

## Série n°2 : Intégrale Généralisée et Équations différentielles.

### Exercice 1.

1. En utilisant les primitives usuelles, déterminer la nature des intégrales suivantes :

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan(x) dx, \quad B = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)}} dx, \quad C = \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-x^2} dx.$$

2. Étudier la nature des intégrales suivantes :

$$A = \int_0^1 \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x}(1-x)} dx, \quad B = \int_1^{+\infty} x^{2020} e^{-x} dx, \quad C = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^4 + 2 - \cos(x)} dx,$$

$$D = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x} dx, \quad E = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x}} dx, \quad F = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(1 + \sin(x)) dx.$$

$$G = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} dx, \quad H = \int_{-\infty}^{-1} \frac{e^{\cos(x)}}{x} dx, \quad I = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} dx, \quad J = \int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx.$$

3. Montrer la convergence et calculer :

$$\int_a^b \frac{dt}{\sqrt{(t-a)(b-t)}} \quad (a < b), \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x) dx.$$

### Exercice 2.

- Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. Montrer que l'intégrale généralisée  $\int_0^1 f(x) \ln x dx$  est absolument convergente.
- Soit  $f : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction positive et décroissante telle que l'intégrale généralisée  $\int_0^{+\infty} f(x) dx$  converge. Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x f(x) = 0$ .
- Soit  $f : [0, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^1$  telle que  $f'$  soit bornée. Montrer que  $\lim_1 f$  existe.

**Exercice 3.** Soit  $f : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue telle que  $\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt$  converge et soient  $a, b > 0$ . Pour tout  $x > 0$ , on pose :

$$F(x) := \int_x^{+\infty} \frac{f(at) - f(bt)}{t} dt \quad \text{et} \quad G(x) := \int_{ax}^{bx} \frac{f(t)}{t} dt.$$

- Montrer que  $F = G$ .
- Montrer que si une fonction  $g : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  est continue et nulle en 0, alors  $\lim_{x \rightarrow 0} \int_{ax}^{bx} \frac{g(t)}{t} dt = 0$ .

3. Dédurre des deux questions précédentes que

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(at) - f(bt)}{t} dt = f(0) \ln \frac{b}{a}.$$

4. Application : montrer que  $\int_0^{+\infty} \frac{\exp(-at) - \exp(-bt)}{t} dt = \ln \frac{b}{a}$ .

**Exercice 4.** Résoudre les équations différentielles suivantes :

(E<sub>1</sub>) :  $(1+x)y' + y - 2 = 0$ ,

(E<sub>2</sub>) :  $y'' - 3y' + 2y = 1 + 2e^x$ .

**Exercice 5.** Résoudre les équations différentielles suivantes :

(Sep) :  $(\cos t)y' = (\sin t)y^4$ ,

(Ber) :  $y' = y + ty^3$ ,

(Ric) :  $y' = (t-1)y + y^2 - t$ , sachant qu'elle admet une solution particulière constante.

**Exercice 6 (facultatif).** Étudier la nature des intégrales suivantes :

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{4x^2+x+1}} dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx, \quad \int_0^{+\infty} 2^{-x}x^4 dx,$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{1-\sqrt{x}}, \quad \int_0^1 \frac{dx}{(\tan x - x)^\alpha}, \quad \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x^\alpha(1-x)^\beta} dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^{\arctan x}} dx.$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha} dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx, \quad \int_0^1 \sin(1/x) dx, \quad \int_0^1 \frac{dx}{\arccos x}, \quad \int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx,$$

$$\int_0^{+\infty} \cos(x^\alpha) dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx, \quad \int_1^{+\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \sin x dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos x}{x^\alpha} dx.$$

**Exercice 7 (facultatif).** Soient  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction localement intégrable, et  $I_n = \int_0^n f(x) dx$ .

On suppose que  $I_n \rightarrow I \in \mathbb{R}$ . Est-il vrai que sous cette hypothèse :

1. Si l'intégrale  $\int_0^{+\infty} f(x) dx$  converge alors  $\int_0^{+\infty} f(x) dx = I$ .
2. Si  $f$  est positive alors l'intégrale  $\int_0^{+\infty} f(x) dx$  converge ?
3. Si  $f$  est positive alors  $\lim_{+\infty} f = 0$  ?
4.  $f$  admet en  $+\infty$  une limite (finie ou infinie), alors l'intégrale  $\int_0^{+\infty} f(x) dx$  converge ?
5. Si  $f$  est dérivable et de dérivée bornée, alors l'intégrale  $\int_0^{+\infty} f(x) dx$  converge ?

