Série 1 : Intégrale de Riemann

Définition : Une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est dite intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$ si, $\forall \varepsilon > 0; \exists \psi, \phi \in \mathcal{E}([a,b];\mathbb{R})$ (l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a,b]$) telles que $\phi \leq f \leq \psi$ et $\int_a^b (\psi - \phi)\, dx \leq \varepsilon$.

Théorème : Une fonction bornée $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est Riemann- intégrable ssi $\mathcal{I}^-(f) = \mathcal{I}^+(f) := \displaystyle\int_a^b f(x)\; dx$. Où

$$\mathcal{I}^-(f) := \sup\left\{ \int_a^b \phi(x)\, dx \;/\; \phi \in \mathcal{E}([a,b];\mathbb{R}),\ \phi \leq f \quad \text{sur } [a,b] \right\}$$

et

$$\mathcal{I}^+(f) := \inf\left\{ \int_a^b \psi(x)\, dx \;/\; \psi \in \mathcal{E}([a,b];\mathbb{R}),\ \psi \geq f \quad \text{sur } [a,b] \right\}.$$

Exercice 1 :

Soit n un entier naturel non nul.

1) Montrer que la fonction $f : x \to E(\frac{1}{x})$ est en escalier sur $[\frac{1}{n}, 1]$.
2) Calculer $\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^1 f(x)dx$.

Exercice 2 :

Montrer qu'une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$ ssi, $\forall \varepsilon > 0; \exists \varphi, \mu \in \mathcal{E}([a,b];\mathbb{R})$ telles que $|f(x) - \varphi(x)| \leq \mu(x)$ et $\int_a^b \mu(x)\; dx \leq \varepsilon$.

Exercice 3 :

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée.

1) Montrer que f est Riemann-intégrable sur $[a,b]$ si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe $\psi_n, \phi_n \in \mathcal{E}([a,b];\mathbb{R})$ telles que
$$\phi_n \leq f \leq \psi_n \quad \text{et} \quad \int_a^b (\psi_n - \phi_n)(x)dx < \frac{1}{n}.$$
2) Montrer que $\displaystyle\int_a^b f(x)\; dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \psi_n(x)\; dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \phi_n(x)\; dx$.

Exercice 4 :

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{p+q} & \text{si } x = \frac{p}{q} \text{ est irréductible} ;\ p,q \in \mathbb{N}^*, \\ 0 & \text{si } x = 0 \text{ ou si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Montrer que f est Riemann-intégrable sur $[0,1]$ et calculer son intégrale.

$$\left(\text{Ind : Prendre} \quad \psi(x) = \begin{cases} \varepsilon & \text{si } x \notin E_n, \\ f(x) & \text{si } x \in E_n, \end{cases} \text{avec} \quad E_n = \left\{ x \in \mathbb{Q} \cap [0,1]; \quad f(x) \geq \frac{1}{n} \right\} \right).$$

Exercice 5 : (Application de l'inégalité de Schwarz)

1) Soit f et g deux fonctions intégrables sur $[0,1]$, on suppose en outre que $fg \geq 1$. Montrer que

$$\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right) \geq 1.$$

2) Étant donné a et b tels que $0 < a < b$. Montrer que

$$\int_a^b \frac{dx}{x} \leq \frac{(b-a)}{\sqrt{ab}}.$$

3) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(\alpha_1, ..., \alpha_n, \beta_1, ..., \beta_n) \in \mathbb{R}^{2n})$, et soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Montrer que si $f$et g sont deux fonctions intégrables sur $[a,b]$, alors

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\beta_i + \int_a^b fg\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 + \int_a^b f^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i^2 + \int_a^b g^2\right).$$

Exercice 6 : (Première formule de la moyenne)

Soit f une fonction continue au voisinage de 0. Montrer que

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2}\int_0^x tf(t)\,dt = \frac{f(0)}{2} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2}\int_x^{2x} \frac{f(t)}{t}\,dt = f(0)\ln(2).$$

Exercice 7 : (Lemme de Riemenn-Lebesgue)

1) Montrer que pour toute fonction en escalier $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(x)\cos(nx)\,dx = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(x)\sin(nx)\,dx = 0.$$

2) En déduire le resultat pour toute fonction intégrable sur $[a,b]$.

Exercice 8 : (Sommes de Riemann)

1) Montrer que les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ et $g(x) = e^x$ sont intégrables sur tout intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ puis calculer les deux intégrales $\int_0^1 f(x)\,dx$ et $\int_0^1 g(x)\,dx$.

