/n}$ et $I_{1/n}$ est fini, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.
Donc $\{i\in I \mid x_i\neq 0\}$ est au plus dénombrable.

2) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, posons $J_n=\{i_0, i_1, \dots, i_n\}$. Alors J_n est une partie finie de I. Donc, d'après (1),

$$\sum_{k=0}^{n}\|x_{i_k}\| \leq M.$$

Cela implique que la série $\sum x_{i_n}$ est normalement convergente. Comme E est complet, elle est convergente.

3) Soit $\varepsilon>0$, il existe $N_\varepsilon^1\in\mathbb{N}$ tq

$$\forall n\geq N_\varepsilon^1, \qquad \left\|\left(\sum_{k=0}^{n} x_{i_k}\right) - x\right\| \leq \varepsilon/2 \qquad (2)$$

et puisque la série $\sum\|x_{i_n}\|$ est convergente, il existe $N_\varepsilon^2\in\mathbb{N}$ tq :

$$\forall n\geq N_\varepsilon^2, \qquad \sum_{k\geq n}\|x_{i_k}\| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soit $N_\varepsilon=\max(N_\varepsilon^1, N_\varepsilon^2)$ et soit $J_\varepsilon=\{x_{i_0},\dots, x_{i_{N_\varepsilon}}\}$. Montrons que $\forall J$ finie $\subset I$ et $\supset J_\varepsilon$, on a $\left\|\left(\sum_{j\in J} x_j\right) - x\right\| \leq \varepsilon$.

Soit $\mathcal{J}$ une telle partie. Posons $\mathcal{J}^* = \{j \in \mathcal{J} \mid x_j \neq 0\}$.
On a $\{x_{i_0}, \dots, x_{i_N}\} \subset \mathcal{J}^* \subset \{i_k, k \in \mathbb{N}\}$ et
$\sum_{j \in \mathcal{J}} x_j = \sum_{j \in \mathcal{J}^*} x_j$. Donc $\|(\sum_{j \in \mathcal{J}} x_j) - x\| = \|\sum_{j\in\mathcal{J}^*} x_j - x\|$
$\leq \|\sum_{k=0}^{N} x_{i_k} - x\| + \sum_{k \geq N+1} \|x_{i_k}\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ c.q.f.d.

Exercice 3

1. Soit $\varepsilon > 0$, montrons qu'il existe une partie finie I_ε de I telle que pour toute partie finie $\mathcal{J}$ de I contenant I_ε, on a $\|(\sum_{j \in \mathcal{J}} \langle x | e_j \rangle e_j) - x\| \leq \varepsilon$.

Désignons par F le s.e.v. engendré par la famille $(e_i)_{i \in I}$ et pour toute partie finie $\mathcal{J}$ de I, notons par $F_\mathcal{J}$ le s.e.v. de E engendré par la famille $(e_j)_{j \in \mathcal{J}}$ et par $x_\mathcal{J}$ la projection orthogonale de x sur $F_\mathcal{J}$. On a $\overline{F} = E$, donc il existe $y_\varepsilon \in F$ tel que $\|x - y_\varepsilon\| \leq \varepsilon$ et il existe une partie finie I_ε de I telle que $y \in F_{I_\varepsilon}$. Soit $\mathcal{J}$ une partie finie de I contenant I_ε. On a $F_{I_\varepsilon} \subset F_\mathcal{J}$. Donc $y \in F_\mathcal{J}$. Comme $d(x, F_\mathcal{J}) = \|x - x_\mathcal{J}\|$, on a :

$$\|x - x_\mathcal{J}\| \leq \|x - y\| \leq \varepsilon .$$

Or $x_\mathcal{J} = \sum_{j \in \mathcal{J}} \langle x | e_j \rangle e_j$, donc $\|(\sum \langle x | e_j \rangle e_j) - x\| \leq \varepsilon$
c.q.f.d.

