

Ex 1) $s(t) = a + b \cos(2\pi f_0 t)$; a et b constants
 $f_0 = 1 \text{ kHz}$.

On souhaite échantillonner $s(t)$.

1°) Fréquence d'échantillonnage minimale.

D'après le théorème de Shannon : pour pouvoir échantillonner $s(t)$ sans perte d'information il faut que la fréquence d'échantillonnage soit au moins supérieure ou égale au double de la fréquence maximale du signal c'est-à-dire $F_e \geq 2F_{\max}$.

Donc $F_e \geq 2 \times 1 \text{ kHz}$ soit $F_e \geq 2 \text{ kHz}$.

2°) On choisit $F_e = 8 \text{ kHz}$.

2.1 - Expression du signal échantillonné $s_e(t)$

$$s_e(t) = s(t) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_e)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(kT_e) \delta(t - kT_e)$$

2.2. Pour $a = b = 1$; calculons le nombre d'échantillons par une période :

On a $N_e = \frac{T_0}{T_e} = \frac{1 \text{ ms}}{\frac{1}{8 \cdot 10^3}} = \underline{\underline{8}}$ échantillons

$s_e(0) = s(0)$
 $= 1 + \cos 0 = \underline{\underline{2}}$.

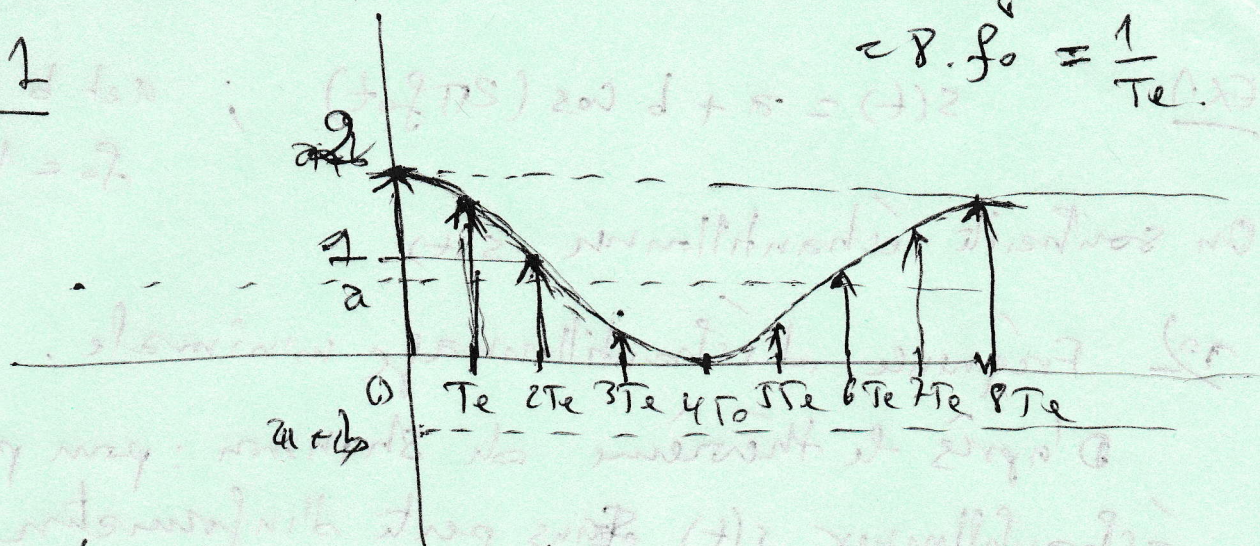
$$s(nT_e) = 1 + \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$$

$$a = b = 1$$

$$T_e = \frac{1}{8f_0} = \frac{T_0}{8}$$

$$f_e = 8 \text{ kHz}$$

$$= 8 \cdot f_0 = \frac{1}{T_e}$$



$$s(nT_e) = 1 + \cos\left(\frac{2\pi n T_e}{T_0}\right)$$

$$= 1 + \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot n \cdot \frac{T_0}{8}\right)$$

$$s(nT_e) = 1 + \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$$

$$(x[k] - 1)^2 = \sum_{k=0}^{N-1} (x[k] - 1)^2$$

$$(x[k] - 1)^2 = \sum_{k=0}^{N-1} (x[k] - 1)^2$$

$$x[k] = 1 + \cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right)$$

$$x[k] = 1 + \cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right)$$

$$x[k] = 1 + \cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right)$$

$$x[k] = 1 + \cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right)$$

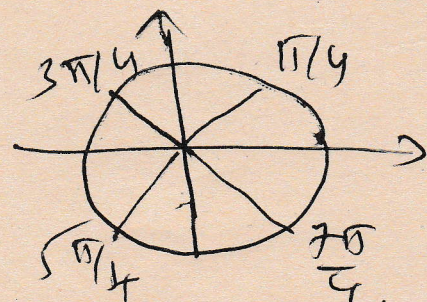
$$x[k] = 1 + \cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right)$$