**Exercice 8 (facultatif).** Montrer la convergence et calculer :

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}, \quad \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}, \quad \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t+1)(t+2)}, \quad \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1}, \quad \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2} dt$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}, \quad \int_3^{+\infty} \frac{dx}{(x^2-3x+2)^2}, \quad \int_0^{+\infty} e^{-t} \cos t \, dt, \quad \int_4^5 \frac{dt}{\sqrt{(t-4)(5-t)}},$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)(1+t^\alpha)} \, dt, \quad (\alpha \in \mathbb{R}), \quad \int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{1-t}} \, dt, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(a+x^2)(b+x^2)} \quad (a, b > 0).$$

**Exercice 9 (facultatif).** Soit  $I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} \, dt$ .

1. Montrer que  $I$  est convergente.
2. Pour  $\varepsilon > 0$ , établir la relation :

$$\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} \, dt = \int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{e^{-t}}{t} \, dt.$$

3. En déduire le calcul de  $I$  (utiliser la première formule de la moyenne).
4. En déduire le calcul de  $\int_0^1 \frac{x-1}{\ln(x)} \, dx$  (Poser  $x = e^{-t}$ ).

**Exercice 10 (facultatif).** Soit  $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t^3+1)^n}$ , où  $n$  est un entier naturel.

1. Etudier pour quelles valeurs de  $n$  l'intégrale  $I_n$  converge.
2. Calculer  $I_1$ .
3. Montrer que si  $n \geq 2$ , on a :  $I_{n+1} = \frac{3n-1}{3n} I_n$ .
4. En déduire l'expression de  $I_n$ .

**Exercice 11 (facultatif).** Soit  $I = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}(t^2+1)}$ .

1. Montrer que  $I$  est convergente.
2. Calculer  $J = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1}$ .
3. En déduire  $I$  (poser  $x = \sqrt{t}$ ).

**Exercice 12 (facultatif).** En posant  $u(x) = (1+x^2)y(x)$ , résoudre l'équation différentielle suivantes :

$$(E) : \quad (1+x^2)y'' + 4xy' + (1-x^2)y = 0.$$

## Corrigé de la Série n°2

### Exercice 1.

1. \* La nature de  $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan(x) dx$  :

La fonction  $t \mapsto \tan(x)$  est localement intégrable sur  $]0; \frac{\pi}{2}[$  car elle est continue. Il y a donc un problème en  $\frac{\pi}{2}$ .

$$A = \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}} \int_0^t \frac{\sin(x)}{\cos(x)} dx = \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left[ -\ln(|\cos(x)|) \right]_0^t = -\lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}} \ln(|\cos(t)|) = +\infty.$$

Donc, l'intégrale  $A$  est divergente.

\* La nature de  $B = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)}} dx$  :

La fonction  $t \mapsto \frac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)}}$  est localement intégrable sur  $]0; \frac{\pi}{4}]$  (car continue). Pour étudier la convergence de cette intégrale, il suffit de se préoccuper du comportement au voisinage de 0. Soit  $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{4}$ . L'intégrand est de la forme  $\frac{u'}{\sqrt{u}}$  avec  $u = \sin$  donc se primitive en  $2\sqrt{u}$  :

$$B = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ 2\sqrt{\sin(x)} \right]_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{4}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 2\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}} - 2\sqrt{\sin(\varepsilon)} = 2^{\frac{3}{4}},$$

donc l'intégrale  $B$  est convergente et  $B = 2^{\frac{3}{4}}$ .

\* La nature de  $C = \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2} dx$  :

La fonction  $t \mapsto xe^{-x^2}$  est continue sur  $] -\infty, +\infty[$ , donc le problème se pose en  $+\infty$  et en  $-\infty$ . Soit  $c \in \mathbb{R}$ , on a

$$\int_c^{+\infty} xe^{-x^2} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_c^A xe^{-x^2} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[ -\frac{1}{2}e^{-x^2} \right]_c^A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{2}e^{-A^2} + \frac{1}{2}e^{-c^2} = \frac{1}{2}e^{-c^2},$$

et

$$\int_{-\infty}^c xe^{-x^2} dx = \lim_{A \rightarrow -\infty} \int_A^c xe^{-x^2} dx = \lim_{A \rightarrow -\infty} \left[ -\frac{1}{2}e^{-x^2} \right]_A^c = -\frac{1}{2}e^{-c^2} + \lim_{A \rightarrow -\infty} \frac{1}{2}e^{-A^2} = -\frac{1}{2}e^{-c^2}.$$

Donc, les deux intégrales  $\int_c^{+\infty} xe^{-x^2} dx$  et  $\int_{-\infty}^c xe^{-x^2} dx$  sont convergentes. Par suite, l'intégrale  $B$  est convergente et on a

$$B = \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^0 xe^{-x^2} dx + \int_0^{+\infty} xe^{-x^2} dx = 0.$$

2. \* La nature de l'intégrale  $A = \int_0^1 \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x}(1-x)} dx$  :

La fonction  $x \mapsto \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x}(1-x)}$  est continue sur  $]0, 1[$ , donc localement intégrable. Soit  $0 < c < 1$ .