2. On utilise les notations de 1°). Soient $x, y \in E$ et soit $\varepsilon > 0$, montrons qu'il existe I_ε finie $\subset I$ telle que pour toute partie finie $\mathcal{J}$ de I contenant I_ε, on a

$$\left| \sum_{j \in \mathcal{J}} \langle x | e_j \rangle \overline{\langle y | e_j \rangle} - \langle x | y \rangle \right| \leq \varepsilon .$$

D'après 1°) il existe deux parties finies I_ε^1 et I_ε^2 de I telles que pour toute partie finie J de I contenant I_ε^1, on a

$$\| x_J - x \| \leq \sqrt{\varepsilon}$$

et pour toute partie finie J de I contenant I_ε^2, on a

$$\| y_J - y \| \leq \sqrt{\varepsilon} .$$

Posons $I_\varepsilon = I_\varepsilon^1 \cup I_\varepsilon^2$ et soit J une partie finie de I contenant I_ε, on a $\| x - x_J \| \leq \sqrt{\varepsilon}$ et $\|y - y_J\| \leq \sqrt{\varepsilon}$.

Donc

$$| \langle x - x_J \mid y - y_J \rangle | \leq \varepsilon$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} \langle x \mid y \rangle &= \langle x - x_J + x_J \mid y - y_J + y_J \rangle \\ &= \langle x - x_J \mid y - y_J \rangle + \langle x - x_J \mid y_J \rangle + \langle x_J \mid y - y_J \rangle + \langle x_J \mid y_J \rangle . \end{aligned}$$

Puisque $x_J \in F_J$ et $y - y_J \in F_J^\perp$, on a $\langle x_J \mid y - y_J \rangle = 0$. De même, on a $\langle x - x_J \mid y_J \rangle = 0$. Donc

$$| \langle x \mid y \rangle - \langle x_J \mid y_J \rangle | = | \langle x - x_J \mid y - y_J \rangle | \leq \varepsilon .$$

càd

$$\Big| \langle x \mid y \rangle - \sum_{j \in J} \langle x \mid e_j \rangle \overline{\langle y \mid e_j \rangle} \Big| \leq \varepsilon \qquad \text{c.q.f.d.}$$

Exercice 4

1) On a pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\|a_k\|^2 = \int_0^1 e^{2ik\pi t} \cdot e^{-2ik\pi t} dt = \int_0^1 dt = 1$

et pour tous $m, n \in \mathbb{Z}$, $m \neq n$ $\langle a_m | a_n \rangle = \int_0^1 e^{2i(m-n)\pi t} dt$

$$= \left[\frac{1}{2i(m-n)} \cdot e^{2i(m-n)\pi t} \right]_0^1 = 0$$

Donc la famille $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ est O.N.

2. Puisque la famille (a_k) est une famille O.N et totale, c'est une base orthonormale. Donc, d'après l'exercice 3, pour tous $f, g \in E$, on a :

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f | a_k \rangle a_k = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\int_0^1 f(t) e^{-2ik\pi t} dt \right) a_k$$

et

$$\langle f | g \rangle = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f | a_k \rangle \overline{\langle g | a_k \rangle} \quad \text{càd}$$

$$\int_0^1 f(t) \overline{g(t)} dt = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\int_0^1 f(t) e^{-2ik\pi t} \right) \left(\int_0^1 e^{2ik\pi t} \overline{g(t)} dt \right).$$

Exercice 5

Désignons par $P(e_1)$ la projection orthogonale de e_1 sur F. Alors $d(e_1, F) = \|e_1 - P(e_1)\|$. Si (u_1, u_2) est une base O.N de F, alors $P(e_1) = \langle e_1 | u_1 \rangle u_1 + \langle e_1 | u_2 \rangle u_2$. D'après le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt, la famille (u_1, u_2) définie par :

$$u_1 = \frac{a_1}{\|a_1\|} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}, 0 \right)$$

$$u_2 = \frac{a_2 - \langle a_2 | u_1 \rangle u_1}{\|a_2 - \langle a_2 | u_1 \rangle u_1\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \right)$$

est une base orthonormale de F. Donc

$$P(e_1) = \frac{\sqrt{2}}{2} u_1 + \frac{1}{\sqrt{6}} u_2 = \left(\frac{7}{6}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3} \right)$$