2) Calculer les limites des suites définies par le terme géneral suivant :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}\sqrt{\frac{k}{2n+k}}, \qquad v_n = \left(\prod_{k=1}^{n}(1+\frac{k^2}{n^2})\right)^{\frac{1}{n}}, \qquad w_n = \frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n} E(\sqrt{k}).$$

Exercice 9 :

1) En utilisant l'intégration par parties, calculer les intégrales suivantes :

$$A = \int_1^e \frac{\ln(t)}{t^2}\,dt, \qquad B = \int_0^\pi e^t\cos(2t)\,dt.$$

2) En utilisant l'intégration par changement de variable, déterminer les primitives suivantes :

$$E(x) = \int \frac{dx}{x(\ln^2(x)-4)}, \quad F(x) = \int \frac{\sin(x)\,dx}{(\cos^2 x + 2\cos x + 5)^2}, \quad G(x) = \int \frac{e^{3x}+6e^{2x}-e^x}{(e^x-3)^2(e^x-1)}\,dx.$$

Exercice 10 : (Intégrale de Wallis)

Soit $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx$ et $J_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\, dx$

1) Montrer que $I_n = J_n$.

2) Établir une relation de récurrence entre I_n et I_{n+2}.

3) En déduire I_{2p} et I_{2p+1}.

4) Montrer que $(n+1)I_{n+1}I_n = \dfrac{\pi}{2}$ pour tout entier n.

5) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n} = 1$. En déduire qu'au voisinage de l'infini $I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$

Exercice 11 :

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^4+t^2}}\, dt$.

1) Montrer que f est bien définie et impaire.

2) Montrer que $0 \leq f(x) \leq \dfrac{1}{2x}$, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ et en déduire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

3) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, calculer sa dérivée et en déduire les variations de f sur $\mathbb{R}_+^*$.

4) Montrer que $f(x) \leq \ln(2)$, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ et en déduire que f admet une limite finie à droite en 0.

Exercice 12 :

1) Prouver que si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) - \int_0^1 f(x)dx\right) = \frac{f(1)-f(0)}{2}.$$

2) Calculer

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1^k+2^k+\ldots+n^k}{n^{k+1}} - \frac{1}{k+1}\right), \quad k \geq 0.$$

3) Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$. Prouver que

$$\lim_{n\to+\infty} n^2\left[\int_0^1 f(x)dx - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{2i-1}{2n}\right)\right] = \frac{f'(1)-f'(0)}{24}.$$

4) En déduire que

$$\lim_{n\to+\infty} n^2\left(\frac{2}{2n+1} + \frac{2}{2n+3} + \ldots + \frac{2}{4n-1} - \ln 2\right) = -\frac{1}{32}.$$

Exercice 13 : (Facultatif)

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. On suppose qu'il existe deux suites (ψ_n) et (ϕ_n) de fonctions Riemann-intégrables sur $[a,b]$ telles que, pour tout $x \in [a,b]$, on ait

$$\phi_n \leq f \leq \psi_n \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty}\int_a^b (\psi_n - \phi_n)(x)dx = 0.$$

Montrer que f est Riemann-intégrable sur $[a,b]$ et

$$\int_a^b f(x)\ dx = \lim_{n\to+\infty}\int_a^b \psi_n(x)\ dx = \lim_{n\to+\infty}\int_a^b \phi_n(x)\ dx.$$

Exercice 14 : (Facultatif)

1) Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable et soit $g : E \to \mathbb{R}$ (où $f([0,1]) \subset E \subset \mathbb{R}$) une fonction $k-$lipschitzienne. Montrer que la fonction composée gof est intégrable sur $[0,1]$.
2) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, et soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}^+$ une fonction intégrable sur $[a,b]$, montrer que $\sqrt{f}$ est intégrable sur $[a,b]$. (Indication : montrer que $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+, \quad |\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}| \leq \sqrt{|\alpha - \beta|}$.)

Exercice 15 : (Facultatif)

Calculer la limite des suites de terme géneral suivant :

$$u_n = n^{\frac{-3}{2}} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{k}, \quad v_n = n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2 + k^2}, \quad w_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k e^{\frac{-k}{n}}, \quad x_n = \left(\prod_{k=0}^{n-1} (1 + \frac{k}{n}) \right)^{\frac{1}{n}}, \quad y_n = \left(\frac{(2n)!}{n! n^n} \right)^{\frac{1}{n}}.$$

Exercice 16 : (Facultatif)

