

Fonctions Riemann intégrables

Dimanche 05 avril 2020

1 Fonctions en escalier

1.1 Subdivisions

Une subdivision d'un intervalle $[a, b]$ ($-\infty < a < b < +\infty$) est une famille finie $S = \{x_0; x_1; \dots; x_n\}$ de réels tels que $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$. On appelle diamètre de la subdivision S la quantité:

$$\delta(S) = \max \{x_{i+1} - x_i : i = 0, 1, 2, \dots, n-1\}$$

Une subdivision S_1 de $[a; b]$ est dite plus fine qu'une subdivision S_0 de $[a; b]$ si $S_1 \subset S_0$. Cela veut dire que S_0 découpe $[a; b]$ en plus de morceaux. En particulier dans ce cas, on a évidemment $\delta(S_1) \geq \delta(S_0)$.

Exemple 1.1 Soient $[a, b] \subset \mathbb{R}$ et $n \geq 1$ alors

$$S_n = \left\{ x_0 = a, x_1 = a + \frac{b-a}{n}, \dots, x_k = a + k \frac{b-a}{n}, \dots, x_n = b \right\}$$

est une subdivision de $[a, b]$ dont le diamètre est $\delta(S_n) = \frac{b-a}{n}$

1.2 Fonctions en escalier

Définition 1.1 On dit qu'une fonction f sur $[a, b]$ est en escalier, s'il existe une subdivision $S = \{x_0; x_1; \dots; x_n\}$ de $[a, b]$ telle que

$$f(t) = c_i \in \mathbb{R}, \forall t \in]x_i, x_{i+1}[, i = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

On dira que S est une subdivision associée à f .

Remarquez qu'on ne parle que des intervalles ouverts, rien n'est imposé sur les points x_i , on peut bien avoir de la continuité à droite ou à gauche en certain de ces points, etc...

Exemple 1.2 soit $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par,

$$f_n(x) = \begin{cases} x_i & \text{si } x_i < x < x_{i+1} \\ 1 & \text{si } x = x_i, i = 0, 1; \dots, n \end{cases}$$

où pour tout $n \geq 1$, les x_i sont les points de la subdivision de $[0, 1]$ donnée par

$$S_n = \left\{ x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{n}, \dots, x_k = \frac{k}{n}, \dots, x_n = 1 \right\}$$

Proposition 1.1 Soient f et g deux fonctions en escalier sur $[a, b]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $|f|$, $f + g$, λf et fg sont des fonctions en escalier sur $[a, b]$.

Preuve. Si S_0 et S_1 sont des subdivisions associées à f et g respectivement alors $S = S_0 \cup S_1$ est associée à f et à g . On peut donc supposer que f et g sont en escalier sur la même subdivision $S = (x_i)_{0 \leq i \leq n}$. Ainsi f et g sont constantes, égales respectivement à c_i et d_i sur chaque intervalle $]x_i, x_{i+1}[$. Donc $|f|$, λf , $f + g$ et fg sont égales à $|c_i|$, λc_i , $c_i + d_i$ et $c_i d_i$ sur $]x_i, x_{i+1}[$. D'où la proposition. ■

1.3 Intégrales de fonctions en escalier

Définition 1.2 Soit f une fonction en escalier sur $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $S = (x_i)_{0 \leq i \leq n}$ une subdivision associée à f : c'est-à-dire f est égale à c_i sur chaque intervalle $]x_i, x_{i+1}[$, on note $I_S(f)$ la surface algébrique de la famille de rectangles sous la courbe de f :

$$I_S(f) = \sum_{i=0}^{i=n-1} c_i (x_{i+1} - x_i)$$

Proposition 1.2 La quantité $I_S(f)$ ne dépend pas du choix de la subdivision S associée à f , elle ne dépend que de f et de $[a, b]$.

Preuve. Considérons deux subdivisions $S = (x_i)_{0 \leq i \leq n}$ et $S' = (y_j)_{0 \leq j \leq m}$ associées à f .

1^{er} cas $S \subset S'$. Sur chaque intervalle $]x_i; x_{i+1}[$ la fonction f est constante égale à c_i . Mais cet intervalle se découpe en union de certains intervalles $]y_k; y_{k+1}[$, $k = l_0, l_0+1, l_0+2, \dots, l_1$ où f prend des valeurs d_l qui sont forcément toutes égales à c_i . Donc

$$\sum_{l=l_0}^{l=l_1-1} d_l (y_{l+1} - y_l) = \sum_{l=l_0}^{l=l_1-1} c_i (y_{l+1} - y_l) = c_i \sum_{l=l_0}^{l=l_1-1} (y_{l+1} - y_l) = c_i (x_{i+1} - x_i)$$

En faisant la somme sur tous les $i = 0; 1, 2, \dots, n - 1$ on aura

$$\sum_{l=0}^{l=m-1} d_l (y_{l+1} - y_l) = \sum_{i=0}^{i=n-1} c_i (x_{i+1} - x_i)$$

Ainsi, dans ce cas, $I_{S'}(f) = I_S(f)$.

2^{ieme} cas si S et S' sont quelconques, associées à f alors $S'' = S \cup S'$ est une subdivision associée à f vérifiant $S \subset S''$ et $S' \subset S''$. D'après le cas premier, on a:

$$I_S(f) = I_{S''}(f) = I_{S'}(f)$$

■

Cette quantité qui ne dépend donc que de f et de $[a, b]$ est notée

$$\int_a^b f(t)dt$$

et appelée l'intégrale de f entre a et b .

Proposition 1.3 Soient f et g deux fonctions en escalier sur $[a, b]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Alors:

$$1) \int_a^b \lambda f(t)dt = \lambda \int_a^b f(t)dt$$

$$2) \int_a^b (f + g)(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt$$

En d'autre termes: $\chi : f \mapsto \chi(f) = \int_a^b f(t)dt$ est une forme linéaire sur l'espace vectorielle des fonctions en escalier sur $[a, b]$.

Preuve. 1) Si $S = (x_j)_{0 \leq j \leq n}$ est une subdivision associée à f alors elle l'est à λf aussi. Si f prenait les valeurs c_i sur les intervalles $]x_i; x_{i+1}[$ alors λf prend les valeurs λc_i sur ces mêmes intervalles. On obtient donc

$$\int_a^b \lambda f(t) dt = \sum_{i=0}^{i=n-1} \lambda c_i (x_{i+1} - x_i) = \lambda \sum_{i=0}^{i=n-1} c_i (x_{i+1} - x_i) = \lambda \int_a^b f(t) dt$$

2) Soit $S = (x_j)_{0 \leq j \leq n}$ une subdivision associée à f et à g . Chacune de ces fonctions vaut c_i et d_i respectivement sur les intervalles $]x_i; x_{i+1}[$. Ainsi $f + g$ vaut $c_i + d_i$ sur ces intervalles et on aura

$$\begin{aligned} \int_a^b (f + g)(t) dt &= \sum_{i=0}^{i=n-1} (c_i + d_i) (x_{i+1} - x_i) \\ &= \sum_{i=0}^{i=n-1} \lambda c_i (x_{i+1} - x_i) + \sum_{i=0}^{i=n-1} d_i (x_{i+1} - x_i) \\ &= \int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt \end{aligned}$$

■

Proposition 1.4 Soient f et g deux fonctions en escalier sur $[a; b]$.

1) Si f est positive sur tout $[a, b]$ alors

$$\int_a^b f(t) dt \geq 0$$

2) Si $f \geq g$ sur tout $[a, b]$ alors

$$\int_a^b f(t) dt \geq \int_a^b g(t) dt$$

3) On a

$$\int_a^b |f(t)| dt \geq \left| \int_a^b f(t) dt \right|$$

Preuve. 1) Soit $S = (x_j)_{0 \leq j \leq n}$ une subdivision associée à f alors toutes les valeurs c_i de f sur $]x_i; x_{i+1}[$ sont positives. Comme les $x_{i+1} - x_i$ sont tous positifs, donc

$$\int_a^b f(t)dt = \sum_{i=0}^{i=n-1} c_i (x_{i+1} - x_i) \geq 0$$

2) Il suffit d'appliquer 1) à $f - g$.