Donc $d(e_1, F) = \|e_1 - P(e_1)\| = \left\| \left(\frac{1}{6}, \frac{-1}{3}, \frac{-1}{3} \right) \right\| = \sqrt{\frac{9}{36}} = \frac{1}{2}$.

Exercice 6

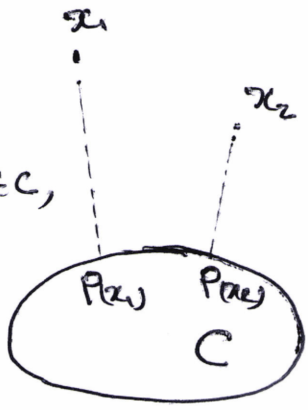
Posons $F = a + F_0$ et $G = b + G_0$, où F_0 et G_0 sont deux s.e.v. de dimensions finies. Alors

$$\inf \{ \|x-y\| ,\ x \in F \text{ et } y \in G \} =$$
$$= \inf \{ \|(a+h)-(b+k)\| ,\ h \in F_0 \text{ et } k \in G_0 \}$$
$$= \inf \{ \|(a-b)-(k-h)\| ,\ h \in F_0 \text{ et } k \in G_0 \}$$
$$= d(a-b, G_0 - F_0).$$

Puisque $G_0 - F_0$ est un s.e.v. de dimension finie, il existe $c \in G_0 - F_0$ tel que $d(a-b, G_0 - F_0) = \|(a-b)-c\|$.

Posons $c = k_0 - h_0$ avec $k_0 \in G_0$ et $h_0 \in F_0$, alors $\inf \{ \|x-y\| ,\ x \in F \text{ et } y \in G \} = \|x_0 - y_0\|$ où $x_0 = a + h_0$ et $y_0 = b + k_0$.

Exercice 7



D'après le Théorème de la projection sur un convexe fermé, on a pour tout $z \in C$,

$$\mathrm{Re}\langle x_1 - P(x_1), z - P(x_1) \rangle \leq 0 \qquad (1)$$

et

$$\mathrm{Re}\langle x_2 - P(x_2), z - P(x_2) \rangle \leq 0 \qquad (2)$$

En prenant $z = P(x_2)$ dans (1) et $z = P(x_1)$ dans (2), on obtient :

$$\mathrm{Re}\langle x_1 - P(x_1), P(x_2) - P(x_1) \rangle \leq 0 \qquad (1')$$

et

$$\mathrm{Re}\langle x_2 - P(x_2), P(x_1) - P(x_2) \rangle \leq 0 \qquad (2')$$

(2') est equivalente à

$$\mathrm{Re}\langle P(x_2) - x_2, P(x_2) - P(x_1) \rangle \leq 0 \qquad (2'').$$

En faisant la somme de (1') et (2''), on obtient :

$$\mathrm{Ré}\ell \langle P(x_2) - P(x_1) - (x_2 - x_1) \, , \, P(x_2) - P(x_1) \rangle \leq 0$$

càd

$$\| P(x_2) - P(x_1) \|^2 \leq \mathrm{Ré}\ell \langle x_2 - x_1 \, , \, P(x_2) - P(x_1) \rangle$$

$$\leq | \langle x_2 - x_1 \, \, P(x_2) - P(x_1) \rangle |$$

$$\leq \| x_2 - x_1 \| \, \| P(x_2) - P(x_1) \|$$

Donc $\| P(x_2) - P(x_1) \| \leq \| x_2 - x_1 \|$.