Ex 1

TD3 (suite)

2017-2018 (2)

$$\begin{aligned}
 S_e(T_e) &= S(T_e) \\
 &= 1 + \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot T_e\right) = 1 + \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot 2 \cdot \frac{T_0}{8}\right) \\
 &= 1 + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \\
 &= 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \\
 &= \underline{\underline{1,71}}.
 \end{aligned}$$



$$S_e(2T_e) = 1 + \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot 2 \cdot \frac{T_0}{8}\right) = 1 + \cos \frac{\pi}{2} = \underline{\underline{1}}.$$

$$\begin{aligned}
 S_e(3T_e) &= 1 + \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot 3 \cdot \frac{T_0}{8}\right) = 1 + \cos \frac{3\pi}{4} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \\
 &= \underline{\underline{0,29}}.
 \end{aligned}$$

$$S_e(4T_e) = 1 + \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot 4 \cdot \frac{T_0}{8}\right) = 1 + \cos \pi = \underline{\underline{0}}$$

$$S_e(5T_e) = 1 + \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot 5 \cdot \frac{T_0}{8}\right) = 1 + \cos \frac{5\pi}{4} = \underline{\underline{0,29}}$$

$$S_e(6T_e) = 1 + \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot 6 \cdot \frac{T_0}{8}\right) = 1 + \cos \frac{3\pi}{2} = \underline{\underline{1}}$$

$$S_e(7T_e) = 1 + \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot 7 \cdot \frac{T_0}{8}\right) = 1 + \cos \frac{7\pi}{4} = \underline{\underline{1,71}}$$

$$S(nT_e) = 1 + \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot n \cdot \frac{T_0}{8}\right) = 1 + \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right).$$

3/- Spectre $S(f)$ du signal $s(t)$

$$S(f) = \text{TF}(s(t))$$

$$= \text{TF}(a + b \cos(2\pi f_0 t)) =$$

$$\text{TF}(a) + \frac{1}{2} \text{TF}(1 + \cos(2\pi f_0 t)) + \frac{1}{2} \text{TF}(1 - \cos(2\pi f_0 t))$$

Ex 1 (smte) Ex 1

TD N°3 (3)

2017.2.18

$$S(f) = TF(a) + b TF(\cos 2\pi f_0 t)$$

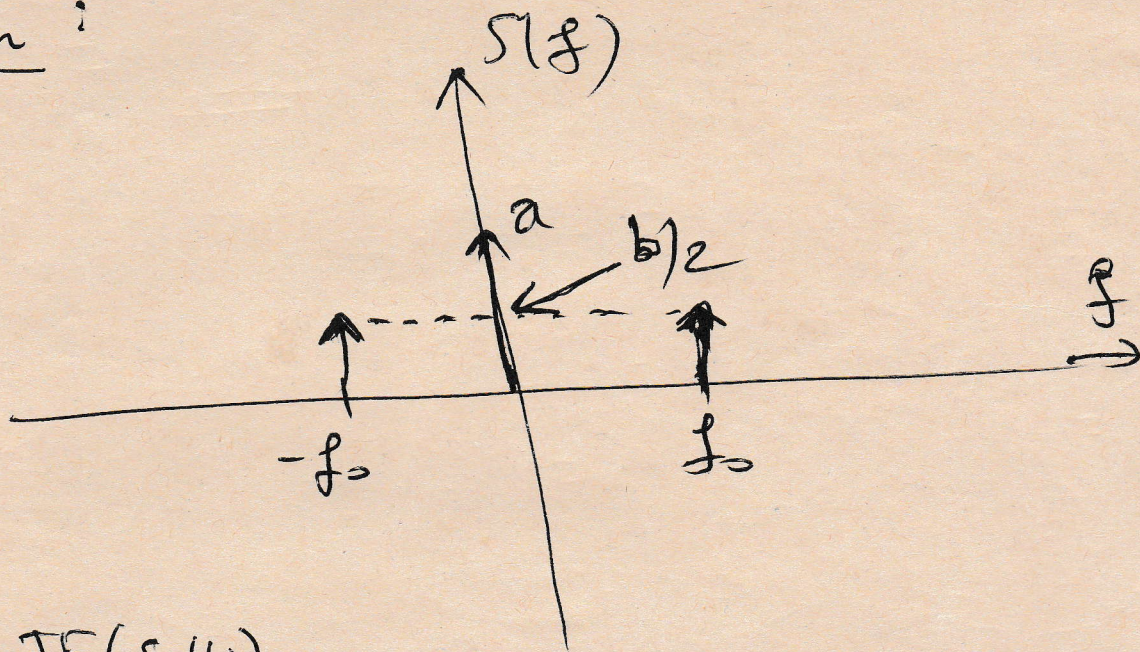
$$= a TF(1) + b TF(\cos 2\pi f_0 t)$$

$$= a \delta(f) + \frac{b}{2} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$$

done

$$S(f) = a \delta(f) + \frac{b}{2} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$$