3) Tout $x \in [a, b]$ vérifie, $|f(x)| \geq f(x) \geq -|f(x)|$ l'assertion 2) implique

$$\int_a^b |f(x)|dt \geq \int_a^b f(t)dt \geq - \int_a^b |f(x)|dt$$

D'où

$$\int_a^b |f(t)|dt \geq \left| \int_a^b f(t)dt \right|$$

■

2 Fonctions Riemann-intégrables

2.1 Définitions

Soit f une fonction définie et bornée sur $[a, b] \subset \mathbb{R}$. On note

$$E_-(f) = \{\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ telle que } \varphi \text{ en escalier et } \varphi \leq f\}$$

$$E_+(f) = \{\psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ telle que } \psi \text{ en escalier et } f \leq \psi\}$$

$$I_-(f) = \left\{ \int_a^b \varphi(t)dt : \varphi \in E_-(f) \right\}$$

$$I_+(f) = \left\{ \int_a^b \psi(t)dt : \psi \in E_+(f) \right\}$$

Comme f est bornée, donc

$$m = \min \{f(x) : x \in [a, b]\} \text{ et } M = \sup \{f(x) : x \in [a, b]\}$$

existent bien dans \mathbb{R} et les fonctions $m : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ et $M : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ définies par $m(x) = m$ et $M(x) = M$ vérifient $m \leq f \leq M$. Donc $m \in E_-(f)$ et $M \in E_+(f)$. Ainsi

$$m(b-a) = \int_a^b m dt \in I_-(f) \Rightarrow I_-(f) \neq \emptyset$$

et

$$M(b-a) = \int_a^b M dt \in I_+(f) \Rightarrow I_+(f) \neq \emptyset$$

Clairement $M(b-a)$ est un majorant de $I_-(f)$ et $m(b-a)$ est un minorant de $I_+(f)$. Donc

$$i_a^b(f) = \sup(I_-(f)) \quad \text{et} \quad I_a^b(f) = \inf(I_+(f))$$

existent dans \mathbb{R} et vérifient évidemment:

$$i_a^b(f) \leq I_a^b(f)$$

Définition 2.1 On dit qu'une fonction bornée f sur $[a, b]$ est intégrable au sens de Riemann si $i_a^b(f) = I_a^b(f)$. Cette valeur commune est notée

$$\int_a^b f(t) dt$$

et appelée intégrale de f entre a et b .

En analyse réelle, il est souvent utile de ramener un problème à une propriété séquentielle convenable par exemple *une fonction f est continue en un point a si et seulement si, pour toute suite $(x_n)_n$ convergente vers a sa suite image $(f(x_n))_n$ converge vers $f(a)$* . C'est le cas de la définition précédente

Théorème 2.1 Une fonction f définie et bornée sur $[a, b]$ est intégrable sur $[a, b]$ si et seulement si il existe deux suites $(\varphi_n)_n$ et $(\psi_n)_n$ de fonctions en escalier telles que

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi \leq_n f \leq \psi_n \quad \forall n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b (\psi_n - \varphi_n)(t) dt = 0 \end{array} \right.$$

Dans ce cas on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b \psi_n(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b \varphi_n(t) dt$ et cette limite commune est $\int_a^b f(t) dt$.

Preuve. Supposons que $i_a^b(f) = I_a^b(f) = \int_a^b f(t) dt$. Par définition de la borne inférieure et supérieure on a

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \varphi \in E_-(f) \quad \int_a^b \varphi(t) dt \leq i_a^b(f) \\ \forall \varepsilon > 0, \exists \varphi_\varepsilon \in E_-(f) \quad i_a^b(f) - \varepsilon < \int_a^b \varphi_\varepsilon(t) dt \end{array} \right.$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \psi \in E_+(f) \quad \int_a^b \psi(t) dt \geq I_a^b(f) \\ \forall \varepsilon > 0, \exists \varphi_\varepsilon \in E_+(f) \quad I_a^b(f) + \varepsilon > \int_a^b \varphi_\varepsilon(t) dt \end{array} \right.$$

Ainsi pour $\varepsilon = \frac{1}{n}$, $n \geq 1$ il existe alors deux fonctions $\varphi_n \in E_-(f)$ et $\psi_n \in E_+(f)$ telles que

$$i_a^b(f) - \frac{1}{n} < \int_a^b \varphi_n(t) dt \leq i_a^b(f)$$

$$I_a^b(f) \leq \int_a^b \psi_n(t) dt < I_a^b(f) + \frac{1}{n}$$

Si on fait tendre n vers l'infini, on aura

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b \varphi_n(t) dt = i_a^b(f) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b \psi_n(t) dt = I_a^b(f)$$

Par construction, les fonctions φ_n et ψ_n sont bien en escalier et satisfont $\varphi_n \leq f \leq \psi_n$. Ainsi la preuve dans un sens est faite.

Réciproquement,, si il existe deux suites $(\varphi_n)_n$ et $(\psi_n)_n$ telles que

$$\varphi_n \leq f \leq \psi_n, \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b (\psi_n - \varphi_n)(t) dt = 0$$

alors comme on a

$$\int_a^b \varphi_n(t) dt \leq i_a^b(f) \leq I_a^b(f) \leq \int_a^b \psi_n(t) dt$$

on en déduit que

$$0 \leq I_a^b(f) - i_a^b(f) \leq \int_a^b (\psi_n(t) - \varphi_n(t)) dt$$

Ce qui montre que $I_a^b(f) = i_a^b(f)$. De plus on a:

$$0 \leq i_a^b(f) - \int_a^b \varphi_n(t) dt \leq \int_a^b (\psi_n(t) - \varphi_n(t)) dt$$

et

$$0 \leq \int_a^b \psi_n(t) - I_a^b(f) \leq \int_a^b (\psi_n(t) - \varphi_n(t)) dt$$

Il suffit alors de faire tendre n vers l'infini pour conclure. ■

Exemple 2.1 • Soit f la fonction sur l'intervalle $[0; 1]$ qui est définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{si } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

Soient $\varphi \in E_-(f)$ et $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ une subdivision associée à φ , donc

$$\varphi \leq f \text{ et } \varphi(t) = c_i, \forall t \in]x_i, x_{i+1}[$$

Or pour $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$, $\mathbb{Q} \cap]x_i, x_{i+1}[\neq \emptyset$, donc si a est dans cette intersection non vide alors on aura

$$c_i = \varphi(a) \leq f(a) = 0$$

Puisque tous les $x_{i+1} - x_i$ sont positifs, donc

$$\int_a^b \varphi(t) dt = \sum_{i=0}^{i=n-1} c_i (x_{i+1} - x_i) \leq 0$$

Donc $i_0^1(f) \leq 0$

De même si $\psi \in E_+(f)$ et $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ une subdivision associée à ψ , alors

$$f \leq \psi \text{ et } \psi(t) = d_i, \forall t \in]x_i, x_{i+1}[$$

$\forall i \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$, $(\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cap]x_i, x_{i+1}[\neq \emptyset$, Soit un élément de cette intersection non vide, il vérifie donc

$$1 = f(b) \leq \psi(b) = d_i \Rightarrow d_i (x_{i+1} - x_i) \geq (x_{i+1} - x_i)$$

donc

$$\int_a^b \psi(t) dt = \sum_{i=0}^{i=n-1} d_i (x_{i+1} - x_i) \geq \sum_{i=0}^{i=n-1} (x_{i+1} - x_i) = x_n - x_0 = 1$$

Ainsi $I_0^1(f) \geq 1$.