– Au voisinage de 0 on a :  $\frac{x^2 + 1}{\sqrt{x}(1-x)} \underset{0^+}{\sim} \frac{1}{\sqrt{x}}$  et  $\int_0^c \frac{1}{\sqrt{x}} dx$  est une intégrale de Riemann convergente (car  $\alpha = \frac{1}{2} < 1$ ), par le critère de comparaison, l'intégrale  $\int_0^c \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x}(1-x)} dx$  converge.

– Au voisinage de 1 on a :  $\frac{x^2 + 1}{\sqrt{x}(1-x)} \underset{1^-}{\sim} \frac{2}{1-x}$  et  $\int_c^1 \frac{2}{1-x} dx$  est une intégrale de Riemann divergente (car  $\alpha = 1 \geq 1$ ), par le critère de comparaison, l'intégrale  $\int_c^1 \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x}(1-x)} dx$  diverge.

Conclusion : l'intégrale  $\int_0^1 \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x}(1-x)} dx$  diverge (CV+DV=DV).

\* La nature de l'intégrale  $B = \int_1^{+\infty} x^{2020} e^{-x} dx$  :

La fonction  $x \mapsto x^{2020} e^{-x}$  est continue (donc localement intégrable) sur  $[1, +\infty[$ . D'où le problème se pose en  $+\infty$ . Puisque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 (x^{2020} e^{-x}) = 0$ , d'après les règles de Riemann ( $\alpha = 2 > 1$ ), l'intégrale  $B$  converge.

\* La nature de l'intégrale  $C = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^4 + 2 - \cos(x)} dx$  :

La fonction  $x \mapsto \frac{x^2}{x^4 + 2 - \cos(x)}$  est paire et localement intégrable sur  $] -\infty, +\infty[$ , donc les deux intégrales  $C = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^4 + 2 - \cos(x)} dx$  et  $C' = \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^4 + 2 - \cos(x)} dx$  sont de même nature (dans le cas de convergence on a  $C = 2C'$ ).

Au voisinage de  $+\infty$  on a :  $\frac{x^2}{x^4 + 2 - \cos(x)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}$  et  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$  est une intégrale de Riemann convergente ( $\alpha = 2 > 1$ ). Donc, d'après le critère de comparaison, l'intégrale  $C'$  converge, par suite l'intégrale  $C$  converge.

\* La nature de l'intégrale  $D = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x} dx$  :

La fonction  $x \mapsto \frac{\sin^2(x)}{x}$  est continue sur  $]0, +\infty[$ , il y a donc deux problèmes en 0 et en  $+\infty$ . Soit  $c \in ]0, +\infty[$ .

– L'intégrale  $D_1 := \int_0^c \frac{\sin^2(x)}{x} dx$  est convergente car la fonction  $x \mapsto \frac{\sin^2(x)}{x}$  admet une limite finie en 0  $\left( \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin(x) \frac{\sin(x)}{x} = 0 \times 1 = 0 \right)$ .

– Pour l'intégrale  $D_2 := \int_c^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x} dx$  on a

$$D_2 = \int_c^{+\infty} \frac{1 - \cos(2x)}{2x} dx = \int_c^{+\infty} \frac{1}{2x} dx - \int_c^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{2x} dx := D'_2 + D''_2$$

+  $D'_2$  est une intégrale de Riemann divergente ( $\alpha = 1 \leq 1$ ).

+ Pour  $D_2''$  on va utiliser l'intégration par parties :

$$D_2'' = \left[ \frac{-\sin(2x)}{4x^2} \right]_c^{+\infty} + \int_c^{+\infty} \frac{\sin(2x)}{4x^2} dx = \frac{\sin(2c)}{4c^2} + \frac{1}{4} \int_c^{+\infty} \frac{\sin(2x)}{x^2} dx.$$

Comme  $\left| \frac{\sin(2x)}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}$  et  $\int_c^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$  est une intégrale de Riemann convergente, alors  $D_2''$  est convergente, par suite  $D_2$  diverge.

Conclusion : l'intégrale  $D = D_1 + D_2$  diverge (CV+DV=DV).