Exercice 8

1) Pour tous $\xi_1, \xi_2 \in E'$ et $\lambda \in K$, on a

$$J(x)(\xi_1 + \lambda \xi_2) = (\xi_1 + \lambda \xi_2)(x) = \xi_1(x) + \lambda \xi_2(x)$$
$$= J(x)(\xi_1) + \lambda J(x)(\xi_2)$$

Donc $J(x)$ est linéaire. M.q. que $J(x)$ est continue sur E'.

Pour tout $\xi \in E'$, on a $|J(x)(\xi)| = |\xi(x)| \leq \|x\| \, \|\xi\|$.

Donc $J(x)$ est continue et $\|J(x)\| \leq \|x\|$.

2) si $x = 0$, on a $\|J(x)\| = \|x\| = 0$,

si $x \neq 0$, Désignons par ξ l'application $y \mapsto \langle y, x \rangle$ de E dans $\mathbb{R}$.
Il est clair que $\xi \in E'$ et que $\|\xi\| \leq \|x\|$. L'inégalité

$\|J(x)(\xi)\| \leq \|J(x)\| \, \|x\|$, implique alors que

$$\|x\|^2 \leq \|J(x)\| \, \|x\|.$$

ce qui donne $\|x\| \leq \|J(x)\|$.

D'après 1°), on a aussi $\|J(x)\| \leq \|x\|$. D'où l'égalité.

3°) La linéarité est immédiate, le reste résulte de 2°).

4°) Considérons l'application :

$$h : E \longrightarrow E'$$
$$y \longmapsto \langle \cdot \mid y \rangle$$

D'après le Théorème de représentation de Riesz, cette application est bijective. Donc pour montrer que J est surjective, il suffit de montrer que pour tout $\theta \in E''$, $\exists x \in E$ tel que $\theta \circ h = J(x) \circ h$. Or $J(x)\circ h = \langle x, \cdot \rangle = \overline{\langle \cdot \mid x \rangle}$.

Il suffit donc de montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $\overline{\theta \circ h} = \langle \cdot \mid x \rangle$ où $\overline{\theta \circ h} : E \longrightarrow K$ définie par $\overline{(\theta \circ h)}(y) = \overline{(\theta \circ h)(y)}$ pour tout $y \in E$. D'après le Théorème de représentation de Riesz, il suffit de montrer que $\overline{\theta \circ h} \in E'$. Ce qui est facile à vérifier.

Exercice 9

1) Soient E un espace de Hilbert et B une forme sesquilinéaire continue sur E. Pour tout $y \in E$, $B(\cdot, y)$ est une forme linéaire continue sur E. D'après le Th. de représentation de Riesz, il existe un unique élément $A(y)$ de E tel que $B(\cdot, y) = \langle \cdot \mid A(y) \rangle$. Montrons que A est linéaire continue.

• **Linéarité**

Soient $y_1, y_2 \in E$ et $\lambda \in K$. On a pour tout $x \in E$

$$\langle x \mid A(y_1 + \lambda y_2) \rangle = B(x, y_1 + \lambda y_2) = B(x, y_1) + \bar{\lambda} B(x, y_2)$$

$$= \langle x \mid A(y_1) \rangle + \bar{\lambda} \langle x \mid A(y_2) \rangle = \langle x \mid A(y_1) + \lambda A(y_2) \rangle.$$

Donc $\langle x \mid A(y_1 + \lambda y_2) - (A(y_1) + \lambda A(y_2)) \rangle = 0, \quad \forall x \in E$

$$\Rightarrow A(y_1 + \lambda y_2) - (A(y_1) + \lambda A(y_2)) \in E^{\perp} = \{0\}.$$

$$\Rightarrow A(y_1 + \lambda y_2) = A(y_1) + \lambda A(y_2).$$

. <u>continuité de A</u>

On montre comme pour les applications bilinéaires continues, qu'il existe $M > 0$ tel que :

$$\forall (x,y) \in E \times E, \quad |B(x,y)| \leq M \|x\| \|y\|.$$

En prenant $x = A(y)$, on obtient :

$$\forall y \in E, \quad |B(A(y), y)| \leq M \|A(y)\| \|y\|$$

or $B(A(y), y) = \|A(y)\|^2$. Donc

$$\forall y \in E, \quad \|A(y)\| \leq M \|y\|$$

ce qui montre que A est continue.