Representation :



$$\begin{aligned} \underline{4^o} \quad S_e(f) &= TF(S_e(t)) \\ &= TF\left(s(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e)\right) \\ &= TF(s(t)) * TF\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e)\right) \\ &= S(f) * F_e \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - nF_e) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left\{ a \delta(f) + \frac{b}{2} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)] \right\} * F_e$$

Ex 1

TD 3 (suite) (4)

2017-2018

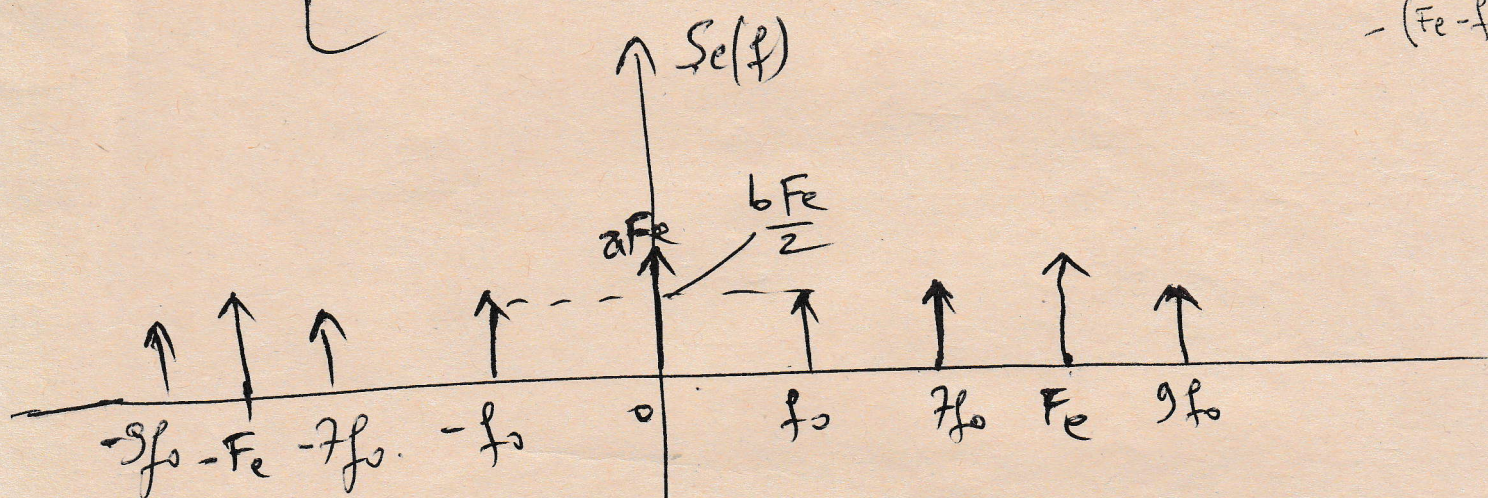
$$S_e(f) = \left[a \cdot F_e \delta(f) + \frac{b F_e}{2} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)] \right] * \text{II}_{F_e}(f)$$

$$= a F_e \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - n F_e) + \frac{b F_e}{2} \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - f_0 - n F_e) + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f + f_0 - n F_e) \right]$$

$$= F_e \left\{ a \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - n F_e) + \frac{b}{2} \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - f_0 - n F_e) + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f + f_0 - n F_e) \right] \right\}$$

$$= F_e \left\{ a \text{II}_{F_e}(f) + \frac{b}{2} \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - f_0 - n F_e) + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f + f_0 - n F_e) \right] \right\}$$

- (Fe - fo)



$n=0 \Rightarrow f_0 \text{ et } -f_0$

$n=1 \cdot (f - f_0 - 8f_0) \text{ et } (f + f_0 - 8f_0) \text{ et } F_e$

$F_e = 8 \text{ kHz} ; f_0 = 1 \text{ kHz}$

$$n=-1 \cdot \delta(f - f_0 + 8f_0) + \delta(f + f_0 + 8f_0) \\ \delta(f + 7f_0) + \delta(f + 9f_0)$$

$s(t)$: signal déterministe de T.F à bande limitée ($\rightarrow$ Fourier)

1°/- Rappeler l'expression du signal $s_e(t)$ obtenu par échantillonnage de $s(t)$ à la fréquence F_e .

$$\begin{aligned} s_e(t) &= s(t) \cdot \text{III}_{F_e}(t) \\ &= s(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(nT_e) \cdot \delta(t - nT_e) \end{aligned}$$

2°/- Spectre $S_e(f)$ du signal $s_e(t)$.

$$\begin{aligned} S_e(f) &= \text{TF}(s_e(t)) \\ &= \text{TF}\left(s(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e)\right) \\ &= \text{TF}(s(t)) * \text{TF}\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e)\right) \\ &= S(f) * F_e \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - nF_e) \\ &= F_e \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S(f - nF_e) \end{aligned}$$

Ex 2 (suite) TDW=3.

