Solution de la série 4.

Mécanique quantique.

SMP4.

Ex 1:

Dans la base orthonormée $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle, |e_3\rangle\}$ on a:

$$|\psi\rangle = \alpha\,(i|e_1\rangle + |e_2\rangle - |e_3\rangle)$$

$$|\phi\rangle = \beta\,(|e_2\rangle + |e_3\rangle).$$

1°/ Calcul de $\langle\psi|\phi\rangle$:

$$\langle\psi| = \alpha^*\,(i^*\langle e_1| + \langle e_2| - \langle e_3|)$$

d'où

$$\langle\psi|\phi\rangle = \alpha^*\beta\,(-i, 1, -1)\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = 0$$

$$\forall\ \alpha, \beta.$$

De la même façon on a:

$$\langle\phi|\psi\rangle = \beta^*\alpha\,(0, 1, 1)\begin{pmatrix}i\\1\\-1\end{pmatrix} = 0 \quad \forall\ \alpha, \beta.$$

2°/ Calcul de α et β pour que:

$$\langle\psi|\psi\rangle = \langle\phi|\phi\rangle = 1$$

$\langle\psi|\psi\rangle = 1 \iff \alpha\alpha^* (-i, 1, -1) \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1$

$\iff 3\alpha\alpha^* = 1 \qquad \iff \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} e^{i\varphi} \; (\varphi \in \mathbb{R})$.

De la même façon:

$\langle\phi|\phi\rangle = 1 \iff \beta\beta^* (0, 1, 1) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$

$\iff \beta = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\varphi'} \; (\varphi' \in \mathbb{R})$

3°/ on cherche un vecteur $|\chi\rangle$ de manière à ce que la famille $\{|\chi\rangle, |\psi\rangle, |\phi\rangle\}$ soit une base orthonormée (B.O.N).

Dans la base $B = \{|e_1\rangle, |e_2\rangle, |e_3\rangle\}$, on a

$|\chi\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, on cherche donc a, b et c pour que $B' = \{|\chi\rangle, |\psi\rangle, |\phi\rangle\}$ soit une base orthonormée (BON). pour cela on a:

- $|\psi\rangle$ et $|\chi\rangle$ soient orthogonaux:

$$\langle \psi | \chi \rangle = 0 \iff \frac{e^{-i\varphi}}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -i & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$$

$$\iff -ia + b - c = 0$$

* $\langle \phi | \chi \rangle = 0 \iff b + c = 0$

* $|\chi\rangle$ est normée $\iff \langle \chi | \chi \rangle = 1 \iff aa^* + bb^* + cc^* = 1.$

d'où $\begin{cases} -ia + b - c = 0 \\ b + c = 0 \\ aa^* + bb^* + cc^* = 1 \end{cases} \iff |\chi\rangle = \frac{e^{i\varphi''}}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2i \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Remarque:
les trois vecteurs sont définis à une phase près.

<u>EX 2:</u>
Soit A une observable dans l'espace des états à n dimensions.
$\{ |\varphi_k\rangle_{k=1,2,\dots} \}$ une base orthonormée de A

$$A|\varphi_k\rangle = a_k|\varphi_k\rangle.$$

$U(k,l)$ st un opérateur linéaire :

$$U(k,l) = |\varphi_k\rangle\langle\varphi_l|$$

1°/ Calculons $U^+(k,l)$:

$$\langle\psi_1|U^+(k,l)|\psi_2\rangle = \left(\langle\psi_2|U(k,l)|\psi_1\rangle\right)^*$$

$$= \langle\psi_2|\varphi_k\rangle\langle\varphi_l|\psi_1\rangle^*$$

$$= \langle\psi_2|\varphi_k\rangle^*\langle\varphi_l|\psi_1\rangle^*$$

$$= \langle\varphi_k|\psi_2\rangle\langle\psi_1|\varphi_l\rangle = \langle\psi_1|\varphi_l\rangle\langle\varphi_k|\psi_2\rangle$$

$$= \langle\psi_1|U(l,k)|\psi_2\rangle$$

d'où $\langle\psi_1|U^+(k,l)|\psi_2\rangle = \langle\psi_1|U(l,k)|\psi_2\rangle$

donc $U^+(k,l) = U(l,k)$.

On peut calcul l'adjoint directement :

On $U(k,l) = |\varphi_k\rangle\langle\varphi_l|$

$$U^+(k,l) = \left(|\varphi_k\rangle\langle\varphi_l|\right)^* = |\varphi_l\rangle\langle\varphi_k|$$

$$= U(l,k).$$

2°| Calcul $[A, U(k,\ell)]$:

$$[A, U(k,\ell)]\,|\psi\rangle = \left(A\,U(k,\ell) - U(k,\ell)A\right)|\psi\rangle$$

$$\begin{aligned}[A, U(k,\ell)]\,|\psi\rangle &= A\,|\varphi_k\rangle\langle\varphi_\ell|\psi\rangle - |\varphi_k\rangle\langle\varphi_\ell|A|\psi\rangle \\ &= a_k\,\underbrace{|\varphi_k\rangle\langle\varphi_\ell|\psi\rangle} - a_\ell^*\,\underbrace{|\varphi_k\rangle\langle\varphi_\ell|\psi\rangle} \\ &= (a_k - a_\ell^*)\,\overbrace{|\varphi_k\rangle\langle\varphi_\ell|\psi\rangle}\end{aligned}$$

A étant observable donc hermitique et donc les valeurs propres sont réelles. $a_\ell^* = a_\ell$.

d'où $\boxed{[A, U(k,\ell)] = (a_k - a_\ell)\,U(k,\ell)}$.

