Université Moulay Ismail
Faculté des Sciences de Meknès
Filère: SMI

Module: Electricité II
Semestre: IV
Année Universitaire: 2019/2020

Série 1

Exercice 1 – Segments de Courant

Trois fils se trouvent aux coins d'un carré, tous transportant des courants de 2 ampères dans les sens indiqués sur la figure ci-dessous (Fig. 1).

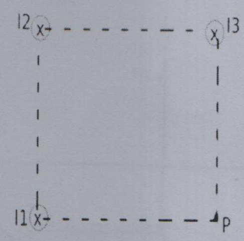


Fig.1

1. Par des considérations de symétrie, déterminer :
   (a) Les variables dont dépend le champ magnétique créé en P ($\vec{B}(P)$).
   (b) La direction du $\vec{B}(P)$ créé par chaque courant.
2. Calculer l'intensité du $\vec{B}(P)$ créé par les trois courants au quatrième coin du carré, point P, avec la longueur de chaque côté du carré est de 1 cm.
3. En gardant les mêmes courants dans les fils 1 et 3, quel devrait être le courant dans le fil 2 pour neutraliser les champs magnétiques des fils 1 et 3 afin qu'il n'y ait pas de champ magnétique au point P ?
4. Maintenant si le point P portant un fil conducteur transportant un courant I4 de 2 ampères, son sens est le même que les autres courants. Déterminer le champ magnétique créé au centre O du carré.

Exercice 2 – Segments de courant & spire semi-circulaire

On considère le circuit suivant :

Les fils 1 et 2 sont rectilignes et de longueurs infinies, M'AM est un demi cercle de centre O, de rayon R, le circuit est parcouru par un courant I, le sens du courant est indiqué sur le circuit (Fig. 2).

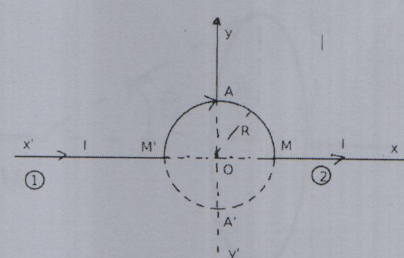


Fig.2

Déterminer le champ magnétique créé par ce circuit :

1. Au centre O,
2. Au point A',

On donne : $\displaystyle\int \frac{d\alpha}{cos\alpha} = ln\left(tg(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4})\right) + Cte$

Exercice 3 – Spire carrée

On considère une spire carrée de côté a parcourue par un courant I (Fig. 3). On veut calculer le champ magnétique $\vec{B}$ en M sur l'axe Oz de la spire.

1. En étudiant la symétrie, déterminer la direction du champ magnétique $\vec{B}$ en M.
2. Exprimer $\vec{B}$.
3. Étudier le comportement à l'infini sur l'axe et vérifier que la spire se comporte comme un dipôle magnétique.

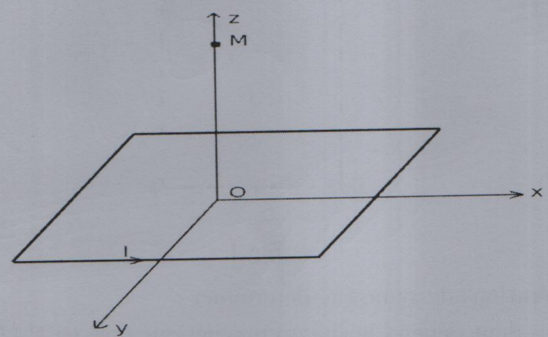


Fig. 3

Exercice 4 – Solénoïde

Soit une spire de rayon R parcourue par un courant I (Fig. 4).

1. Calculer le champ magnétique créé par la spire en M.

On dispose d'un solénoïde de longueur l comportant N spires circulaires jointives de rayon R (Fig. 5), il est traversé par le courant I.

2. En utilisant la loi de Biot et Savart, déterminer le champ magnétique du solénoïde en un point de son axe. Déduire le champ magnétique pour un solénoïde infini (l»R).
3. En utilisant le théorème d'Ampère, trouver le champ magnétique créé par le solénoïde infini.