Conclusion: $i_0^1(f) \leq 0 < 1 \leq I_0^1(f) \Rightarrow i_0^1(f) \neq I_0^1(f)$ f n'est donc pas Riemann intégrable sur $[0, 1]$

• Montrons à l'aide du théoème caractéristique ci-dessus (qu'on peut considérer comme définition), que la fonction $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que: $f(x) = ax$ pour un certain $a \in \mathbb{R}_+^*$ est intégrable sur $[0, 1]$.

Pour tou $n \geq 1$, on considère la subdivision de $[0, 1]$ telle que

$$S_n = \left\{ x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{n}, \dots, x_k = \frac{k}{n}, \dots, x_n = 1 \right\}$$

qui va être associée aux fonctions en escalier définies par

$$\varphi_n(t) = ax_i, \psi_n(t) = ax_{i+1}, \forall t \in]x_i, x_{i+1}[, i = 0, 1, \dots, n-1$$

$$\varphi_n(x_i) = 0, \psi_n(x_i) = a, i = 0, 1, \dots, n-1$$

Puisque f es strictement croissante, donc

$$\varphi_n \leq f \leq \psi_n$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \varphi_n(t) dt &= \sum_{i=0}^{n-1} ax_i (x_{i+1} - x_i) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} a \frac{i}{n} \frac{1}{n} \\ &= \frac{a}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} i \\ &= \frac{a}{n^2} \frac{n(n-1)}{2} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \int_0^1 \psi_n(t) dt &= \sum_{i=0}^{n-1} ax_{i+1} (x_{i+1} - x_i) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} a \frac{i+1}{n} \frac{1}{n} \\ &= \frac{a}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} i+1 \\ &= \frac{a}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

D'où

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \varphi_n(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \psi_n(t) dt = \frac{a}{2}$$

Ainsi f est intégrable sur $[0, 1]$ et son intégrale vaut $\int_0^1 (at) dt = \frac{a}{2}$.

2.2 Opérations sur les fonctions intégrables

Proposition 2.1 *Si f et g sont deux fonctions bornées et intégrables sur $[a, b]$ et si $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors λf et $f + g$ sont intégrables sur $[a, b]$ et*

$$\int_a^b \lambda f(t) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt$$

$$\int_a^b (f + g)(t) dt = \int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt$$

Preuve. Comme f et g sont intégrables on sait qu'il existe des suites $(\varphi_n)_{n \geq 1}$, $(\psi_n)_{n \geq 1}$, $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(v_n)_{n \geq 1}$ de fonctions en escalier telles que pour tout $n \geq 1$:

$$\varphi_n \leq f \leq \psi_n, u_n \leq g \leq v_n$$

et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b (\psi_n - \varphi_n)(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b (v_n - u_n)(t) dt = 0$$

Il s'en suit que:

★ si $\lambda > 0$ alors

$$\lambda \varphi_n \leq \lambda f \leq \lambda \psi_n \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b (\lambda \psi_n - \lambda \varphi_n)(t) dt = 0$$

★ si $\lambda < 0$ alors

$$\lambda\psi_n \leq \lambda f \leq \lambda\varphi_n \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b (\lambda\varphi_n - \lambda\psi_n)(t) dt = 0$$

Pour $\lambda = 0$ c'est trivial. Donc λf est intégrable sur $[a, b]$. On a déjà vu que pour les fonctions en escalier l'intégrale est linéaire et de la linéarité de la limite on déduit que:

$$\begin{aligned} \int_a^b \lambda f(t) dt &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b \lambda \varphi_n(t) dt \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\lambda \int_a^b \varphi_n(t) dt \right) \\ &= \lambda \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b \varphi_n(t) dt \\ &= \lambda \int_a^b f(t) dt \end{aligned}$$

Par ailleurs on a

$$\varphi_n + u_n \leq f + g \leq \psi_n + v_n$$

et

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b (\psi_n + v_n)(t) dt &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b \psi_n dt + \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b v_n dt \\
&= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b \varphi_n dt + \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b u_n dt \\
&= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b (\varphi_n + u_n)(t) dt \\
&= \int_a^b (f + g)(t) dt
\end{aligned}$$

C'est ce qu'il fallait démontrer. ■

Notons $\mathcal{R}([a, b])$ l'ensemble des fonctions Riemann intégrables sur $[a, b]$ (qui contient évidemment les fonctions en escalier sur $[a, b]$). La proposition 2.1 nous informe que $\mathcal{R}([a, b])$ est un espace vectoriel réel et que $f \mapsto \int_a^b f(t) dt$ est une application linéaire de $\mathcal{R}([a, b])$ dans \mathbb{R} (donc c'est une forme linéaire de $\mathcal{R}([a, b])$).

2.3 Intégrales et inégalités

Les inégalités liées aux intégrales de fonctions en escalier vont s'étendre sans difficulté aux fonctions Riemann intégrables.

Proposition 2.2 Soient f et g deux fonctions bornées et intégrables sur un compact $[a; b]$ de \mathbb{R} .

- 1) Si $f \geq 0$ sur $[a, b]$ alors $\int_a^b f(t) dt \geq 0$
- 2) Si $f \geq g$ sur $[a, b]$ alors $\int_a^b f(t) dt \geq \int_a^b g(t) dt$

Preuve. 1) Comme f est intégrable, on sait qu'il existe une suite $(\psi_n)_n$ de fonctions en escalier telles que $f \leq \psi_n$ pour tout n et

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b \psi_n(t)dt$$

Comme f est positive, toutes les fonctions ψ_n le sont aussi, donc les intégrales $\int_a^b \psi_n(t)dt$ sont positives et leur limite aussi.

2) Il suffit d'appliquer 1) à $f - g \geq 0$ ■

Soit f une fonction bornée sur $[a, b]$. Pour tout $x \in [a, b]$ on pose

$$f_-(x) = \max \{-f(x), 0\} \text{ et } f_+(x) = \max \{f(x), 0\}$$

Il est clair que ces deux fonctions sont positives et que

$$f = f_+ - f_- \text{ et } |f| = f_+ + f_-$$

Proposition 2.3 Soit f une fonction bornée intégrable sur $[a, b]$, alors f_+ , f_- et $|f|$ sont aussi intégrables et

$$\left| \int_a^b f(t)dt \right| \leq \int_a^b |f(t)|dt$$

Preuve. Comme f est intégrable alors il existe des fonctions en escalier $(\varphi_n)_n$ et $(\psi_n)_n$ vérifiant $\varphi_n \leq f \leq \psi_n$ et dont les intégrales convergent vers celle de f . On vérifie alors facilement que $(\varphi_n)_+ \leq f_+ \leq (\psi_n)_+$ et que $(\psi_n)_+ - (\varphi_n)_- \leq (\varphi_n)_+$. Donc f_+ est intégrable sur $[a, b]$. Par la même méthode, f_- est intégrable sur $[a, b]$. D'où $|f| = f_+ + f_-$ est intégrable sur $[a, b]$.

L'inégalité des intégrales découle de 2) de la proposition 2.2. appliquée à

$$-|f| \leq f \leq |f|$$

■

Proposition 2.4 (Formule de la moyenne I) Soit f une fonction bornée et intégrable sur $[a, b]$ avec $a < b$. Soient m et M la borne inférieure et la borne supérieure de f sur $[a, b]$. Alors le réel

$$\kappa = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$$

appartient à $[m, M]$.

Preuve. Comme on a $m \leq f \leq M$ on en déduit

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(t) dt \leq M(b-a)$$

■

Exemple 2.2 (Application) Calculer les limites suivantes:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_0^x \frac{e^{t^2}}{2 + \cos(t)} dt$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} \int_x^{2x} \frac{t+1}{t(1 + \cos^2(t))} dt$$

Théorème 2.2 (Formule de la moyenne II) Soient f une fonction réelle continue sur $[a, b]$ et g intégrable sur $[a, b]$ avec g de signe constant. Alors il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(c) \int_a^b g(x) dx$$

Preuve. Quitte à considérer $-g$, on peut supposer que g est positive. La fonction f est continue sur $[a, b]$, donc elle est bornée et atteint ses bornes:

$$m = \min \{f(x) : a \leq x \leq b\}, \quad M = \max \{f(x) : a \leq x \leq b\}$$

Par ailleurs on a;

$$m \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x)g(x) dx \leq M \int_a^b g(x) dx$$

• Si $\int_a^b g(x)dx = 0$, d'après la dernière inégalité, $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$ et le théorème devient trivial.