Calculer les primitives suivantes sur leurs ensembles de définition :

$$\int \frac{x^4 + 3x^3 + x}{(x-1)^3 (x^2 - x + 1)^2} dx, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{4x - x^2}}, \quad \int \frac{x}{(2x+1)\sqrt{x+1}} dx, \quad \int \tan x \, dx,$$

$$\int \frac{1}{\cos^4 x} dx, \quad \int \frac{\cos^3 x}{\sin^5 x} dx, \quad \int \frac{dx}{5 \cosh x + 3 \sinh x + 4}, \quad \int \frac{\cosh x}{2 \cosh x + \sinh x} dx$$

$$\int \frac{\cosh x - 1}{\cosh x + 1} e^x dx, \quad \int \frac{dx}{1 + \tanh x}, \quad \int x \sqrt{-x^2 + 3x - 2} \, dx, \quad \int \frac{x}{\sqrt{x^2 + x + 2}} dx.$$

Exercice 17 : (Facultatif)

Soit F la fonction définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par

$$F(x) = \int_x^{2x} e^{-t^2} dt.$$

1) Calculer $F'(x)$.
2) Calculer $F(0)$ et montrer que la fonction F est impaire.
3) Étudier les variations de F.
4) Montrer que $\lim_{n \to +\infty} F(x) = 0$.
5) Calculer le développement limité de F en 0 à l'ordre 3 et dessiner la courbe de F.

Exercice 18 : (Facultatif)

1) Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^n x^n e^{-nx} dx, \quad \lim_{x \to 0} \int_{3x}^{x} \frac{\cos t}{t} dt, \quad \lim_{R \to +\infty} \int_0^{\frac{\Pi}{2}} e^{-R \sin x} dx.$$

2) Soit f une fonction continue sur $[0,1]$. Calculer

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 \frac{f(x)}{x+n} dx, \quad \lim_{n \to +\infty} \int_0^1 x^n f(x) dx, \quad \lim_{n \to +\infty} \int_0^1 \frac{f(x)}{1+nx} dx.$$

Série n°1 (Analyse 2, SMIA, 2019/2020)

Exercice 8 :

1) Calcul de $\int_0^1 f(x)\,dx$

La fonction f est intégrable au sens de Riemann sur $[0,1]$ car elle est continue sur $[0,1]$, de plus on a : $\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 x^2\,dx = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

avec $S_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^2$

$= \frac{1}{n^3}\sum\limits_{k=0}^{n-1} k^2$

Or $\sum\limits_{k=0}^{n-1} k^2 = 1^2+2^2+\dots+(n-1)^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$

Donc : $\int_0^1 f(x)\,dx = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^3}\frac{n(n-1)(2n-1)}{6} = \frac{1}{3}$.

*) Calcul de $\int_0^1 g(x)\,dx$

La fonction g est continue sur $[0,1]$, elle est donc intégrable au sens de Riemann sur $[0,1]$ et on a :

$\int_0^1 g(x)\,dx = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$, avec

$S_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} e^{\frac{k}{n}}$

$= \frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^k$ (suite géométrique)

$= \frac{1}{n}\cdot\frac{1-\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^n}{1-e^{\frac{1}{n}}}$

d'où :

$\int_0^1 g(x)\,dx = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\frac{1-\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^n}{1-e^{1/n}} = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1-e}{\frac{1-e^{1/n}}{1/n}}$

$= \frac{1-e}{-1} = e-1$.

2) Calcul de $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$:

On a $U_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\sqrt{\frac{k/n}{2+k/n}}$

et la fonction $x \longmapsto \frac{1}{1+x}\sqrt{\frac{x}{2+x}}$ est continue sur $[0,1]$, donc :

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\sqrt{\frac{x}{2+x}}\,dx$

intégrale abélienne de première espèce.

Le changement de variable $t = \sqrt{\frac{x}{2+x}}$ donne

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \int_0^{1/\sqrt{3}}\frac{4t^2\,dt}{(1+t^2)(1-t^2)}$

$= \int_0^{1/\sqrt{3}}\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}-\frac{2}{1+t^2}\right)dt$

$= \ln 2 - 2\arctan\frac{1}{3}$.

*) Calcul de $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$:

$\ln(v_n) = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)$

$\xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \ln(1+x^2)\,dx$

L'intégration par parties donne :

$\lim\limits_{n\to+\infty}\ln(v_n) = \ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2} := \alpha$

c.à.d : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = e^{\alpha}$.

*) Calcul de $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$:

On sait que $\forall x\in\mathbb{R}$: $x-1 < E(x) \leq x$, d'où

$(\forall k\geq 1)$: $\sqrt{k}-1 < E(\sqrt{k}) \leq \sqrt{k}$

$\frac{1}{n\sqrt{n}}(\sqrt{k}-1) < \frac{E(\sqrt{k})}{n\sqrt{n}} \leq \frac{\sqrt{k}}{n\sqrt{n}}$

$\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\sqrt{\frac{k}{n}}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right) < \frac{1}{n\sqrt{n}}\sum\limits_{k=1}^{n}E(\sqrt{k}) \leq \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}}$

$\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}}\right) - \frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{1}{n\sqrt{n}}\sum\limits_{k=1}^{n}E(\sqrt{k}) \leq \left(\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}}\right)$

Comme la fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0,1]$, on déduit que

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}} = \int_0^1\sqrt{x}\,dx = \left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$

et comme de plus $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, par le lemme des gendarmes, on conclut que :

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum\limits_{k=1}^{n}E(\sqrt{k}) = \frac{2}{3}$.