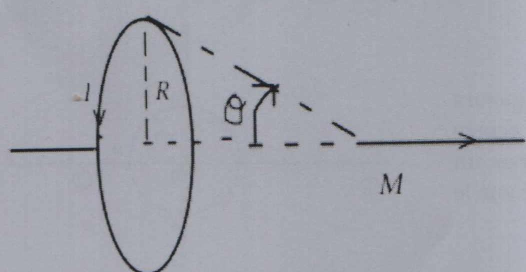


Fig. 4

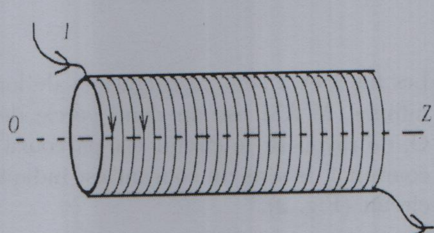
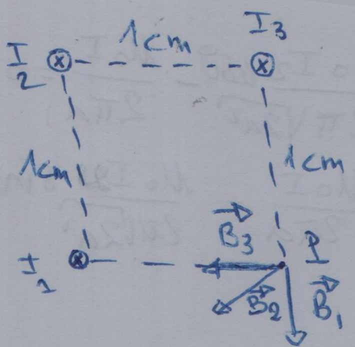


Fig. 5

Exercice 1 :



1- a) La distribution de courant est invariante par translation et par rotation

$\Rightarrow \vec{B}(r,\theta,z) = \vec{B}(r)$

b) Le plan qui contient un fil conducteur et passant par le point P est un plan de symétrie, donc le champ magnétique créé est $\perp$ à ce plan

- La direction des champs est mentionnée sur la figure.

2- selon la loi de Biot et Savart pour un fil rectiligne : $B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$

on a $B_1(r) = B_3(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$ $(a = 1cm,\ I = 2\ A)$

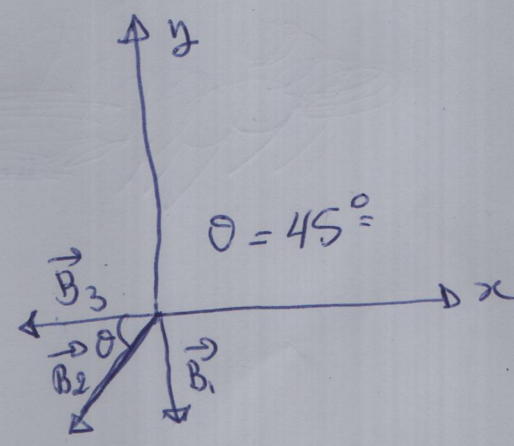
$\mu_0 = 1,2566 . 10^{-6}$ Tm/A

$= \frac{1,2566 \times 2 . 10^{-6}}{2\pi\, 10^{-2}}$

$= 0,4 . 10^{-4}\ T = 4 . 10^{-5}\ T$

$B_2(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R_1}$ $(R_1 = \sqrt{2a^2})$

$= 2.83 . 10^{-5}\ T$



~~suivant~~

$$\vec{B} = \begin{cases} \vec{B}_x = -B_3 \vec{e}_x - B_2 \cos\theta\, \vec{e}_x \\ \vec{B}_y = -B_1 \vec{e}_y - B_2 \sin\theta\, \vec{e}_y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{B}_x = -6 \times 10^{-5} \vec{e}_x \\ \vec{B}_y = -6 \times 10^{-5} e_y \end{cases}$$

$B_T = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = 8.48 . 10^{-5}\ T$

3) Pour que le champ soit nul en P, il faut que $\vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3 = \vec{0}$

$$\begin{cases} B_{1x} + B_{2x} + B_{3x} = 0 \\ B_{1y} + B_{2y} + B_{3y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\dfrac{\mu_0 I_2 \cos\theta}{2\pi\sqrt{2a^2}} - \dfrac{\mu_0 I}{2\pi a} = 0 \\ -\dfrac{\mu_0 I}{2\pi a} - \dfrac{\mu_0 I_2}{2\pi\sqrt{2a^2}} \sin\theta = 0 \end{cases}$$

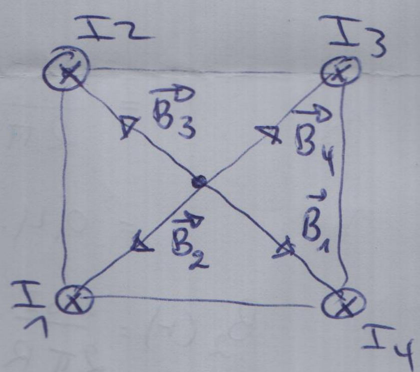
$$\frac{\mu_0 I_2 \cos\theta}{2\pi\sqrt{2a^2}} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi a} \Rightarrow \frac{I_2}{\sqrt{2}}\cos\theta = -I \Rightarrow I_2 = -\frac{I\sqrt{2}}{\cos\theta} \quad \left(\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\Rightarrow I_2 = -2I = -4A.$$

