Département de Mathématiques et Informatique

Cours de Géométrie Différentielle

Courbes Gauches -suite-

Filière: SMA S6

2019-2020

Professeur. Said FAHLAOUI

Courbes Gauches

2. Invariance par isométries:

Proposition 2.1:

La courbure est la valeur absolue de la torsion sont invariantes par les isométries de $\mathbb{R}^3$.

Démonstration:

Les isométries de $\mathbb{R}^3$ *sont engendrées par les translations et les matrices orthogonales. Il est claire que l'action d'une translation laisse invariant la courbure et la torsion.*
Soient $\mathcal{A} \in O(3)$ *une matrice orthogonale, et* $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ *une courbe paramétrée par son abscisse curviligne:* $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$.
Et soit Γ_2 *la courbe paramétrée par* $\psi = \mathcal{A} \circ \varphi$.
Alors

$$||\psi'(s)|| = ||\mathcal{A}\varphi'(s)|| = 1 \qquad , \qquad Car \quad \mathcal{A} \in O(3)$$

Donc Γ_2 *est paramétrée par son abscisse curviligne, et on a:*

$$T_2(s) = \mathcal{A}T(s)$$

Et par dérivation, on obtient:

$$\kappa_2(s)N_2) = \kappa(s)\mathcal{A}N(s)$$

Comme $\mathcal{A}N(s)$ *est un vecteur unitaire, donc:*

$$\kappa_2(s) = \kappa(s) \qquad et \qquad \mathcal{A}N(s) = N_2(s)$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} B_2(s) &= T_2(s) \wedge N_2(s) \\ &= \mathcal{A}T(s) \wedge \mathcal{A}N(s) \\ &= det\mathcal{A}.\mathcal{A}(T(s) \wedge N(s)) \end{aligned}$$

Or $\quad det\mathcal{A} = \pm 1 \quad$ *donc* $\quad \forall \omega \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}T \wedge \mathcal{A}N | \omega \rangle &= det\mathcal{A}.\langle T \wedge N | \mathcal{A}^{-1}\omega \rangle \\ &= det\mathcal{A}.\langle \mathcal{A}(T \wedge N) | \omega \rangle \end{aligned}$$

Donc

$$B_2(s) = \pm \mathcal{A}B(s)$$

En dérivant cette expression (et puisque $\mathcal{A}N(s) = N_2(s)$*) , on obtient:*

$$\begin{aligned} &\tau_2(s) = \tau(s) \quad si \quad det\mathcal{A} = 1 \\ &\tau_2(s) = -\tau(s) \quad si \quad det\mathcal{A} = -1 \end{aligned}$$

Théorème 2.2:

Soient Γ_1 , Γ_2 *deux courbes paramétrées par leurs abscisses curvilignes.*
Si elles ont même courbure et torsion et si la courbure ne s'annule pas.
Alors il existe une isométrie de $\mathbb{R}^3$ *qui envoie une courbe sur l'autre.*

Démonstration:

Soient φ_1 , φ_2 *les paramétrisations de* Γ_1 , Γ_2. *Supposons que* $0 \in I$.

$$\varphi_1 : I \longrightarrow \mathbb{R}^3 \qquad , \qquad \varphi_2 : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

Comme le groupe O(3) opère transitivement sur $\mathbb{R}^3$.
Donc il existe $\mathcal{A} \in O(3)$ *telle que:*

$$\mathcal{A}T_1(0) = T_2(0) \qquad , \qquad \mathcal{A}N_1(0) = N_2(0) \qquad , \qquad \mathcal{A}B_1(0) = B_2(0)$$

Puisque les bases: $\{T_1(0), N_1(0), B_1(0)\}$ *et* $\{T_2(0), N_2(0), B_2(0)\}$ *sont directes et orthonormées. Alors*

$$det\mathcal{A} = 1$$

Soient $\mathcal{V} = \varphi_2(0) - \mathcal{A}\varphi_1(0) \in \mathbb{R}^3$ *et* ψ *l'isométrie définie par:*

$$\psi(X) = \mathcal{A}X + \mathcal{V}$$

On pose: $\phi = \psi \circ \varphi_1$.
Montrons que: $\phi = \varphi_2$.
On note: $(T_2(s), N_2(s), B_2(s))$ *le repère de Frenet de* Γ_2 *et* $(T(s), N(s), B(s))$ *celui de* Γ_1.
On a:

$$\phi(0) = \varphi_2(0) \qquad et \qquad (T_2(0), N_2(0), B_2(0)) = (T(0), N(0), B(0))$$