Série n°1 (Analyse 2, SMIA, 2019/2020)

Exercice 9:

1) L'intégration par parties:

*) Calcul de $A=\int_1^e \frac{\ln t}{t^2}\,dt$

Posons $\begin{cases} u(t)=\ln t \\ v'(t)=\frac{1}{t^2}\end{cases}$, d'où $\begin{cases} u'(t)=\frac{1}{t} \\ v(t)=\frac{-1}{t}\end{cases}$

les fonctions u et v sont de classe C^1,

donc $A=\left[-\frac{1}{t}\ln t\right]_1^e+\int_1^e \frac{1}{t^2}\,dt$

$=\frac{-1}{e}+\left[\frac{-1}{t}\right]_1^e=\frac{-1}{e}-\frac{1}{e}+1$

$=1-\frac{2}{e}$

*) Calcul de $B=\int_0^\pi e^t\cos(2t)\,dt$

Posons $\begin{cases} u(t)=e^t \\ v'(t)=\cos(2t)\end{cases}$ d'où $\begin{cases} u'(t)=e^t \\ v(t)=\frac{1}{2}\sin(2t)\end{cases}$

Comme les fonctions u et v sont de C^1

alors $B=\left[\frac{1}{2}\sin(2t)e^t\right]_0^\pi-\frac{1}{2}\int_0^\pi e^t\sin(2t)\,dt$

$=0-\frac{1}{2}\int_0^\pi e^t\sin(2t)\,dt$

Posons $\begin{cases} u(t)=e^t \\ v'(t)=\sin(2t)\end{cases}$, d'où $\begin{cases} u'(t)=e^t \\ v(t)=\frac{-\cos(2t)}{2}\end{cases}$

donc:

$B=\frac{-1}{2}\left(\left[\frac{-1}{2}e^t\cos(2t)\right]_0^\pi+\frac{1}{2}\int_0^\pi e^t\cos(2t)\,dt\right)$

$=\frac{-1}{2}\left(\frac{-1}{2}e^\pi+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}B\right)$

c.à.d: $\frac{5}{4}B=\frac{1}{4}e^\pi-\frac{1}{4}$

donc $B=\frac{e^\pi-1}{5}$

2) L'intégration par changement de variable:

*) La primitive $E(x)=\int\frac{dx}{x(\ln^2x-4)}$

Posons $u=\ln x$, d'où $du=\frac{dx}{x}$, donc

$E(x)=\int\frac{du}{u^2-4}$

La décomposition en éléments simples de la fraction $F(u)=\frac{1}{u^2-4}=\frac{1}{(u-2)(u+2)}$

s'écrit sous la forme:

$F(u)=\frac{a}{u-2}+\frac{b}{u+2}$, avec

$a=(u-2)F(u)/_{u=2}=\frac{1}{4}$

$b=(u+2)F(u)/_{u=-2}=\frac{-1}{4}$

d'où $E(x)=\int\frac{1}{4}\left(\frac{1}{u-2}-\frac{1}{u+2}\right)du$

$=\frac{1}{4}\left(\ln|u-2|-\ln|u+2|\right)+cte$

$=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{u-2}{u+2}\right|+cte$

Donc les primitives de E sont définies sur $]-\infty;e^{-2}[$; $]e^{-2},e^2[$ et sur $]e^2,+\infty[$ par:

$E(x)=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{u-2}{u+2}\right|+cte=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\ln x-2}{\ln x+2}\right|+cte$

*) La primitive F(x):

La fonction $x\longmapsto\frac{\sin x}{(\cos^2x+2\cos x+5)^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc elle admet des primitives définies sur $\mathbb{R}$

Posons $u=\cos x$, d'où $du=-\sin x\,dx$

$F(x)=\int\frac{-du}{(u^2+2u+5)^2}$

écrivons u^2+2u+5 sous la forme canonique: $u^2+2u+5=(u+1)^2+4$, d'où

$F(x)=\int\frac{-du}{((u+1)^2+4)^2}=\frac{-1}{16}\int\frac{du}{\left[\left(\frac{u+1}{2}\right)^2+1\right]^2}$