• Si $\int_a^b g(x)dx \neq 0$ alors $\int_a^b g(x)dx > 0$ et les inégalités précédentes nous donnent

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \leq M$$

Le théorème des valeurs intermédiaires nous assure l'existence d'un $c \in [a, b]$

tel que $f(c) = \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$. Ce qu'il fallait démontrer.

■

2.4 Intégrales et produits

Proposition 2.5 *Si f et g sont deux fonctions bornées et intégrables sur $[a, b]$ alors fg est bornée et intégrable sur $[a, b]$.*

$$\text{Mais en général } \int_a^b (fg)(t)dt \neq \left(\int_a^b f(t)dt \right) \left(\int_a^b g(t)dt \right)$$

Preuve. * Cas où f et g sont toutes les deux positives. On pose

$$M = \max \{f(x), a \leq x \leq b\} \text{ et } N = \max \{g(x), a \leq x \leq b\}$$

Par définition, il existe des fonctions en escalier $(\varphi_n)_n, (\psi_n)_n, (u_n)_n$ et $(v_n)_n$ telles que

$$\varphi_n \leq f \leq \psi_n \text{ et } u_n \leq g \leq v_n$$

Posons

$$\varphi'_n(x) = \max \{\varphi_n(x), 0\}, \psi'_n(x) = \min \{\psi_n(x), M\}$$

$$u'_n(x) = \max \{u_n(x), 0\}, v'_n(x) = \min \{v_n(x), N\}$$

Ce sont toutes des fonctions en escalier qui vérifient bien

$$\varphi_n \leq \varphi'_n \text{ et } 0 \leq \varphi'_n \leq f \leq \psi'_n \leq \psi_n$$

$$u_n \leq u'_n \text{ et } 0 \leq u'_n \leq g \leq v'_n \leq v_n$$

A cause de la positivité, on aura donc

$$\varphi'_n u'_n \leq fg \leq \psi'_n v'_n$$

le fonctions qui encadrent fg sont en escalier. Montrons la convergence

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b (\psi'_n v'_n - \varphi'_n u'_n)(t) dt = 0$$

Pour ce la on va utiliser les assertion satisfaites suivantes

$$v'_n \leq N, \varphi'_n \leq \psi'_n \leq M$$

$$0 \leq \psi'_n - \varphi'_n \leq \psi_n - \varphi_n$$

$$0 \leq v'_n - u'_n \leq v_n - u_n$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b (\psi_n - \varphi_n)(t) dt = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b (v_n - u_n)(t) dt = 0$$

pour pouvoir écrire

$$\begin{aligned}
0 &\leq \int_a^b (\psi'_n v'_n - \varphi'_n u'_n)(t) dt \\
&= \int_a^b (\psi'_n v'_n - \varphi'_n v'_n + \varphi'_n v'_n - \varphi'_n u'_n)(t) dt \\
&= \int_a^b (\psi'_n v'_n - \varphi'_n v'_n)(t) dt + \int_a^b (\varphi'_n v'_n - \varphi'_n u'_n)(t) dt \\
&= \int_a^b v'_n(t) (\psi'_n - \varphi'_n)(t) dt + \int_a^b \varphi'_n(t) (v'_n - u'_n)(t) dt \\
&\leq \int_a^b v'_n(t) (\psi'_n - \varphi'_n)(t) dt + \int_a^b \psi'_n(t) (v'_n - u'_n)(t) dt \\
&\leq N \int_a^b (\psi'_n - \varphi'_n)(t) dt + M \int_a^b (v'_n - u'_n)(t) dt \\
&\leq N \int_a^b (\psi_n - \varphi_n)(t) dt + M \int_a^b (v_n - u_n)(t) dt \tag{2.1}
\end{aligned}$$

(2.1) montre que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b (\psi'_n v'_n - \varphi'_n u'_n)(t) dt = 0$$

Donc fg est R-intégrable.

★ f et g bornées intégrables non nécessairement positive. Posons

$$m = \min \{f(x), a \leq x \leq b\} \text{ et } m' = \min \{g(x), a \leq x \leq b\}$$

Les fonctions $f - m$ et $g - m'$ qui sont bornées et intégrables sont positives. D'après le cas précédent, $(f - m)(g - m')$, est intégrable. Puisque

$$fg = (f - m)(g - m') + mg + m'f - mm',$$

on en déduit que fg est bornée Riemann intégrable.

Pour voir qu'on n'a pas toujours l'égalité, il suffit de prendre $[a, b] = [0, 2]$ et $f = g = 1$

$$\int_0^2 (fg)(t) dt = \int_0^2 dt = 2 \neq 4 = \left(\int_0^2 dt \right)^2 = \int_0^2 (f)(t) dt \times \int_0^2 (g)(t) dt$$

■

Théorème 2.3 (Inégalité de Cauchy-Schwartz) Soient f et g deux fonctions bornées et intégrables sur un compact $[a, b]$ de \mathbb{R} alors

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx \right)^2 \leq \left(\int_a^b f(x)^2 dx \right) \left(\int_a^b g(x)^2 dx \right)$$

Preuve. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. La fonction $f + \lambda g$ est intégrable, donc $(f + \lambda g)^2$ l'est aussi. Comme c'est une fonction positive, donc

$$\int_a^b (f(x) + \lambda g(x))^2 dx \geq 0$$

Ainsi

$$\lambda^2 \int_a^b (g(x))^2 dx + 2\lambda \int_a^b f(x)g(x)dx + \int_a^b (f(x))^2 dx \geq 0$$

est un polynôme de degré deux en λ et qui est toujours du signe du coefficient $\int_a^b (g(x))^2 dx$ de λ^2 , donc son discriminant est négatif, c'est-à-dire :

$$4 \left(\int_a^b f(x)g(x)dx \right)^2 - 4 \left(\int_a^b (f(x))^2 dx \right) \left(\int_a^b (g(x))^2 dx \right) \leq 0$$

qui n'est rien d'autre que l'inégalité de Cauchy-Schwarz désirée. ■

3 Familles de fonctions intégrables

3.1 Manipulation de fonctions intégrables

Proposition 3.1 Soient f est une fonction bornée et intégrable et g une fonction définie sur $[a, b]$ est égale à f sauf sur un nombre finis de points, alors g est intégrable et

$$\int_a^b g(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

Preuve. Par hypothèse il existe une subdivision $S = (x_i)_{0 \leq i \leq n}$ de $[a, b]$ telle que $f = g$ sur chacun des intervalles $]x_i, x_{i+1}[$. La fonction $f - g$ est donc

nulle sur chacun des intervalles $]x_i, x_{i+1}[$. En d'autres termes, la fonction $f - g$ est en escalier. Elle est donc intégrable et son intégrale est clairement nulle. La fonction $g = f - (f - g)$ est donc intégrable et son intégrale est égale à celle de f . ■

Remarque 3.1 Cette proposition signifie que si on change les valeurs d'une fonction R-intégrable sur $[a, b]$ en un nombre fini de points de $[a, b]$ alors elle reste encore intégrable et garde la même intégrale.

3.2 Monotonie

Théorème 3.1 Toute fonction monotone sur un compact $[a, b]$ de \mathbb{R} est intégrable.

Preuve. supposons que $f; [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ bornée est croissante (sinon on considérera $-f$ qui sera croissante).