On déduit donc que :

$$[A, U(k,k)] = (a_k - a_k)\,U(k,k) = 0$$

d'où $\boxed{[A, U(k,k)] = 0.}$

3°| Calcul de trace $U(k,\ell)$:

$$\operatorname{tr}\{U(k,\ell)\} = \sum_{m=1}^{n} \langle\varphi_m|U(k,\ell)|\varphi_m\rangle$$

$$\mathrm{tr}\{U(k,\ell)\} = \sum_{m=1}^{n} \langle \varphi_m | U(k,\ell) | \varphi_m \rangle$$

$$= \sum_{m=1}^{n} \langle \varphi_m | \varphi_k \rangle \langle \varphi_\ell | \varphi_m \rangle$$

$$= \sum_{m=1} \delta_{mk} \delta_{\ell m} = \delta_{\ell k}.$$

d'où $\mathrm{tr}\{U(k,\ell)\} = \delta_{\ell k}.$

δ st le symbole de kronecker

4°) Demontrons que :

$$B = \sum_{k,\ell} B_{k\ell} U(k,\ell)$$

$$B = \mathbb{1} B \mathbb{1} \quad \text{(relation de fermeture)}$$

$$B = \sum_{k\ell} |\varphi_k\rangle \underbrace{\langle \varphi_k B | \varphi_\ell \rangle}_{B_{k\ell}} \langle \varphi_\ell |.$$

$$B = \sum_{k,\ell} |\varphi_k\rangle B_{k\ell} \langle \varphi_\ell |.$$

$$\boxed{B = \sum_{k,\ell} B_{k\ell} |\varphi_k\rangle\langle \varphi_\ell| = \sum_{k\ell} B_{k\ell} U(k,\ell)}$$

5°) Montrons que $B_{kl} = tr\{B\,U^+(k,l)\}$.

$$tr\{B\,U^+(k,l)\} = \sum_{s=1}^{n} \langle \varphi_s | B\,U^+(k,l) | \varphi_s \rangle$$

$$= \sum_{s=1}^{n} \langle \varphi_s | B | \varphi_l \rangle \langle \varphi_k | \varphi_s \rangle$$

$$= \sum_{s=1}^{n} B_{sl}\, \delta_{ks}$$

$$\boxed{tr\{B\,U^+(k,l)\} = \delta_{kl}}.$$

Ex 3:

$\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle\}$ Base orthonormée de l'espace des états physique à 3 dimensions

$$|\varphi\rangle = \sqrt{2}\,|u_1\rangle + i\,|u_2\rangle + |u_3\rangle.$$

1°) La norme de $|\varphi\rangle$ est $\sqrt{\langle\varphi|\varphi\rangle}$.

$\langle\varphi|\varphi\rangle = 2 + 1 + 1 = 4$

donc la norme de $|\varphi\rangle$ est 2.

2°/

$$|\phi\rangle = \frac{|\varphi\rangle}{\sqrt{\langle\varphi|\varphi\rangle}} = \frac{1}{\sqrt{\langle\varphi|\varphi\rangle}}|\varphi\rangle$$

$$|\phi\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}|u_1\rangle + \frac{i}{2}|u_2\rangle + \frac{1}{2}|u_3\rangle$$

$$|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|u_1\rangle + \frac{i}{2}|u_2\rangle + \frac{1}{2}|u_3\rangle.$$

3°/

$$P = |\phi\rangle\langle\phi|$$

4°/ Calcul dans $\{u_i(x)\}_{i=1,2,3}$, la matrice de P. sur $|\phi\rangle$.

$$P_{ij} = \langle u_i|P|u_j\rangle = \langle u_i|\phi\rangle\langle\phi|u_j\rangle = a_i a_j^*$$

$i=j \Rightarrow P_{11} = |a_i|^2$

$$P_{11} = \frac{1}{2}, \quad P_{22} = \frac{1}{4}, \quad P_3 = \frac{1}{4}.$$

$i \neq j$

$$P_{12} = \frac{-i}{2\sqrt{2}}, \quad P_{31} = \frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad P_{23} = \frac{i}{4}.$$

$$P_{21} = \frac{i}{2\sqrt{2}}; \quad P_{13} = \frac{1}{2\sqrt{2}}; \quad P_{32} = -\frac{i}{4}$$

$$P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i/\sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ i/\sqrt{2} & \frac{1}{2} & i/2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{2} & 1/2 \end{pmatrix}$$

5°/ l'opérateur P est hermitique.
Car les éléments diagonaux sont réels et les élément non diagonaux sont conjugués les ~~et~~ uns des autres.

$$P^{+}_{ij} = P_{ij}$$