Ex 2

(2)

2017-2018

3°/ Représenter $S(f)$ lorsque $F_e > 2F_{max}$ et $s(t) = F_{max} \text{sinc}^2(F_{max}t)$

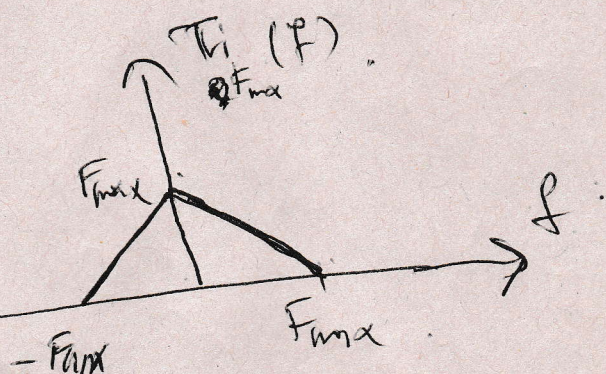
$F_e > 2F_{max} \Rightarrow$ Théorème de Shannon est bien respecté.

donc on peut restituer le signal $s(t)$ après échantillonnage à la fréquence F_e qui est supérieure à $2F_{max}$.

Calculons $S(f)$ dans ce cas

On a $s(t) = F_{max} \text{sinc}^2(F_{max}t)$

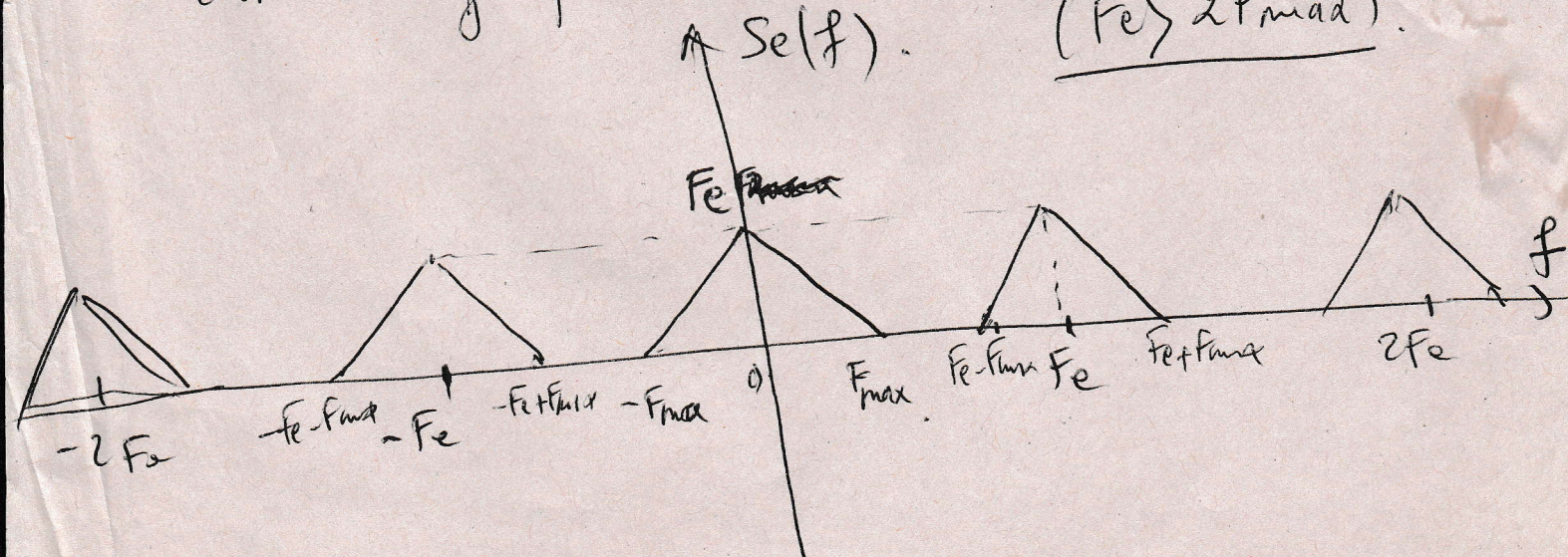
$\Rightarrow S(f) = \text{Tri}(f) = \Delta(f)$



Une $S_e(f) = F_e \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S(f - nF_e) = F_e \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{Tri}(f - nF_e)$

on a un triangle périodisé à la fréquence F_e .