\* La nature de l'intégrale  $E = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x}} dx$  :

La fonction  $t \mapsto \frac{e^{-\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x}}$  est continue sur  $]0, +\infty[$ , le problème se pose donc en 0 et en  $+\infty$ .

Soit  $c > 0$ ,

– Au voisinage de 0 on a :  $\frac{e^{-\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x}} \underset{0^+}{\sim} \frac{e^{-1}}{\sqrt{x}}$  et  $\int_0^c \frac{e^{-1}}{\sqrt{x}} dx$  est une intégrale de Riemann convergente ( $\alpha = \frac{1}{2} < 1$ ), donc d'après le critère de comparaison  $E_1 = \int_0^c \frac{e^{-\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x}} dx$  est convergente.

– Pour  $x \geq c$  on a  $\frac{e^{-\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x}} \leq \frac{e^{-x}}{\sqrt{c}}$  et  $\int_c^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{c}} dx$  converge (voir le cours), d'où d'après le critère de comparaison  $E_2 = \int_c^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x}} dx$  est convergente.

Conclusion : l'intégrale  $E = E_1 + E_2$  converge.

\* La nature de l'intégrale  $F = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(1 + \sin(x)) dx$  :

La fonction  $t \mapsto \ln(1 + \sin(x))$  est continue sur  $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ , le problème se pose donc en  $-\frac{\pi}{2}$ .

Cherchons un équivalent de  $\ln(1 + \sin(x))$  au voisinage de  $-\frac{\pi}{2}$ . Posons  $u = x + \frac{\pi}{2}$ , donc

$$\ln(1 + \sin(x)) = \ln(1 - \cos(u)) = \ln\left(\frac{u^2}{2} + o(u^2)\right) = 2 \ln(u) \left(1 + \frac{\ln(\frac{1}{2} + o(1))}{2 \ln(u)}\right) \underset{0^+}{\sim} 2 \ln(u).$$

Comme  $\int_0^1 \ln(x) dx$  converge (voir le cours), d'après le critère d'équivalence, l'intégrale  $F$  est convergente.

\* La nature de l'intégrale  $G = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} dx$  :

La fonction  $x \mapsto \frac{1 - \cos(x)}{x^2}$  est continue sur  $]0, +\infty[$ , il y a donc deux problèmes en 0 et en  $+\infty$ . Soit  $c \in ]0, +\infty[$ .

– L'intégrale  $G_1 := \int_0^c \frac{1 - \cos(x)}{x^2} dx$  est convergente car la fonction  $x \mapsto \frac{1 - \cos(x)}{x^2}$  admet une limite finie en 0  $\left( \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2} \right)$ .

– Puisque  $|\cos x| \leq 1$ , alors

$$\left| \frac{1 - \cos(x)}{x^2} \right| \leq \frac{1 + |\cos(x)|}{x^2} \leq \frac{2}{x^2}, \quad \forall x \in [c, +\infty[.$$

Comme  $\int_c^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$  est une intégrale de Riemann convergente ( $\alpha = 2 > 1$ ), par le critère de comparaison, l'intégrale  $G_2 := \int_c^{+\infty} \frac{1 - \cos(x)}{x^2}$  est convergente.

Conclusion : l'intégrale  $G = G_1 + G_2$  est convergente (CV+CV=CV).

\* La nature de l'intégrale  $H = \int_{-\infty}^{-1} \frac{e^{\cos(x)}}{x} dx$  :

La fonction  $x \mapsto \frac{e^{\cos(x)}}{x}$  est continue sur  $] -\infty, -1]$ , il suffit donc d'étudier le comportement au voisinage de  $-\infty$ . Puisque  $-1 \leq \cos x \leq 1$ , on a  $e^{-1} \leq e^{\cos x} \leq e$  et donc

$$\left| \frac{e^{\cos(x)}}{x} \right| = \frac{e^{\cos(x)}}{|x|} \geq \frac{e^{-1}}{|x|} = \frac{e^{-1}}{-x}, \quad \forall x \in ] -\infty, -1].$$

Comme  $\int_{-\infty}^{-1} \frac{e^{-1}}{x} dx$  est une intégrale de Riemann divergente ( $\alpha = 1 \leq 1$ ), par le critère de comparaison, l'intégrale  $H$  est divergente.

\* La nature de l'intégrale  $I = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} dx$  :

La fonction  $x \mapsto \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}$  est continue sur  $]0, +\infty[$ , il y a donc deux problèmes en 0 et en  $+\infty$ . Soit  $c \in ]0, +\infty[$ .