Pour tout $n \geq 1$ considérons la subdivision

$$S_n = \left\{ x_0 = a, x_1 = a + \frac{b-a}{n}, \dots, x_i = a + i \frac{b-a}{n}, \dots, x_n = b \right\}$$

qui permet de construire les fonctions en escalier

$$\varphi_n(t) = f(x_i), \forall t \in]x_i, x_{i+1}[, i = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

et

$$\psi_n(t) = f(x_{i+1}), \forall t \in]x_i, x_{i+1}[, i = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

On a évidemment $\varphi_n \leq f \leq \psi_n$ et

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_a^b (\psi_n - \varphi_n)(t) dt &= \sum_{i=0}^{i=n-1} (f(x_{i+1}) - f(x_i)) (x_{i+1} - x_i) \\ &= \sum_{i=0}^{i=n-1} (f(x_{i+1}) - f(x_i)) \frac{b-a}{n} \\ &= \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{i=n-1} (f(x_{i+1}) - f(x_i)) \\ &= \frac{b-a}{n} (f(b) - f(a)) \end{aligned} \tag{3.2}$$

(3.2) implique que $\int_a^b (\psi_n - \varphi_n)(t) dt = 0$ Ce qui montre que f est intégrable sur $[a, b]$. ■

3.3 Continuité

Définition 3.1 Une fonction f est continue en un point a d'un interballe I de \mathbb{R} si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta_{a,\varepsilon} > 0 : |x - a| < \eta_{a,\varepsilon} \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

f sera dite continue sur I si f est continue en tout point de I .

Remarque 3.1 Dans cette définition, il faut noter que le $\eta_{a,\varepsilon} > 0$ ci-dessus dépend de ε évidemment mais aussi de a . Prenons un exemple, la fonction

$$f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x^2$$

Soit $a \in]0, +\infty[$ fixé, pour tout $\varepsilon > 0$, la condition $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ revient à $|x^2 - a^2| < \varepsilon$. Écrivons $x = a + (x - a)$, on obtient $|2a(x - a) + (x - a)^2| < \varepsilon$. Or $|2a(x - a)| < |2a(x - a) + (x - a)^2|$. On veut avoir $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ c'est-à-dire $|2a(x - a) + (x - a)^2| < \varepsilon$ alors $|2a(x - a)| < \varepsilon$ il faut donc avoir $|x - a| < \frac{\varepsilon}{2a}$ donc il faut que $\eta_{a,\varepsilon}$ vérifie $0 < \eta_{a,\varepsilon} < \frac{\varepsilon}{2a}$. On constate ainsi que le $\eta_{a,\varepsilon}$ qui réalise l'implication de la définition 3.1 ne peut pas être choisi de la même manière pour $a \sim 0^+$ et pour $a \sim +\infty$.

Définition 3.2 Une fonction f est dite uniformément continue sur un intervalle I de \mathbb{R} si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta_\varepsilon > 0; |x - y| < \eta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Exemple 3.1 fonctions Lipschitziennes:

$$\exists K > 0 : |f(x) - f(y)| \leq K|x - y|, \forall (x, y) \in I^2$$

sont uniformément continues sur \mathbb{R} . De telles fonctions sont obtenues par le théorème des accroissements finis, Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable et sa dérivée est bornée alors f est Lipschitziennes.

Évidemment la continuité uniforme implique la continuité. La réciproque n'est pas toujours vraie. Cependant, sur les compacts cette réciproque devient satisfaite.

Théorème 3.2 (Heine) *Toute fonction continue sur un intervalle fermé borné $[a, b]$ est uniformément continue sur $[a, b]$.*

Preuve. Si f est continue, montrons qu'elle est uniformément continue, c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \eta_\varepsilon > 0 \text{ tel que } |x - y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Raisonnons par absurde, $\exists \varepsilon_0 > 0$ tel que $\forall \eta > 0$ on peut trouver x_η, y_η dans $[a, b]$ tels que $|x_\eta - y_\eta| < \eta$ et $|f(x_\eta) - f(y_\eta)| \geq \varepsilon_0$. Ceci étant vrai pour tout $\eta > 0$ en particulier pour les $\frac{1}{n}$, $n \geq 1$. Il existe donc des suites $(x_n)_{n \geq 1}$ et $(y_n)_{n \geq 1}$ dans $[a, b]$ telles que

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \text{ et } |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0 \quad (*)$$

D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une sous-suite extraite $(x_{\varphi(n)})_{n \geq 1}$ qui converge dans $[a, b]$ vers c . Alors $(y_{\varphi(n)})_{n \geq 1}$ converge aussi vers c . Puisque

$$|y_{\varphi(n)} - c| \leq |y_{\varphi(n)} - x_{\varphi(n)}| + |x_{\varphi(n)} - c| < \frac{1}{\varphi(n)} + |x_{\varphi(n)} - c| \rightarrow 0 \text{ si } n \rightarrow +\infty$$

Écrivons $(*)$ pour $\varphi(n)$, on aura: $|f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)})| \geq \varepsilon_0$, ce qui mène à la contradiction avec la continuité de f en c si on fait tendre n vers l'infini. ■

Théorème 3.3 *Toute fonction continue sur $[a, b]$ est intégrable.*

Preuve. Par hypothèse, f est continue, d'après le théorème de Heine, f est aussi uniformément continue, donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\eta > 0$ telle que

$$|x - y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

On considère une subdivision $(x_i)_{0 \leq i \leq m-1}$ telle que $\max(x_{i+1} - x_i) < \eta$: Puis que $\left(\frac{1}{m}\right)$ converge vers zéro, soit $m \geq 1$ tel que $\frac{1}{m} \leq \eta$. Il suffit de prendre $S = \left(x_i = a + i \frac{b-a}{m}\right)_{0 \leq i \leq m-1}$. On définit les fonctions en escalier

$$\varphi_\varepsilon(t) = f(x_i) - \frac{\varepsilon}{2(b-a)}, \psi_\varepsilon(t) = f(x_i) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}, x_i < t < x_{i+1}, 0 \leq i \leq n-1$$

Pour tout $t \in]x_i, x_{i+1}[$ on a $0 < t - x_i < \frac{1}{n} < \eta$ donc $|f(x_i) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ ce qui signifie que $f(x_i) - \frac{\varepsilon}{2(b-a)} < f(t) < f(x_i) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ c'est-à-dire $\varphi_\varepsilon(t) \leq f(t) \leq \psi_\varepsilon(t)$. Par ailleurs;

$$\int_a^b (\psi_\varepsilon(t) - \varphi_\varepsilon(t)) dt$$

$$\begin{aligned} \int_a^b (\psi_\varepsilon(t) - \varphi_\varepsilon(t)) dt &= \sum_{i=0}^{n-1} \left(f(x_i) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} - f(x_i) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \right) (x_{i+1} - x_i) \\ &= \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{\varepsilon}{b-a} \right) \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

Pour $\varepsilon = \frac{1}{n}$, on aura alors des fonctions en escalier $(\varphi_n)_n, (\psi_n)_n$ telles que:

$$\varphi_n \leq f \leq \psi_n \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b (\psi_n(t) - \varphi_n(t)) dt = 0$$

Cela montre l'intégrabilité de f . ■

3.4 Relation de Chasles

Proposition 3.2 Soit f une fonction bornée sur $[a, b]$ et $c \in [a, b]$.

- 1) Si f est intégrable sur $[a, b]$ alors f est intégrable sur $[a, c]$ et sur $[c, b]$.
- 2) Si f est intégrable sur $[a, c]$, et sur $[c, b]$ alors f est intégrable sur $[a, b]$.

3) Si f est intégrable sur $[a, b]$ alors on a la relation de Chasles

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$$

Preuve. La relation de Chasles est claire pour les fonctions en escalier.

1) Si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe φ et ψ en escalier sur $[a, b]$ telles que $\varphi \leq f \leq \psi$ et $\int_a^b (\psi - \varphi)(t)dt < \varepsilon$ alors les restrictions φ_1 et ψ_1 (Respectivement φ_2 et ψ_2) de φ et ψ à $[a, c]$ (respectivement à $[c, b]$) alors ces quatre fonctions sont en escalier et encadrent f avec $0 \leq \int_a^b (\psi_1 - \varphi_1)(t)dt < \varepsilon$ et $0 \leq \int_a^b (\psi_2 - \varphi_2)(t)dt < \varepsilon$ donc f est intégrable sur $[a, c]$ et sur $[c, b]$.