Le courant nécessaire pour annuler le champ magnétique en P est de 4A dans le sens inverse de I_1 et I_3

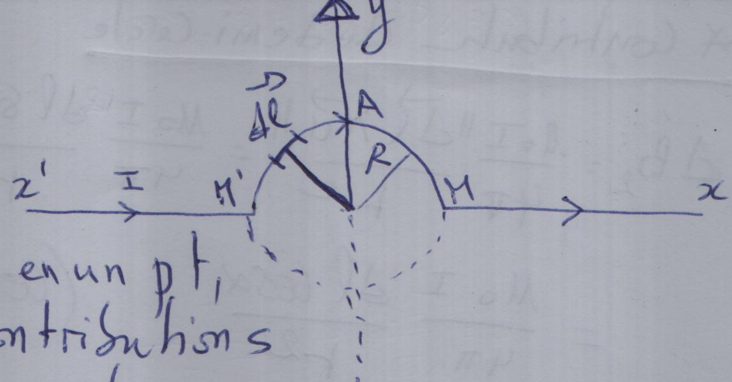
4) les quatres champs créés par les fils ont le même module $\dfrac{\mu_0 I}{\sqrt{2}\pi a}$

on a $\vec{B}_2 = -\vec{B}_4$ et $\vec{B}_3 = -\vec{B}_u \Rightarrow \vec{B}_T = \vec{0}$



Exercice 2

1. Au centre O



Pour trouver le champ magnétique en un pt, il faut ajouter vectoriellement les contributions des conducteurs rectilignes et semi-circulaire en ce pt.

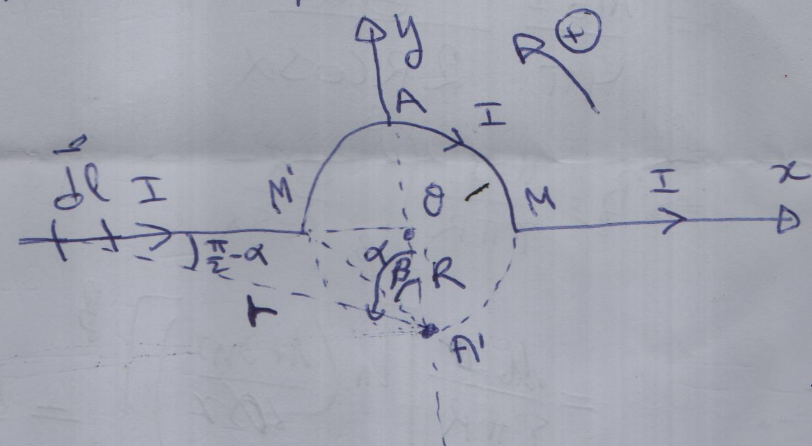
* le champ crée par les deux conducteurs rectilignes est nul, $\vec{dl} \wedge \vec{u} = \vec{0}$

* la contribution du demi-cercle est: $dB = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{\|\vec{dl} \wedge \vec{u}\|}{R^2}$ $\left(\vec{u} = \frac{\vec{R}}{R}\right)$

$\vec{dl} \perp \vec{u} \Rightarrow dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\,dl}{R^2}$

$$\Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} \int_{MAM'} dl = \frac{\mu_0 I\, R}{4\pi R^2} \int_0^{\pi} d\theta = \frac{\mu_0 I}{4R}$$

Au point A':



* Deux fils rectilignes

$$dB_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\|\vec{dl} \wedge \vec{u}\|}{r^2}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{r^2}$$

on a $tg\,\alpha = \frac{l}{R} \Rightarrow dl = \frac{R}{\cos^2\alpha} d\alpha$

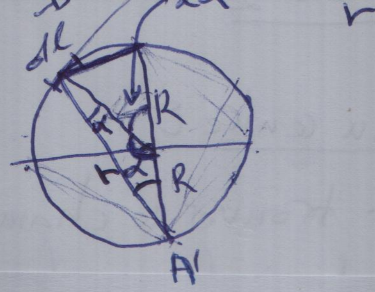
$$dB_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \frac{R \cos\alpha}{\cos^2\alpha} d\alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \frac{R}{\cos\alpha} d\alpha$$

on a $\cos\alpha = \frac{R}{r} \Rightarrow dB_1 = \frac{\mu_0 I \cos^2\alpha}{4\pi R^2} \frac{R}{\cos\alpha} d\alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\cos\alpha}{R} d\alpha$

$$B_1 = \int_{\beta}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \left[\sin\alpha\right]_{\beta}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}\left(1 - \sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Le champ magnétique crée par l'autre demi-droite a le même module

$$dB_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\|\vec{dl}\wedge\vec{u}\|}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{dl\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)}{r^2}$$