Posons $t=\frac{u+1}{2}$, d'où $dt=\frac{1}{2}du$

donc, $F(x)=\frac{-1}{8}\int\frac{1}{(t^2+1)^2}\,dt=\frac{-1}{8}J_2$.

pour trouver J_2, on va intégrer par parties J_1:

$J_1=\int\frac{1}{1+t^2}(t)'\,dt=\left[\frac{t}{1+t^2}\right]+2\int\frac{t^2}{(t^2+1)^2}\,dt$

$=\frac{t}{1+t^2}+2\int\frac{t^2+1}{(t^2+1)^2}\,dt-2\int\frac{1}{(t^2+1)^2}\,dt+cte$

$=\frac{t}{1+t^2}+2J_1-2J_2+cte$

Donc, $J_2=\frac{1}{2}J_1+\frac{1}{2}\frac{t}{1+t^2}+cte$

$=\frac{1}{2}\arctan t+\frac{1}{2}\frac{t}{1+t^2}+cte$

c/c: $F(x)=\frac{-1}{16}\left(\arctan\left(\frac{u+2}{2}\right)+\frac{\frac{u+2}{2}}{1+\left(\frac{u+2}{2}\right)^2}\right)+cte$

$F(x)=\frac{-1}{16}\left(\arctan\left(\frac{\cos x+2}{2}\right)+\frac{\frac{\cos x+2}{2}}{1+\left(\frac{\cos x+2}{2}\right)^2}\right)+cte$

*) La primitive $G(x)$:

La fonction $x \longmapsto \frac{e^{3x}+6e^{2x}-e^{x}}{(e^{x}-3)^2(e^{x}-1)}dx$

est définie et continue sur

$]-\infty,0[\cup]0;\ln 3[\cup]\ln 3;+\infty[$

donc elle admet des primitives

sur $]-\infty,0[$; $]0,\ln 3[$ et sur $]\ln 3,+\infty[$.

Posons $u=e^{x}$, d'où $du=e^{x}dx$

$$G(x)=\int\frac{[(e^{x})^2+6e^{x}-1]e^{x}dx}{(e^{x}-3)^2(e^{x}-1)}$$

$$=\int\frac{u^2+6u-1}{(u-3)^2(u-1)}du$$

La décomposition en éléments simples de la fraction $F(u)=\frac{u^2+6u-1}{(u-3)^2(u-1)}$ s'écrit sous la forme :

$$F(u)=\frac{a}{(x-3)^2}+\frac{b}{x-3}+\frac{c}{x-1},$$

avec $a=13$, $b=\frac{-1}{2}$ et $c=\frac{3}{2}$

d'où $G(x)=\frac{-13}{u-3}-\frac{1}{2}\ln|u-3|+\frac{3}{2}\ln|u-1|+cte$

c-à-d :

$$G(x)=\frac{-13}{e^{x}-3}-\frac{1}{2}\ln|e^{x}-3|+\frac{3}{2}\ln|e^{x}-1|+cte$$

Série n°1 (Analyse 2, SMIA, 2019/2020)

Exercice 10:

1) Mq $I_n = J_n$:

On effectue le changement de variable $u = \frac{\pi}{2} - x$, d'où $dx = -du$ on obtient alors:

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(x) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} - \sin^n\left(\frac{\pi}{2} - u\right) du$$

$$= -\int_{\pi/2}^{0} \cos^n(u)\,du = \int_0^{\pi/2} \cos^n(u)\,du = J_n.$$

2) Une relation de recurrence

Soit $n \in \mathbb{N}$, par intégration par parties, les fonctions $t \mapsto \cos t$ et $t \mapsto \sin^{n+1} t$ étant de classe C^1 sur $[0; \frac{\pi}{2}]$, on a :

$$I_{n+2} = \int_0^{\pi/2} \sin t . \sin^{n+1} t = \left[\cos t \sin^{n+1} t\right]_0^{\pi/2}$$

$$- \int_0^{\pi/2} \cos t \,(n+1)(-\cos t \sin^n t)\,dt$$

$$= (n+1)\int_0^{\pi/2} \sin^n t \cos^2 t\,dt$$

$$= (n+1)\int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\,(1 - \sin^2 t)\,dt$$

$$= (n+1)\, I_n - (n+1)\, I_{n+2}$$

On en déduit que $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$ (*)

3) Déduisons I_{2p} et I_{2p+1} :