2°) on a $\forall x \in E$, $B(x,x) = \langle x \mid Ax \rangle$. Donc

$$\alpha \|x\|^2 \leq |\langle x \mid Ax \rangle| \leq \|x\| \|Ax\|$$

ce qui implique que

$$\forall x \in E, \quad \|Ax\| \geq \alpha \|x\|. \qquad (*)$$

En particulier, $Ax = 0 \Rightarrow x = 0$. Donc A est injectif.

<u>Montrons que $\operatorname{Im} A = E$.</u>

1) Montrons que $\operatorname{Im} A$ est fermé.

Soit (y_n) une suite de $\operatorname{Im} A$ qui converge vers un élément y de E. M.q $y \in \operatorname{Im} A$. Par définition de $\operatorname{Im} A$, $\forall n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in E$ tel que $A(x_n) = y$. D'après $(*)$, on a $\forall m, n \in \mathbb{N}$, $\alpha \|x_m - x_n\| \leq \|y_m - y_n\|$. Donc (x_n) est de Cauchy. Comme E est complet, la suite (x_n) admet une limite x. Puisque $y_n = A(x_n)$ et A est continue, on a $y = A(x)$. Donc $y \in \operatorname{Im} A$.

Montrons que $(\mathrm{Im}A)^\perp = \{0\}$.

Soit $y \in (\mathrm{Im}A)^\perp$. On a $\langle y \mid A(y)\rangle = 0$ et $\langle y \mid Ay\rangle \geq \alpha \|y\|^2$.

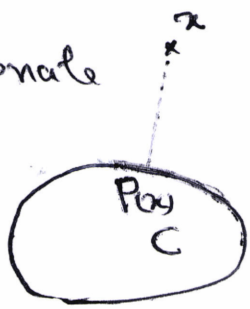
Donc $y = 0$. Ce qui montre que $(\mathrm{Im}A)^\perp = \{0\}$.

Finalement, on a E est un espace de Hilbert et $\mathrm{Im}A$ est un s.e.v. fermé de E. Donc $E = \mathrm{Im}A \oplus (\mathrm{Im}A)^\perp$.

Puisque $(\mathrm{Im}A)^\perp = \{0\}$, On a $E = \mathrm{Im}A$. Donc A est surjectif.

Exercice 10

Soit $P(x)$ la projection orthogonale de x sur C. On a



$\forall y \in C, \ \mathrm{Réel}\langle x - P(x), y - P(x)\rangle \leq 0$

Comme E est un espace de Hilbert réel, on a $\langle x - P(x) \mid y - P(x)\rangle \in \mathbb{R}$.

Donc

$$\forall y \in C, \quad \langle x - P(x) \mid y - P(x)\rangle \leq 0$$

càd

$$\forall y \in C, \quad \langle x - P(x) \mid y\rangle + \|x - P(x)\|^2 \leq \langle x - P(x) \mid x\rangle$$

Posons $a = x - P(x)$ et $\alpha = \langle x - P(x) \mid x\rangle - \frac{1}{2}\|x - P(x)\|^2$.

Puisque $x \notin C$, $a \neq 0$. Donc $\|x - P(x)\|^2 > 0$.

On en déduit que

$$\forall y \in C, \ \langle a \mid y\rangle < \langle x - P(x) \mid y\rangle + \frac{1}{2}\|x - P(x)\|^2 \leq \alpha$$

Donc $\langle a \mid y\rangle < \alpha$

et $\langle a \mid x\rangle > \langle x - P(x) \mid x\rangle - \frac{1}{2}\|x - P(x)\|^2 = \alpha$