$(F_e > 2F_{max})$



4°/ On désire restituer le signal $s(t)$ à partir de $s_e(t)$ à l'aide d'un filtre passe-bas idéal de transmittance $H_r(f) = \Pi_{F_e}(f)$ et de répondre impulsivement $h_r(t) = \mathcal{F}^{-1}(H_r(f))$.

Expression du signal restitué $s_r(t) = s_e(t) * h_r(t)$.

$$h_r(t) = \mathcal{F}^{-1}(H_r(f)) = \mathcal{F}^{-1}(\Pi_{F_e}(f)) = F_e \operatorname{sinc}(F_e t).$$

$$h_r(t) = F_e \operatorname{sinc}(F_e t)$$

$$s_r(t) = s_e(t) * h_r(t)$$

$$= s_e(t) * F_e \operatorname{sinc}(F_e t)$$

$$= F_e \cdot s_e(t) * \operatorname{sinc}(F_e t).$$

$$= F_e \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(nT_e) \cdot \delta(t - nT_e) * \operatorname{sinc}(F_e t)$$

$$= F_e \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(nT_e) \operatorname{sinc}(F_e(t - nT_e))$$

c'est la formule d'interpolation de Shannon.

Ex 3Ex 3TD N° 3

(1)

2017-2018

$$s(t) = s^+(t) + s^-(t)$$

avec $s^+(t) = B \operatorname{sinc}(Bt) \exp(j2\pi f_0 t)$; $f_0 = 8 \text{ kHz}$; $\operatorname{sinc} x = \frac{\sin \pi x}{\pi x}$
 $s^-(t) = B \operatorname{sinc}(Bt) \exp(-j2\pi f_0 t)$; $B = 1 \text{ kHz}$

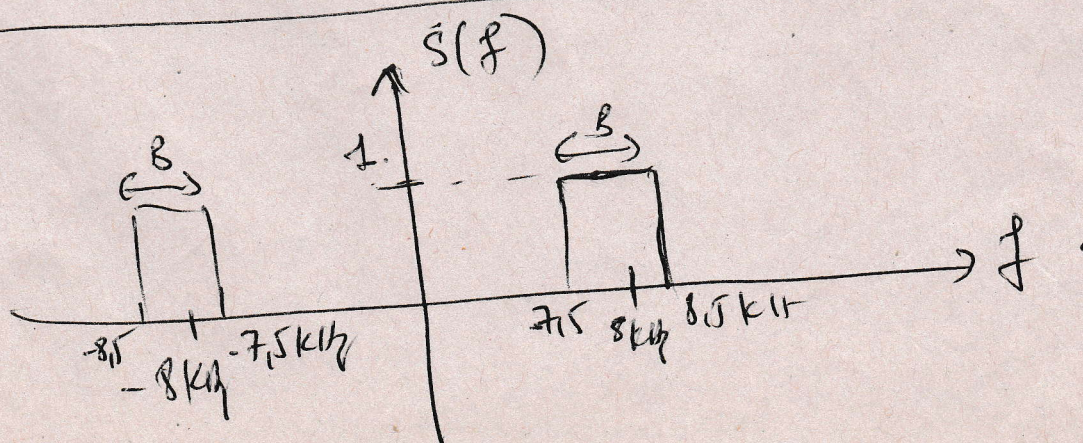
P/ Déterminer la TF du signal $s(t)$ et la représenter.

$$S(f) = \text{TF}(s(t)) = \text{TF}(s^+(t) + s^-(t)) = \text{TF}(s^+(t)) + \text{TF}(s^-(t))$$

$$\begin{aligned} \text{TF}(s^+(t)) &= \text{TF}(B \operatorname{sinc}(Bt) \exp(j2\pi f_0 t)) \\ &= \text{TF}(B \operatorname{sinc}(Bt)) * \text{TF}(\exp(j2\pi f_0 t)) \\ &= \pi_B(f) * \delta(f - f_0) \\ &= \pi_B(f - f_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{TF}(s^-(t)) &= \text{TF}(B \operatorname{sinc}(Bt) \exp(-j2\pi f_0 t)) \\ &= \text{TF}(B \operatorname{sinc}(Bt)) * \text{TF}(\exp(-j2\pi f_0 t)) \\ &= \pi_B(f) * \delta(f + f_0) \\ &= \pi_B(f + f_0) \end{aligned}$$

donc $\boxed{\text{TF}(s(t)) = \pi_B(f - f_0) + \pi_B(f + f_0)}$



20/ expression du signal obtenu par échantillonnage idéal de $s(t)$ à la fréquence F_e .

$$\begin{aligned} s_e(t) &= s(t) \cdot \text{ll}_{F_e}(t) \\ &= s(t) \cdot \text{ll}_{T_e}(t) \\ &= s(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e) \end{aligned} \quad F_e = 1/T_e$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(nT_e) \cdot \delta(t - nT_e) \quad \text{avec}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} B \text{sinc}(nBT_e) \left(\exp(j2\pi f_0 nT_e) + \exp(-j2\pi f_0 nT_e) \right) \delta(t - nT_e)$$