De la relation de récurrence de la question précédente, on obtient, pour $p \in \mathbb{N}$:

$$I_{2p} = \frac{2p-1}{2p} I_{2p-2} \quad (2p = n+2 \Rightarrow n = 2p-2)$$

$$= \frac{2p-1}{2p} . \frac{2p-3}{2p-2} I_{2p-4}$$

$$= \frac{2p-1}{2p} . \frac{2p-3}{2p-2} . \frac{2p-5}{2p-4} I_{2p-6}$$

$$= \dots$$

$$= \frac{2p-1}{2p} . \frac{2p-3}{2p-2} . \frac{2p-5}{2p-4} \times \dots \times \frac{1}{2} I_0$$

$$= \frac{(2p-1)(2p-3)\times \dots \times 3 \times 1}{(2p)(2p-2)\times \dots \times 4 \times 2} \frac{\pi}{2} \quad \left(I_0 = \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{[(2p-1)(2p-3)\times \dots \times 3\times 1]\times[(2p)(2p-2)\times \dots \times 4\times 2]}{[(2p)(2p-2)\times \dots \times 4 \times 2]^2} \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} \frac{\pi}{2} = \frac{(2p)!}{4^p (p!)^2} \frac{\pi}{2}$$

et de même :

$$I_{2p+1} = \frac{2p}{2p+1} I_{2p-1} = \frac{(2p)(2p-2)}{(2p+1)(2p-1)} I_{2p-3}$$

$$= \dots$$

$$= \frac{(2p)(2p-2)\times \dots \times 4 \times 2}{(2p+1)(2p-1)\times \dots \times 5 \times 3} I_1$$

$$= \frac{[(2p)(2p-2)\times \dots \times 4\times 2]^2}{(2p+1)(2p)(2p-1)\times \dots \times 5\times 4\times 2} \quad (I_1 = 1)$$

$$= \frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!} = \frac{4^p (p!)^2}{(2p+1)!}$$

4) Mq $(n+1) I_{n+1} I_n = \frac{\pi}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $w_n = (n+1) I_{n+1} I_n$, on a

$$w_{n+1} - w_n = (n+2) I_{n+2} I_{n+1} - (n+1) I_{n+1} I_n$$

$$= (n+1) I_n I_{n+1} - (n+1) I_{n+1} I_n \quad (\text{D'après } (*))$$

$$= 0$$

donc (w_n) est une suite constante, de valeur $w_0 = I_0 I_1 = \frac{\pi}{2} . 1 = \frac{\pi}{2}$

c/c : $(\forall n \in \mathbb{N})$: $w_n = (n+1) I_{n+1} I_n = w_0 = \frac{\pi}{2}$

5) Mq $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n} = 1$ et que $I_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $I_{n+2} \leq I_{n+1} \leq I_n$ car la suite $(w_n)_n$ est décroissante.

Comme $I_n > 0$, on en déduit que

$$\frac{n+2}{n+1} = \frac{I_{n+2}}{I_n} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1$$

par passage à la limite, on obtient :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n+2}{n+1} = 1 \leq \lim_{n \to +\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1$$

C-à-d $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n} = 1$, donc $I_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} I_n$.

par suite $w_n \underset{n}{\sim} n I_n^2$, or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = \frac{\pi}{2}$. Ainsi $n I_n^2 \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2}$, on en déduit que $w_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ et que $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$.

Série n°1 (Analyse 2, SMIA, 2019/2020)

Exercice 11:

1) * Vérifions que f est bien définie:

La fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t^4+t^2}}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$.

. si $x>0$, alors $[x,2x] \subset \mathbb{R}^*_+$ et $\int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^4+t^2}}\,dt$ existe en tant qu'intégrale d'une fonction continue sur un segment.

. si $x<0$, alors $[2x,x] \subset \mathbb{R}^*_-$ et $\int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4+t^2}}$ existe pour la même raison.

* Montrons que f est impaire:

Pour étudier la parité d'une fonction définie par une intégrale la méthode générale consiste à effectuer le changement de variable $u=\varphi(t)=-t$ sur l'expression intégrale de $f(-x)$.

. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a $-x \in \mathbb{R}^*$.

. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a:

$$f(-x) = \int_{-x}^{-2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4+t^2}} = \int_x^{2x} \frac{-du}{\sqrt{(-u)^4+(-u)^2}} \quad (u=-t)$$

$$= -\int_x^{2x} \frac{du}{\sqrt{u^4+u^2}} = -f(x)$$

donc f est impaire sur $\mathbb{R}^*$.

2) Mq $\forall x \in \mathbb{R}^*_+ : 0 \leq f(x) \leq \frac{1}{2x}$

Soit $x \in \mathbb{R}^*_+$, pour tout $t \in [x,2x]$, on a

$$0 \leq \frac{1}{\sqrt{t^4+t^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{t^4}} = \frac{1}{t^2}$$

Ainsi, par croissance de l'intégrale, $0 \leq f(x) \leq \int_x^{2x} \frac{1}{t^2}\,dt$, avec $\int_x^{2x} \frac{dt}{t^2} = \left[-\frac{1}{t}\right]_x^{2x}$.