2) Si f est intégrable sur $[a, c]$, et sur $[c, b]$ alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe des fonctions en escalier φ_1, ψ_1 et φ_2, ψ_2 respectivement sur $[a, c]$ et $[c, b]$ telles que $\varphi_1 \leq f \leq \psi_1$ et $\varphi_2 \leq f \leq \psi_2$ respectivement sur $[a, c]$ et $[c, b]$ avec $0 \leq \int_a^b (\psi_1 - \varphi_1)(t)dt < \frac{\varepsilon}{2}$ et $0 \leq \int_a^b (\psi_2 - \varphi_2)(t)dt < \frac{\varepsilon}{2}$. Considérons les fonctions φ et ψ données sur $[a, b]$ par

$$\varphi(x) = \begin{cases} \varphi_1(x) & \text{si } a \leq x < c \\ \varphi_2(x) & \text{si } c \leq x \leq b \end{cases}$$

et

$$\psi(x) = \begin{cases} \psi_1(x) & \text{si } a \leq x < c \\ \psi_2(x) & \text{si } c \leq x \leq b \end{cases}$$

Il est claire que φ et ψ sont en escalier sur $[a, b]$ avec

$$0 \leq \int_a^b (\psi - \varphi)(t)dt = \int_a^c (\psi_1 - \varphi_1)(t)dt + \int_c^b (\psi_2 - \varphi_2)(t)dt < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Ainsi f est intégrable sur $[a, b]$.

3) L'égalité étant évidente pour les fonctions en escalier donc si

$$\varphi_{1,n} \leq f \leq \psi_{1,n} \text{ sur } [a, c] \text{ avec } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^c (\psi_{1,n} - \varphi_{1,n})(t)dt = 0$$

et

$$\varphi_{2,n} \leq f \leq \psi_{2,n} \text{ sur } [c,b] \text{ avec } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_c^b (\psi_{2,n} - \varphi_{2,n})(t) dt = 0$$

alors φ_n et ψ_n définies comme φ et ψ ci-dessus satisfont

$$\varphi_n \leq f \leq \psi_n \text{ sur } [c,b] \text{ avec } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_c^b (\psi_n - \varphi_n)(t) dt = 0$$

D'où

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b \psi_n(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_a^c \psi_n(t) dt + \int_c^b \psi_n(t) dt \right)$$

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t) dt &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b \psi_n(t) dt \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_a^c \psi_n(t) dt + \int_c^b \psi_n(t) dt \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^c \psi_n(t) dt + \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_c^b \psi_n(t) dt \\ &= \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt \end{aligned}$$

■

Puisque

$$0 = \int_a^a f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^a f(t) dt$$

on aura donc

Corollaire 3.1 *Si f est intégrable sur $[a, b]$ alors*

$$\int_b^a f(t) dt = - \int_a^b f(t) dt$$

En particulier, la relation

$$\int_e^d f(t) dt = \int_e^c f(t) dt + \int_c^d f(t) dt$$

est vraie quelques que soient les relations d'ordre entre e, c et d dans $[a, b]$.

On dit qu'une fonction f sur $[a, b]$ a une certaine propriété (comme être continue, monotone, dérivable, etc.) par morceaux si il existe une subdivision $S = (x_i)_{0 \leq i \leq n}$ de $[a, b]$ telle que f a cette propriété sur chacun des intervalles $]x_i, x_{i+1}[$ et si elle admet un prolongement ayant cette même propriété sur $[x_i, x_{i+1}]$. En appliquant la relation de Chasles n fois on obtient:

Théorème 3.4 *Si f est continue (respectivement monotone) par morceaux sur $[a, b]$ alors f est intégrable sur $[a, b]$.*

4 Primitives et intégrales

Dans cette section, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction bornée intégrable sur $[a, b]$.

4.1 Le théorème fondamental

Nous allons nous intéresser à la fonction $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$x \mapsto F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

Proposition 4.1 *Si $|f| \leq M$ sur $[a, b]$, alors pour tous x et y dans $[a, b]$,*

$$|F(x) - F(y)| \leq M|x - y|$$

Preuve. Supposons que $x \geq y$ (l'autre cas se traite de la même façon).

$$|F(x) - F(y)| = \left| \int_a^x f(t) dt - \int_a^y f(t) dt \right| = \left| \int_a^x f(t) dt + \int_y^a f(t) dt \right|$$

$$\begin{aligned} |F(x) - F(y)| &= \left| \int_a^x f(t) dt - \int_a^y f(t) dt \right| \\ &= \left| \int_a^x f(t) dt + \int_y^a f(t) dt \right| \\ &= \left| \int_y^x f(t) dt \right| \\ &\leq \int_y^x |f(t)| dt \\ &\leq \int_y^x M dt \\ &= M(x - y) \\ &= M|x - y| \end{aligned}$$



Corollaire 4.1 La fonction $F : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est Lipschitzienne donc uniformément continue sur $[a, b]$

Théorème 4.1 Soit $x_0 \in [a, b]$. Les assertions suivantes sont satisfaites:

1) Si f admet une limite réelle l à droite au point x_0 alors F admet une dérivée à droite en x_0 égale à l :

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(t) = l \in \mathbb{R} \Rightarrow F'_d(x_0) = l$$

2) Si f admet une limite réelle l à gauche au point x_0 alors F admet une dérivée à gauche en x_0 égale à l :

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(t) = l \in \mathbb{R} \Rightarrow F'_g(x_0) = l$$

3) Si f admet une limite réelle l au point x_0 alors F admet une dérivée en x_0 égale à l :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(t) = l \in \mathbb{R} \Rightarrow F'(x_0) = l$$

4) Si f est continue au point x_0 alors F a une dérivée en x_0 égale à $f(x_0)$:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(t) = f(x_0) \in \mathbb{R} \Rightarrow F'(x_0) = f(x_0)$$

Preuve. 1) Supposons que $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(t) = l \in \mathbb{R}$ c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 : 0 < h < \eta \Rightarrow |f(t) - l| < \varepsilon, \forall t \in [x_0, x_0 + h] \quad (*)$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} - l \right| &= \left| \frac{F(x_0 + h) - F(x_0) - lh}{h} \right| \\ &= \frac{1}{h} \left| \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt - lh \right| \\ &= \frac{1}{h} \left| \int_{x_0}^{x_0+h} (f(t) - l) dt \right| \\ &\leq \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - l| dt \\ &\leq \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} \varepsilon dt \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

D'où $F'_d(x_0) = l$.

2) se démontre de la même façon que 1).

3) c'est 1) et 2).

4) c'est 3) pour $l = f(x_0)$.

■

Il s'en suit que:

Théorème 4.2 *Si f est continue sur $[a, b]$ alors F est dérivable avec*

$$F'(x) = f(x), \forall x \in]a, b[, F'_d(a) = f(a) \text{ et } F'_g(b) = f(b)$$

Remarquons que si f n'est pas continue, alors la fonction F ne sera plus dérivable. Un contreexemple est donné par:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 2 & \text{si } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

pour laquelle

$$F(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 2x + 1 & \text{si } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

n'est pas dérivable puisque $F'_g(1) = 1$ et $F'_d(1) = 2$

Définition 4.1 *On dit que G est une primitive de f sur $[a, b]$ si $G' = f$ sur $[a, b]$.*

Proposition 4.2 Si F et G sont deux primitives de f sur $[a, b]$ alors $F - G$ est constante sur $[a, b]$.

Preuve. $(F - G)' = F' - G' = f - f = 0$ donc $F - G = cte$. ■

Proposition 4.3 Toute fonction continue sur $[a, b]$ admet une primitive sur $[a, b]$.