30/ TF du signal $s_e(t)$

$$\begin{aligned} \text{TF}(s_e(t)) &= S_e(f) = \text{TF}(s_e(t)) \\ &= \text{TF}\left(s(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e)\right) = \text{TF}(s(t)) * \text{TF}(\text{ll}_{T_e}(t)) \\ &= S(f) * F_e \text{ll}_{F_e}(f) \\ &= F_e S(f) * \text{ll}_{F_e}(f) = \\ &= F_e \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S(f - nF_e) \end{aligned}$$

$$S_e(f) = F_e \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\pi}{B} (f - f_0 - nF_e) + \frac{\pi}{B} (f + f_0 - nF_e) \right)$$

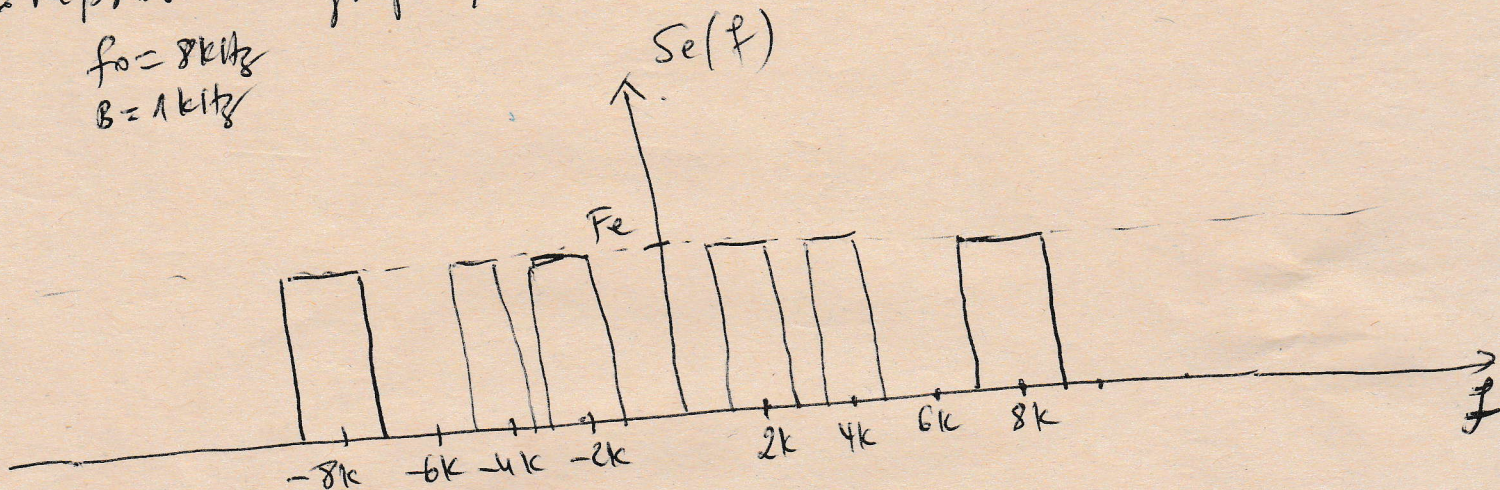
Ex 3 (suite) Ex 3 TD N-5

La condition de Shannon pour le signal $s(t)$ peut être restreinte si la fréquence d'échantillonnage F_e est au moins égale à 2 fois la fréquence maximale du signal $s(t)$ c'est $F_e \geq 2(8,5 \text{ kHz})$ soit $F_e \geq 17 \text{ kHz}$.

4°/ On échantillonne le signal $s(t)$ à la fréquence $F_e = 6 \text{ kHz}$

Représenter graphiquement $S_e(f)$ dans la bande $[-8 \text{ kHz}, 8 \text{ kHz}]$

$f_0 = 8 \text{ kHz}$
 $B = 1 \text{ kHz}$



$$S_e(f) = F_e \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (\Pi_B(f - f_0 - nF_e) + \Pi_B(f + f_0 - nF_e))$$

$n=0 \Rightarrow f_0$ et $-f_0$ et largeur B c'est $\underline{8 \text{ kHz}}$ et $\underline{-8 \text{ kHz}}$

$\begin{cases} n=1 \\ F_e=6 \text{ kHz} \end{cases} \Rightarrow (f - f_0 - 6 \text{ kHz})$ et $(f + f_0 - 6 \text{ kHz})$ soit $\underline{14 \text{ kHz}}$ et $\underline{-2 \text{ kHz}}$

$\begin{cases} n=-1 \\ F_e=6 \text{ kHz} \end{cases} \Rightarrow f - (f_0 - 6 \text{ kHz})$ et $f + (f_0 - 6 \text{ kHz})$ soit $\underline{2 \text{ kHz}}$ et $\underline{-14 \text{ kHz}}$