– L'intégrale  $I_1 := \int_0^c \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} dx$  est convergente. En effet, puisque  $|\cos x| \leq 1$ , alors

$$\left| \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} \right| \leq \frac{|\cos(x)|}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad \forall x \in ]0, c].$$

Comme  $\int_0^c \frac{dx}{\sqrt{x}}$  est une intégrale de Riemann convergente ( $\alpha = \frac{1}{2} < 1$ ), par le critère de comparaison, l'intégrale  $I_1$  est convergente.

– D'après le critère d'Abel, l'intégrale  $I_2 := \int_c^{+\infty} \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} dx$  est convergente. En effet, la fonction  $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$  garde un signe constant, décroissante et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$ . D'autre part, pour tout

$t \in [c, +\infty[$ : On a  $\left| \int_c^t \cos(x) dx \right| \leq 2$ .

Conclusion : l'intégrale  $I = I_1 + I_2$  est convergente (CV+CV=CV).

\* La nature de l'intégrale  $J = \int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx$  :

En faisant le changement de variable  $u = x^2$  on obtient  $J = \frac{1}{2}I$ . Comme l'intégrale  $I$  est convergente, alors  $J$  l'est aussi.

3. \* La convergence et le calcul de  $A = \int_a^b \frac{dt}{\sqrt{(t-a)(b-t)}} \quad (a < b)$  :

La fonction  $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{(t-a)(b-t)}}$  est localement intégrable (car continue) sur  $]a, b[$ . Il y a donc deux problèmes en  $a$  et en  $b$ . Or

$$\frac{1}{\sqrt{(t-a)(b-t)}} \underset{a^+}{\sim} \frac{1}{\sqrt{(t-a)(b-a)}} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\sqrt{(t-a)(b-t)}} \underset{b^-}{\sim} \frac{1}{\sqrt{(b-a)(b-t)}},$$

et  $\int_a^b \frac{dt}{\sqrt{t-a}}$ ,  $\int_a^b \frac{dt}{\sqrt{b-t}}$  sont deux intégrales de Riemann convergentes ( $\alpha = \frac{1}{2} < 1$ ), alors l'intégrale  $A$  est convergente.

Pour le calcul, on remarque que  $A$  a la forme d'une intégrale abélienne de deuxième espèce. On a

$$\begin{aligned} (t-a)(b-t) &= -t^2 + (a+b)t - ab \\ &= -\left(t - \frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \quad (\text{la forme canonique}) \\ &= \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \left[1 - \left(\frac{2t}{b-a} - \frac{a+b}{b-a}\right)^2\right]. \end{aligned}$$

$$\text{Alors, } \frac{1}{\sqrt{(t-a)(b-t)}} = \frac{2}{b-a} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{2t}{b-a} - \frac{a+b}{b-a}\right)^2}}.$$

Effectuons le changement de variable  $u = \frac{2t}{b-a} - \frac{a+b}{b-a}$ , on trouve

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} \\ &= 2 \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} \quad (u \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \text{ est paire}) \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow 1^-} \left[ \arcsin u \right]_0^x \\ &= \pi. \end{aligned}$$

\* La convergence et le calcul de  $B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x) dx$ .

La fonction  $x \mapsto \ln(\sin x)$  est localement intégrable (car continue) sur  $]0, \frac{\pi}{2}[$ . De plus, lorsque  $x \rightarrow 0^+$ , on a

$$\ln(\sin x) = \ln(x + o(x)) = \ln(x) + \ln(1 + o(1)) \underset{0^+}{\sim} \ln x.$$

Comme  $\int_0^1 \ln(x) dx$  converge (voir le cours), d'après le critère d'équivalence, l'intégrale  $B' := \int_0^1 \ln(\sin x) dx$  est convergente. Or  $B = B' + \int_1^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x) dx$  et  $\int_1^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x) dx$  converge car la fonction  $x \mapsto \ln(\sin x)$  est continue sur le compact  $[1, \frac{\pi}{2}]$ , donc  $B$  est convergente.

Pour le calcul, de  $\sin x = 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right)$  on obtient

$$\begin{aligned}
 B &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right) dx \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(\frac{x}{2}\right) dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\left(\frac{x}{2}\right) dx \\
 &= \frac{\pi \ln 2}{2} + 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x) dx + 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(x) dx \quad (\text{poser } u = \frac{\pi}{2} - x) \\
 &= \frac{\pi \ln 2}{2} + 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x) dx + 2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(u) du \quad (\text{Relation de Chasle}) \\
 &= \frac{\pi \ln 2}{2} + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) dx \\
 &= \frac{\pi \ln 2}{2} + 2B.
 \end{aligned}$$

D'où  $B = -\frac{\pi \ln 2}{2}$ .