Preuve. Il s'agit de $F : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$. ■

Remarque 4.1 Une fonction peut avoir une primitive sans qu'elle soit continue. Soit

$$f(x) = \begin{cases} 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est discontinue en zéro car: $\left(x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}\right)$ tend vers zéro si n tend vers l'infini, alors que $(f(x_n)) = (\pi + 4n\pi)$ tend vers l'infini. Par ailleurs

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est dérivable de dérivée f .

Théorème 4.3 Si f est une fonction continue sur $[a, b]$ et si G est une primitive de f alors

$$\int_a^b f(t)dt = G(b) - G(a)$$

Preuve. Soit G une primitive de f sur $[a, b]$. Puisque f est continue sur $[a, b]$, il s'en suit que $F : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est une primitive de f , donc $G = F + cte$ et $G(b) - G(a) = (G(b) + cte) - (G(a) + cte) = F(b) - F(a) = F(b) - \int_a^b f(t)dt$. ■

L'égalité $\int_a^b f(t)dt = G(b) - G(a)$ est notée $[G(t)]_a^b$.
 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est dite de classe C^1 si f' est continue.

Théorème 4.4 Si f est de classe C^1 sur $[a, b]$ alors $\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a)$.

Preuve. Il suffit d'appliquer la proposition.4.3 et le théorème .4.3 ■

4.2 Intégration par parties

Théorème 4.5 Soient u et v deux fonctions C^1 sur $[a, b]$, alors

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = [v(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$$

Preuve. D'après ce qui précède, on a

$$[v(x)v(x)]_a^b = \int_a^b (uv)'(x)dx = \int_a^b u'(x)v(x)dx + \int_a^b u(x)v'(x)dx$$

Ce qu'il fallait démontrer. ■

Exemple 4.1 les intégrales suivantes pour tout $n \geq 0$:

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)dx \text{ et } J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)dx$$

4.3 Changement de variables

Théorème 4.6 (Changement de variable I) Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et soit φ une fonction C^1 sur $[\alpha, \beta]$ telle que $\varphi([\alpha, \beta]) \subset [a, b]$. Alors

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t)dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx$$

Preuve. Puisque f est continue, elle admet une primitive: F définie par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ qui est de classe C^1 . Donc $F \circ \varphi$ est de classe C^1 sur $[\alpha, \beta]$ avec $(F \circ \varphi)'(t) = (F' \circ \varphi)(t) \times \varphi'(t) = (f \circ \varphi)(t) \times \varphi'(t)dt$. D'après

le théorème.4.4 on a:

$$\begin{aligned}
 \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt &= \int_{\alpha}^{\beta} (F \circ \varphi)'(t) dt \\
 &= (F \circ \varphi)(\beta) - (F \circ \varphi)(\alpha) \\
 &= F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) \\
 &= \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x) dx
 \end{aligned}$$

■

Théorème 4.7 (Changement de variableII) Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et soit ϕ une fonction C^1 sur $[\alpha, \beta]$ telle que $\varphi([\alpha, \beta]) \subset [a, b]$. Si ϕ est strictement monotone (ie strictement croissante ou décroissante). Alors

$$\int_{a'}^{b'} f(x) dx = \int_{\phi^{-1}(a')}^{\phi^{-1}(b')} f(\phi(t)) \phi'(t) dt$$

Preuve. Comme ϕ est strictement monotone donc elle injective. Sa continuité permet (grace au théorème des valeurs intermédiaires) d'avoir sa surjectivité. Ainsi ϕ est bijective de $[\alpha, \beta]$ sur $\phi([\alpha, \beta])$

$$\begin{aligned}
 \int_{a'}^{b'} f(x) dx &= \int_{\phi(\phi^{-1}(a'))}^{\phi(\phi^{-1}(b'))} f(x) dx \\
 &= \int_{\phi^{-1}(a')}^{\phi^{-1}(b')} f(\phi(t)) \phi'(t) dt
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

(4.3) est obtenue en appliquant le théorème4.6 à $\varphi = \phi : \alpha = \phi^{-1}(a')$ et $\beta = \phi^{-1}(b')$

■

Exemple 4.2 1) Calculer l'intégrale $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$ (Indic. $x = \cos(\theta)$).

2) Pour $x > 0$, calculer l'intégrale $I(x) = \int_0^x \sin(\sqrt{t}) dt$ (Ind. $u = \sqrt{t}$).

Exercice

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et de signe constant sur $[a, b]$.

Montrer que si $\int_a^b f(x) = 0$, alors f est identiquement nulle sur $[a, b]$.

5 Sommes de Riemann et de Darboux

5.1 Sommes de Darboux

Soit f une fonction bornée sur $[a, b]$ et $S = (x_i)_{0 \leq i \leq n}$ une subdivision de $[a, b]$.
On note

$$m_k = \inf_{x_k < x < x_{k+1}} f(x), \quad M_k = \sup_{x_k < x < x_{k+1}} f(x), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n$$

$$\mathfrak{s}(S, f) = \sum_{k=0}^{k=n-1} m_k (x_{k+1} - x_k) \quad \text{et} \quad \mathfrak{S}(S, f) = \sum_{k=0}^{k=n-1} M_k (x_{k+1} - x_k)$$

(appelées petite et grande sommes de Darboux)

$$\mathfrak{s}_a^b(f) = \sup \{ \mathfrak{s}(S, f), S \text{ subdivision de } [a, b] \}$$

$$\mathfrak{S}_a^b(f) = \sup \{ \mathfrak{S}(S, f), S \text{ subdivision de } [a, b] \}$$

Théorème 5.1 *Soit f une fonction bornée sur $[a, b]$. Les assertions suivantes sont équivalentes:*

- 1) f est intégrable
- 2) $\mathfrak{s}_a^b(f) = \mathfrak{S}_a^b(f)$

Preuve. Évidement,

$$\mathfrak{s}_a^b(f) \leq i_a^b\{f\} \leq I_a^b(f) \leq \mathfrak{S}_a^b(f)$$

Donc si 2) est vérifié alors f est intégrable. Réciproquement si f est intégrable alors $i_a^b(f) = \int_a^b f(t)dt$ et pour $\varepsilon > 0$ il existe φ en escalier sur $[a, b]$ telle que

$$i_a^b(f) - \varepsilon < \int_a^b \varphi(t)dt \leq i_a^b(f)$$

Il est à noter que pour une fonction en escalier φ on a

$$\mathfrak{s}_a^b(\varphi) = \int_a^b \varphi(t)dt = \mathfrak{S}_a^b(\varphi)$$

donc

$$i_a^b(f) - \varepsilon < \int_a^b \varphi(t)dt = \mathfrak{s}(\varphi) \leq \mathfrak{s}_a^b(\varphi) \leq \mathfrak{s}_a^b(f) = \mathfrak{s}_a^b(\varphi)$$

Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, $i_a^b(f) - \varepsilon < \mathfrak{s}_a^b(\varphi)$ donc $i_a^b(f) \leq \mathfrak{s}_a^b(\varphi)$ et par suite, $i_a^b(f) = \mathfrak{s}_a^b(\varphi)$. De la même façon, $I_a^b(f) = \mathfrak{S}_a^b(\varphi)$. D'où 2). ■

5.2 Sommes de Riemann

Soit f une fonction bornée sur $[a, b]$ et $S = (x_i)_{0 \leq i \leq n}$ une subdivision de $[a, b]$. On considère $\mathfrak{E} = \{e_0, e_1, e_2, \dots, e_{n-1}\}$ une famille de réels tels que $e_i \in [x_i, x_{i+1}]$ pour tout i . On note

$$\mathfrak{R}(S, \mathfrak{E}, f) = \sum_{k=0}^{k=n-1} f(e_k) (x_{k+1} - x_k)$$

(appelées sommes de Riemann de f relative à \mathfrak{E} dans S)

Théorème 5.2 *Soit f une fonction bornée et intégrable sur $[a, b]$, alors*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta(S) \rightarrow 0} [\mathfrak{R}(S, \mathfrak{E}, f)]$$