On obtient bien: $0 \leq f(x) \leq \frac{1}{x} - \frac{1}{2x} = \frac{1}{2x}$

Comme $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2x} = 0$, d'après le théorème d'encadrement, on a $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

3) Mq f est de C^1 et calculons $f'(x)$:

La fonction $g : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t^4+t^2}}$ est continue sur $\mathbb{R}^*_+$, elle admet donc une primitive G sur $\mathbb{R}^*_+$.

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}^*_+$,

$f(x) = G(2x) - G(x)$.

G est de classe C^1 en tant que primitive d'une fonction continue sur cette intervalle et par suite, par composition avec la fonction affine $x \mapsto 2x$ et par soustraction, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*_+$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}^*_+$, on a:

$$f'(x) = (G(2x))' - (G(x))' = 2G'(2x) - G'(x)$$

$$= 2g(2x) - g(x) \quad (\text{car } G'(x) = g(x))$$

$$= \frac{2}{\sqrt{16x^4+4x^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^4+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{4x^4+x^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^4+x^2}}$$

Comme pour tout $x \in \mathbb{R}^*_+$, $\sqrt{4x^4+x^2} > \sqrt{x^4+x^2}$, on a $f'(x) < 0$ et on en déduit que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^*_+$.

4)

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*_+$ et tout $t \in [x,2x]$, $\frac{1}{\sqrt{t^4+t^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{t^2}} = \frac{1}{t}$. Ainsi, par croissance de l'intégrale, $f(x) \leq \int_x^{2x} \frac{dt}{t}$ avec $\int_x^{2x} \frac{dt}{t} = [\ln(t)]_x^{2x} = \ln(2x) - \ln(x) = \ln 2$.

c.à.d: $\forall x \in \mathbb{R}^*_+$, $0 \leq f(x) \leq \ln 2$

La fonction f est décroissante et majorée sur $\mathbb{R}^*_+$, donc, par le théorème de la limite montone, $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ existe.

Exercice 12 :

1) Mq $\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) - \int_0^1 f(x)\,dx\right) = \frac{f(1)-f(0)}{2}$

Soit f une fonction de C^1 sur $[0,1]$, considérons une subdivision uniforme $\sigma = (a_i)_{0\leq i\leq n}$ avec $a_i = 0 + \frac{i}{n}(1-0) = \frac{i}{n}$ $\forall i \in \{0,\dots,n\}$ de $[0,1]$.

Observons d'abord que :

$$n\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) - \int_0^1 f(x)\,dx\right)$$
$$= n\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) - \sum_{i=1}^{n}\int_{a_{i-1}}^{a_i} f(x)\,dx\right) \text{ (Chasle)}$$
$$= n\sum_{i=1}^{n}\int_{a_{i-1}}^{a_i}\left(f\left(\frac{i}{n}\right) - f(x)\right)dx$$
$$= n\sum_{i=1}^{n}\int_{a_{i-1}}^{a_i}\left(f(a_i) - f(x)\right)dx$$
$$= n\sum_{i=1}^{n}\int_{a_{i-1}}^{a_i} f'(c_i(x))\,(a_i - x)\,dx \quad (*)$$

la dernière égalité provenant du TAF. Si on pose :

$m_i = \inf\{f'(x) : x\in[a_{i-1};a_i]\}$

$M_i = \sup\{f'(x) : x\in[a_{i-1};a_i]\}$

On obtient :

$$m_i\int_{a_{i-1}}^{a_i}(a_i - x)\,dx \leq \int_{a_{i-1}}^{a_i} f'(c_i(x))(a_i - x)\,dx \leq M_i\int_{a_{i-1}}^{a_i}(a_i - x)\,dx$$

c.à.d :

$$m_i\left[a_i x - \frac{x^2}{2}\right]_{a_{i-1}}^{a_i} \leq \int_{a_{i-1}}^{a_i} \text{---}\,dx \leq M\left[a_i x - \frac{x^2}{2}\right]_{a_{i-1}}^{a_i}$$

or

$$\left[a_i x - \frac{x^2}{2}\right]_{a_{i-1}}^{a_i} = a_i^2 - \frac{a_i^2}{2} - a_i a_{i-1} + \frac{a_{i-1}^2}{2}$$
$$= \frac{1}{2}\left(a_i^2 - 2a_i a_{i-1} + a_{i-1}^2\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(a_i - a_{i-1}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{1}{2n^2}$$