D'après la proposition précédente que la courbure et la torsion (notées κ *et* τ *) de* ϕ *sont égales à celles de* Γ_1 , Γ_2.
Soit

$$f(s) = \langle T(s)|T_2(s)\rangle + \langle N(s)|N_2(s)\rangle + \langle B(s)|B_2(s)\rangle$$

En dérivant f *et on utilisant les formules de Frenet, on obtient:*

$$\begin{aligned} f'(s) &= \langle T'(s)|T_2(s)\rangle + \langle T(s)|T_2'(s)\rangle + \langle N'(s)|N_2(s)\rangle + \langle N(s)|N_2'(s)\rangle + \langle B'(s)|B_2(s)\rangle + \langle B(s)|B_2'(s)\rangle \\ &= \kappa[\langle N(s)|T_2(s)\rangle + \langle T(s)|N_2(s)\rangle] - \kappa[\langle T(s)|N_2(s)\rangle + \langle N(s)|T_2(s)\rangle] \\ &\qquad + \tau[\langle B(s)|N_2(s)\rangle + \langle N(s)|B_2(s)\rangle] - \tau[\langle N(s)|B_2(s)\rangle + \langle B(s)|N_2(s)\rangle] \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc f *est constante. (ie)*

$$\forall s \in I \qquad f(s) = f(0) = 3$$

Alors, $\forall s \in I$

$$T(s) = T_2(s) \quad , \quad N(s) = N_2(s) \quad , \quad B(s) = B_2(s)$$

Parsuite

$$\phi = \varphi_2$$

Remarques:

i)- Si la courbure est nulle le repère de Frenet n'est pas bien définie.
ii)- Le théorème 2.2 est un résultat d'unicité. On peut démontrer un résultat d'existence. C'est à dire: Étant données deux fonctions assez lisses

$$\kappa \,\&\, \tau : I \longrightarrow \mathbb{R}^3 \qquad Avec \quad \kappa > 0$$

Il existe une courbe gauche $\Gamma \in \mathbb{R}^3$ *dont* $\kappa \,\&\, \tau$ *sont la courbure et la torsion.*

3. Tangente, plan normal, plan osculateur:

Soit $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *une courbe paramétrée* Γ *par :*

$$\varphi(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

Les équations d'une droite affine de $\mathbb{R}^3$ *dépendent de quatre paramètres.*
Exemple:

$$y = ax + b \qquad \& \qquad z = cx + d$$

On peut voir cette droite comme intersection de deux plans.
Un plan affine de $\mathbb{R}^3$ *admet pour équation cartésienne:*

$$ax + by + cz + d = 0$$

Définition3.1:

La tangente en un point régulier $(x, y, z) \in \Gamma$ *est donnée par les équations:*

$$\begin{cases} y'(X - x) = x'(Y - y) \\ z'(Y - y) = y'(Z - z) \end{cases}$$

Il s'agit de la droite

$$\varphi(t) + R\varphi'(t) = \varphi(t) + RT(t)$$

Où $T(t)$ *désigne le vecteur tangent unitaire à* Γ *au point* $\varphi(t)$.

Définition3.2:

Le plan perpendiculaire à la tangente en un point régulier est appelé plan normal et a pour équation cartésienne:

$$x'(X-x)+y'(Y-y)+z'(Z-z)=0$$

C'est le plan: $\varphi(t)+Vect(N(t),B(t))$

Remarque:

Un plan affine de $\mathbb{R}^3$ *admet pour équation cartésienne:*

$$ax+by+cz+d=0$$

Il dépend donc de trois paramètres qui peuvent être choisis de manière à avoir un ordre de contact, au moins trois avec la courbe Γ*. Le plan correspondant s'appelle la plan osculateur.*

Proposition3.3:

Le plan osculateur est donné par l'équation

$$det\begin{bmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{bmatrix}=0$$

C'est le plan: $\varphi(t)+Vect(T(t),N(t))$

Démonstration:

Soit: $aX+bY+cZ+d=0$ *l'équation d'un plan qui passe par le point* $\varphi=(x,y,z)$ *. Donc*

$$ax+by+cz+d=0$$

On effectue un développement de Taylor-Young des fonctions coordonnées de $\varphi(s)$ *au point* $\varphi(t)=(x(t),y(t),z(t))$ *. Donc*

$$x(s)=x(t)+x'(t)(s-t)+\tfrac{x''(t)}{2}(s-t)^2+\circ((s-t)^2)$$

De même pour $y(s)$ *et* $z(s)$*.*
Le plan a un contact d'ordre au moins trois au point $\varphi(t)$ *si*

$$ax(s)+by(s)+cz(s)+d=\circ((s-t)^2)$$

On obtient alors

$$\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ ax'+by'+cz'=0 \\ ax''+by''+cz''=0 \end{cases}$$

On retranche à la première équation $aX+bY+cZ+d=0$ *. On obtient alors le système homogène*

$$\begin{cases} a(x-X)+b(y-Y)+c(z-Z)=0 \\ \qquad ax'+by'+cz' \qquad =0 \\ \qquad ax''+by''+cz'' \qquad =0 \end{cases}$$

Ce système admet une solution non nulle, donc son déterminant est nul.

$$(i.e) \qquad det \begin{bmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{bmatrix} = 0$$

Le cercle osculateur3.4:

Les équations d'un cercle $\mathcal{C}$ dans $\mathbb{R}^3$ dépendent de sept paramètres. On note (α, β, γ) son centre, R son rayon et (u, v, w) les coordonnées d'un vecteur normal au plan qui contient le cercle $\mathcal{C}$.
Les équations de $\mathcal{C}$ sont alors:

$$\begin{cases} (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2-R^2=0 \\ \quad u(x-\alpha)+v(y-\beta)+w(z-\gamma)=0 \end{cases}$$

Soit Γ une courbe gauche paramétrée par

$$\begin{aligned} \varphi : I &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\longmapsto (x(t), y(t), z(t)) \end{aligned}$$

$\mathcal{C}$ a un contact d'ordre au moins trois avec Γ au point $\varphi(t)$ si et seulement si les équations suivantes sont satisfaites:

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2-R^2=0 \qquad (1)$$
$$x'(x-\alpha)+y'(y-\beta)+z'(z-\gamma)=0 \qquad (2)$$
$$x''(x-\alpha)+y''(y-\beta)+z''(z-\gamma)+x^2+y^2+z^2=0 \qquad (3)$$
$$u(x-\alpha)+v(y-\beta)+w(z-\gamma)=0 \qquad (4)$$
$$ux'+vy'+wz'=0 \qquad (5)$$
$$ux''+vy''+wz''=0 \qquad (6)$$

Les trois dernières équations montrent que le centre (α, β, γ) appartient au plan osculateur. puisque

$$det \begin{bmatrix} x-\alpha & y-\beta & z-\gamma \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} x-\alpha & y-\beta & z-\gamma \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = 0$$

Les trois équations (1) , (2) et (3) forment un système linéaire de trois équations en trois inconnus: $\quad x-\alpha, y-\beta, z-\gamma.$
Si on pose alors: $\qquad A=(y'z''-z'y'') \quad , \quad B=(z'x''-x'z'') \quad$ *et* $\quad C=(x'y''-y'x'').$
On obtient:

$$\begin{cases} x-\alpha = (Cy'-Bz')\dfrac{x'^2+y'^2+z'^2}{A^2+B^2+C^2} \\ y-\beta = (Az'-Cx')\dfrac{x'^2+y'^2+z'^2}{A^2+B^2+C^2} \\ z-\gamma = (Bx'-Ay')\dfrac{x'^2+y'^2+z'^2}{A^2+B^2+C^2} \end{cases}$$

Et

$$R = \sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2} = \frac{(x'^2+y'^2+z'^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

On remarque que A ,B et C sont les coordonnées du vecteur $\varphi' \wedge \varphi''$.
Donc le rayon du cercle osculateur R est l'inverse de la courbure à Γ au point (x, y, z).
Les coordonnées du centre de $\mathcal{C}$ vérifiant

$$\begin{aligned}(\alpha, \beta, \gamma) &= \varphi(t) + \frac{||\varphi'||^2}{||\varphi' \wedge \varphi''||^2}\varphi' \wedge (\varphi' \wedge \varphi'') \\ &= \varphi(t) + \frac{||\varphi'||^2}{||\varphi' \wedge \varphi''||^2}(\langle \varphi', \varphi'' \rangle \varphi' - ||\varphi'||^2 \varphi'')\end{aligned}$$