Preuve. Identique à celle des sommes de Darboux. ■

Un cas particulier de ce théorème est lorsqu'on considère la subdivision

$$S_n = \left\{ x_0 = a, x_1 = a + \frac{b-a}{n}, \dots, x_i = a + i \frac{b-a}{n}, \dots, x_n = b \right\}, n \geq 1$$

$$\delta(S_n) = \frac{b-a}{n} \text{ donc } \delta(S_n) \rightarrow 0 \Leftrightarrow n \rightarrow +\infty$$

On peut ainsi énoncer

Corollaire 5.1 *Soit f une fonction bornée et intégrable sur $[a, b]$, alors*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{i=n-1} f\left(a + i \frac{b-a}{n}\right)$$

Un cas intéressant est lorsque $[a, b] = [0, 1]$. Alors le corollaire donne

$$\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{i=n-1} f\left(\frac{i}{n}\right)$$

On notera alors

$$R_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{i=n-1} f\left(\frac{i}{n}\right)$$

qui constitue une approximation de l'intégrale

$$\int_0^1 f(x)dx$$

avec l'estimation de l'erreur suivante

Proposition 5.1 *Soit f une fonction de classe C^1 telle que*

$$\sup \{|f'(x)|, x \in [0, 1]\} = M \in \mathbb{R}$$

Alors

$$\left| \int_0^1 f(x)dx - R_n \right| = \left| \int_0^1 f(x)dx - \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{i=n-1} f\left(\frac{i}{n}\right) \right| \leq \frac{M}{2n}$$

Preuve. En utilisant la relation de Chasles et le théorème des accroisse-

ments finis sur $[x_i, x_{i+1}]$; on aura

$$\begin{aligned}
 \left| \int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{i=n-1} f\left(\frac{i}{n}\right) \right| &= \left| \sum_{i=0}^{i=n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx - \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{i=n-1} f\left(\frac{i}{n}\right) \right| \\
 &= \left| \sum_{i=0}^{i=n-1} \left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx - \frac{1}{n} f\left(\frac{i}{n}\right) \right) \right| \\
 &= \left| \sum_{i=0}^{i=n-1} \left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[f(x) - f\left(\frac{i}{n}\right) \right] dx \right) \right| \\
 &\leq \sum_{i=0}^{i=n-1} \left[\int_{x_i}^{x_{i+1}} \left| f(x) - f\left(\frac{i}{n}\right) \right| dx \right] \\
 &\leq \sum_{i=0}^{i=n-1} \left[\int_{x_i}^{x_{i+1}} |f'(c_i)| \left| x - \frac{i}{n} \right| dx \right] \\
 &\leq \sum_{i=0}^{i=n-1} \left[\frac{M}{2} \left(x - \frac{i}{n} \right)^2 \right]_{x_i}^{x_{i+1}} \\
 &= \sum_{i=0}^{i=n-1} \left[\frac{M}{2n^2} \right] \\
 &= \frac{M}{2n}
 \end{aligned}$$

■

6 Intégrales généralisées

Définition 6.1 Soit $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On dit que

$$\int_a^b f(x) dx$$

est une intégrale généralisée si

- 1) $a = -\infty$ ou
- 2) $b = +\infty$ ou
- 3) $\sup \{|f(x)|, x \in (a, b)\} = +\infty$

Pour tout intervalle borné $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$, f est Riemann intégrable sur $[\alpha, \beta]$ Par définition,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\alpha \rightarrow a, \beta \rightarrow b} \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$$

Lorsque cette limite existe dans \mathbb{R} on dit que l'intégrale généralisée est convergente. Si cette limite n'existe pas on dira que l'intégrale impropre est divergente.

Exemple 6.1 Considérons les intégrales généralisées (ou impropres) suivantes:

- $I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 1}$. On pose

$$I_1(\beta) = \int_0^{\beta} \frac{dx}{x^2 + 1}, \beta \in \mathbb{R}_+^*$$

qui est bien une intégrale de Riemann.

$$\begin{aligned} I_1(\beta) &= \int_0^{\beta} \frac{dx}{x^2 + 1} \\ &= [\arctan(x)]_0^{\beta} \\ &= \arctan(\beta) \end{aligned}$$

$\lim_{\beta \rightarrow +\infty} (I_1(\beta)) = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} (\arctan(\beta)) = \frac{\pi}{2}$ L'intégrale généralisée I_1 est convergente avec

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 1} = \frac{\pi}{2}$$

- $I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2} dx$ est une intégrale généralisée qui est égale, d'après la relation de Chasles, à

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^0 xe^{-x^2} dx + \int_0^{+\infty} xe^{-x^2} dx$$

On pose alors

$$I_{(2,1)}(\alpha) = \int_{\alpha}^0 xe^{-x^2} dx \text{ et } I_{(2,2)}(\beta) = \int_0^{\beta} xe^{-x^2} dx \text{ où } 0 \in]\alpha, \beta[\subset \mathbb{R}$$

On a bien

$$\begin{aligned} I_{(2,1)}(\alpha) &= \int_{\alpha}^0 x e^{-x^2} dx \\ &= \left[-\frac{1}{2} e^{-x^2} \right]_{\alpha}^0 \\ &= \frac{1}{2} (1 - e^{-\alpha^2}) \end{aligned} \tag{6.4}$$

(6.4) implique que $I_{(2,1)} = \int_{-\infty}^0 x e^{-x^2} dx = \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \int_{\alpha}^0 x e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}$.

Identiquement on aura

$$\begin{aligned} I_{(2,2)} &= \int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx \\ &= \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_0^{\beta} x e^{-x^2} dx \\ &= \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{2} e^{-x^2} \right]_0^{\beta} \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Ainsi $I_{(2,2)} = \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-x^2} dx$ est convergente avec

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^0 x e^{-x^2} dx + \int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$$

• $I_3 = \int_0^1 \frac{1}{x} dx$ est une intégrale généralisée puisque $\sup_{0 < x < 1} \left| \frac{1}{x} \right| = +\infty$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \int_{\alpha}^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} [\ln(x)]_{\alpha}^1 = +\infty$$

donc $\int_0^1 \frac{1}{x} dx = +\infty$. I_3 est une intégrale généralisée divergente.

• $I_4 = \int_0^2 \frac{dx}{x(x-2)}$ est une intégrale impropre qui admet deux points de singularité: 0 et 2. On pose

$$I_{(4,1)} = \int_0^1 \frac{dx}{x(x-2)} \text{ et } I_{(4,2)} = \int_1^2 \frac{dx}{x(x-2)}$$

$$I_{(4,1)}(\alpha) = \int_\alpha^1 \frac{dx}{x(x-2)}, \quad I_{(4,2)}(\beta) = \int_1^\beta \frac{dx}{x(x-2)}$$

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \int_\alpha^1 \frac{dx}{x(x-2)} &= \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \int_\alpha^1 \left(\frac{-1}{x} + \frac{1}{x-2} \right) dx \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{1}{2} \left[\ln \left| \frac{x-2}{x} \right| \right]_\alpha^1 \\ &= +\infty \end{aligned}$$

D'où $\int_0^1 \frac{dx}{x(x-2)}$ diverge donc l'intégrale impropre $\int_0^2 \frac{dx}{x(x-2)}$ diverge.

• $I_5 = \int_0^2 \frac{dx}{x-1}$ est impropre. D'après la relation de Chasles on a

$$\int_0^2 \frac{dx}{x-1} = \int_0^1 \frac{dx}{x-1} + \int_1^2 \frac{dx}{x-1}$$

avec

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{dx}{x-1} &= \int_0^1 \frac{dx}{x-1} + \int_1^2 \frac{dx}{x-1} \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 1^+} [\ln(x-1)]_\alpha^2 \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 1^+} (-\ln(\alpha-1)) \\ &= +\infty \end{aligned}$$

de sorte que $\int_1^2 \frac{dx}{x-1}$ diverge donc $\int_0^2 \frac{dx}{x-1}$ est divergente