$\begin{cases} n=2 \\ F_e=6 \text{ kHz} \end{cases} \Rightarrow (f - f_0 - 12 \text{ kHz})$ et $(f + f_0 - 12 \text{ kHz})$ soit $\underline{20 \text{ kHz}}$ et $\underline{-4 \text{ kHz}}$

$\begin{cases} n=-2 \\ F_e=6 \text{ kHz} \end{cases} \Rightarrow f - f_0 + 12 \text{ kHz}$ et $f + f_0 + 12 \text{ kHz}$ soit $\underline{-4 \text{ kHz}}$ et $\underline{-20 \text{ kHz}}$

Ex 3

$$n = 3, \quad \begin{array}{l} f - f_0 - 18k \\ f - 8k - 18k \\ f - 26k \end{array} ; \quad \begin{array}{l} f + f_0 - 18k \\ f + 8 - 18k \\ f - 10k \end{array}$$

$$\underline{n = 4} : \quad \begin{array}{l} f - 8k - 24k \\ f - 32k \end{array} ; \quad \begin{array}{l} f + 8k - 24k \\ f - 16k \end{array}$$

$$\underline{n = -3} : \quad \begin{array}{l} f - 8 + 18 \\ f + 10k \end{array} ; \quad \begin{array}{l} f + 8 + 18 \\ f + 26k \end{array}$$

— lorsque on filtre le signal échantillonné par
 $H(f) = \Pi_B(f)$ avec $F = 6 \text{ kHz}$,

on récupère le signal dont la TF est

$$\Pi_B(f - f_1) + \Pi_B(f + f_1)$$

avec $f_1 = 6 \text{ kHz}$ $f_1 = 2 \text{ kHz}$

On $x_r(t) = 2B \cos 2\pi f_1 t \cdot \sin(Bt)$

• lorsque on filtre le signal échantillonné par

$$H(f) = \Pi_B(f + f_1) + \Pi_B(f - f_1)$$

avec $f_1 = 8 \text{ kHz}$ et $B = 1 \text{ kHz}$, on

on récupère le signal $S(t)$.

NB Il est donc possible de retrouver le signal
 bande-basse échantillonné avec un $F_e < 2F_{\text{max}}$
 dans la mesure où les spectres se répètent dans

Ex 4Ex 4TD N°3

(1)

20/11-20/13

$$s(t) = f_0 \operatorname{sinc}^2(f_0 t) \quad \text{avec } f_0 > 0.$$

I/

$$\begin{aligned} 1^\circ / \quad s_e(t) &= s(t) \cdot \mathcal{U}_{T_e}(t) \\ &= s(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(nT_e) \cdot \delta(t - nT_e) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_0 \operatorname{sinc}^2(n f_0 T_e) \delta(t - nT_e). \end{aligned}$$

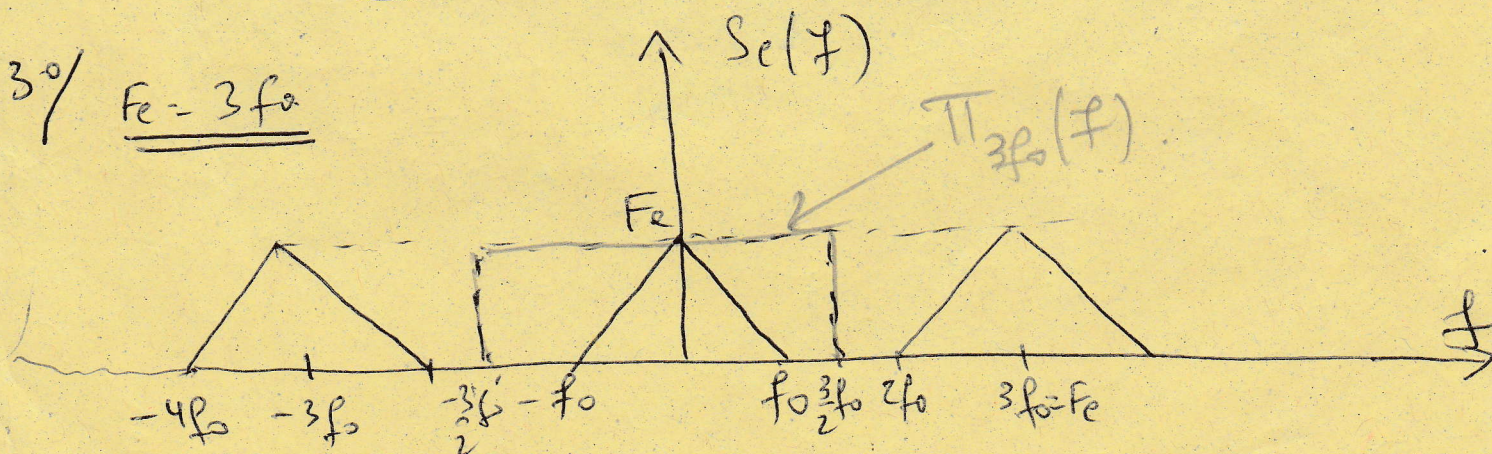
$$\begin{aligned} 2^\circ / \quad S_e(f) &= \text{TF}(s_e(t)) = \text{TF}(s(t) \cdot \mathcal{U}_{T_e}(t)) \\ &= S(f) * F_e \mathcal{U}_{F_e}(f) \\ &= F_e \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S(f - n F_e) \end{aligned}$$