Donc : $\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i}{2n^2} \leq n\sum_{i=1}^{n}\int_{a_{i-1}}^{a_i} f(c_i(x))(a_i - x)\,dx \leq \sum_{i=1}^{n}\frac{M_i}{2n^2}$

c.à.d :

$$\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} m_i \leq n\sum_{i=1}^{n}\int_{a_{i-1}}^{a_i} f'(c_i(x))(a_i - x)\,dx \leq \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} M_i \quad (**)$$

Puisque f' est continue sur $[0,1]$, alors elle est intégrable sur $[0,1]$ et on a :

$$\int_0^1 f'(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_i = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M_i$$

De $(*)$ et $(**)$, on obtient :

$$\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} m_i \leq n\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) - \int_0^1 f(x)\,dx\right) \leq \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} M_i$$

par passage à la limite, on a :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} m_i \leq \lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) - \int_0^1 f(x)\,dx\right) \leq \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} M_i$$

c.à.d :

$$\frac{1}{2}\int_0^1 f'(x)\,dx \leq \lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) - \int_0^1 f(x)\,dx\right) \leq \frac{1}{2}\int_0^1 f'(x)\,dx$$

donc $\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) - \int_0^1 f(x)\,dx\right) = \frac{1}{2}\int_0^1 f'(x)\,dx = \frac{f(1)-f(0)}{2}$.

*) En appliquant alors le resultat obtenu à $f(x) = x^k$, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{1^k + \dots + n^k}{n^{k+1}} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{2}.$$

2) Mq $\lim_{n\to+\infty} n^2\left[\int_0^1 f(x)\,dx - \frac{1}{n}\sum f\left(\frac{2i-1}{2n}\right)\right] = \frac{f'(1)-f'(0)}{24}$

Soit f une fonction de C^2 sur $[0,1]$ et considérons la m̂ subdivision $\sigma = (a_i)_{0\leq i\leq n}$

D'après la formule de Taylor, on a :

$$f(x) - f\left(\frac{2i-1}{2n}\right) = f'\left(\frac{2i-1}{2n}\right)\left(x - \frac{2i-1}{2n}\right) + \frac{1}{2}f''(c_i(x))\left(x - \frac{2i-1}{2n}\right)^2 \text{ d'où}$$

$$n^2\left[\int_0^1 f(x)\,dx - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{2i-1}{2n}\right)\right]$$
$$= n^2\left[\sum_{i=1}^{n}\int_{a_{i-1}}^{a_i} f(x)\,dx - \sum_{i=1}^{n}\int_{a_{i-1}}^{a_i} f\left(\frac{2i-1}{2n}\right)dx\right]$$
$$= n^2\sum_{i=1}^{n}\int_{a_{i-1}}^{a_i}\left(f(x) - f\left(\frac{2i-1}{2n}\right)\right)dx$$
$$= n^2\sum_{i=1}^{n}\int_{a_{i-1}}^{a_i} f'\left(\frac{2i-1}{2n}\right)\left(x - \frac{2i-1}{2n}\right)dx$$
$$+ \frac{n^2}{2}\sum_{i=1}^{n} f''(c_i(x))\left(x - \frac{2i-1}{2n}\right)^2 dx \quad (***)$$

On remarque alors que chacune des intégrales $\int_{a_{i-1}}^{a_i} f'\left(\frac{2i-1}{2n}\right)\left(x - \frac{2i-1}{2n}\right)dx = 0$

Posons $m_i = \inf\{f''(x) : x \in [a_{i-1}, a_i]\}$

et $M_i = \sup\{f''(x) : x \in [a_{i-1}, a_i]\}$.

De (***), on obtient :

$$\frac{1}{24n}\sum_{i=1}^{n} m_i \leq \frac{n^2}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_{a_{i-1}}^{a_i} f''(c_i(x))\left(x - \frac{2i-1}{2n}\right)dx \leq \frac{1}{24n}\sum_{i=1}^{n} M_i$$

Puisque f'' est Riemann intégrable sur $[0,1]$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_i = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M_i = \int_0^1 f''(x)\,dx$.

faisant tendre n vers $+\infty$ dans la dernière inégalité, on obtient le resultat désiré.

*) Posons $f(x) = \frac{1}{1+x}$; $x \in \mathbb{R}_+^*$,

on a $\int_0^1 f(x)\,dx = \left[\ln(1+x)\right]_0^1 = \ln 2$

et $\frac{2}{2n+1} + \dots + \frac{2}{4n-1} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{2i-1}{2n}\right)$,

donc, par application du resultat précédent, on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty} n^2\left(\frac{2}{2n+1} + \dots + \frac{2}{4n-1} - \ln 2\right) = \frac{-1}{32}.$$