On a: $s(t) = f_0 \operatorname{sinc}^2(f_0 t) \Rightarrow S(f) = \Lambda_{f_0}(f)$; Λ_{f_0} : triangle de largeur $2f_0$.

dmc

$$S_e(f) = F_e \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Lambda_{f_0}(f - n F_e)$$

$$3^\circ / \quad \underline{F_e = 3f_0}$$

Fig 30.1

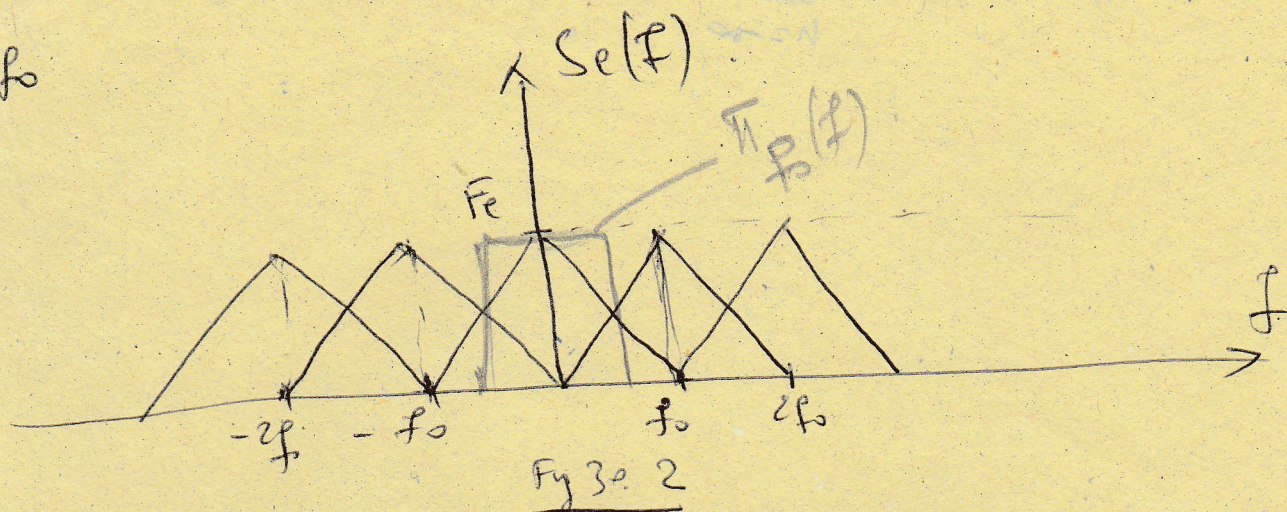
Ex 4

Ex 4

TD N° 3 (suite)

(2)

21/11/2018

30/ $F_c = f_0$ 

40/ $H(f) = \Pi_{F_c}(f)$

 $F_c = 3f_0$

$$S_r(t) = S_e(t) * h_r(t)$$

$$\Rightarrow S_r(f) = S_e(f) \cdot H_r(f) \Rightarrow S_r(f) = S_e(f) \cdot \Pi_{3f_0}(f)$$

voir figure 30/2 signal restitué

si $F_c = f_0 \Rightarrow S_r(f) = S_e(f) \cdot \Pi_{f_0}(f)$

voir figure 30.2 $\Rightarrow$ signal non restitué

II / échantillonnage réel :

$$1^o - s_e(t) = s(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Pi_{\tau}(t - nT_e)$$

$$= s(t) \cdot \left[\Pi_{\tau}(t) * \text{III}_{T_e}(t) \right]$$

$$= f_0 \text{sinc}^2(f_0 t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Pi_{\tau}(t - nT_e)$$

$$2^o / S_e(f) = \text{TF}(s_e(t)) = \text{TF} \left[s(t) \cdot \Pi_{\tau}(t) * \text{III}_{T_e}(t) \right]$$

$$= S(f) * \tau \text{sinc}(f\tau) \cdot F_e \text{III}_{F_e}(f)$$

$$= \tau F_e S(f) * \sum \text{sinc}(nf_e \tau) \cdot \delta(f - nF_e)$$

$$S_e(f) = T F_e \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{sinc}(n F_e T) \cdot S(f - n F_e)$$