$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{dl\cos\alpha}{r^2} \qquad \left(\cos\alpha = \frac{r}{2R}\right)$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{dl\cos\alpha}{(2R)^2\cos^2\alpha}\, d\alpha$$

on a : $dl = R\,d\theta = 2R\,d\alpha$ $(\theta = 2\alpha)$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{2\cancel{R}\,d\alpha\,\cancel{\cos\alpha}}{4R^{\cancel{2}}\cos^{\cancel{2}}\alpha}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\alpha}{2R\cos\alpha}$$

$$\Rightarrow B_2 = \frac{\mu_0 I}{8\pi R}\int_{-\beta}^{\beta}\frac{d\alpha}{\cos\alpha}$$

$$2\alpha + x = \pi$$
$$x + \theta = \pi$$
$$2\alpha + \cancel{x} - \cancel{x} - \theta = 0$$
$$2\alpha - \theta = 0$$
$$\theta = 2\alpha$$

on sait que $\int\frac{d\alpha}{\cos\alpha} = \ln\left(tg\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right) + \text{cte}$

alors $B_2 = \frac{\mu_0 I}{8\pi R}\left[\ln\left(tg\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)\right]_{-\beta}^{\beta}$

$$\Rightarrow B_2 = \frac{\mu_0 I}{8\pi R}\left(\ln\left(tg\left(\frac{\beta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right) - \ln\left(tg\left(-\frac{\beta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)\right)$$

on a $\beta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow B_2 = \frac{\mu_0 I}{8\pi R}\left(\ln\left(tg\left(\frac{3\pi}{8}\right)\right) - \ln\left(tg\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)\right)$

$$= \frac{\mu_0 I}{8\pi R}\ln\left(\frac{tg\left(\frac{3\pi}{8}\right)}{tg\frac{\pi}{8}}\right)$$

$$= \frac{\mu_0 I}{8\pi R}\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right) = \frac{\mu_0 I}{8\pi R}\ln\left(\sqrt{2}+1\right)^2$$

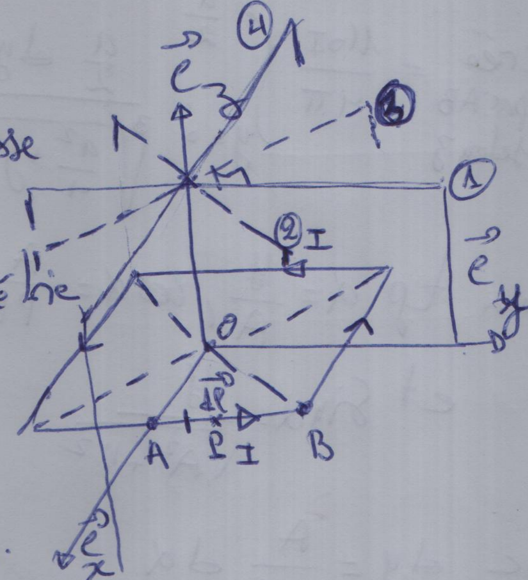
$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi R}\ln(\sqrt{2}+1)$$

Le champ magnétique total en A' est donc $B = B_2 + 2B_1 \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}\left[\ln(\sqrt{2}+1) + 2 - \sqrt{2}\right]$

Exercice 3

1) Le plan qui contient l'axe (Ox) et passe par M est un d'antisymétrie.

En fait, il y a quatre plans d'antisymétrie qui passent par M (voir figure)



plan 1) Contient l'axe (Oy) qui passe par M.

plan 4) " " (Ox) " ".

plans (2) et (3) contiennent les deux diamètres du carré et passent par M

Le champ en M doit appartenir à ces plans $\Rightarrow \vec{B}(z) = B(z)\,\vec{e}_z$

2) On a chaque demi côté créant selon z le même B_z

$$\vec{B}(z) = 8\,B_z(z)\,\vec{e}_z$$

$B_z(z)$ est le champ créé par AB en M

Maintenant on va calculer le champ créé par AB en M

$$\vec{B}_{\text{créé par } AB} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{AB} \frac{\vec{dl}\wedge\vec{PM}}{\|\vec{PM}\|^3}$$

On a : $\vec{OP} = \frac{a}{2}\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y$

$\vec{dl} = \vec{dP} = dy\,\vec{e}_y$

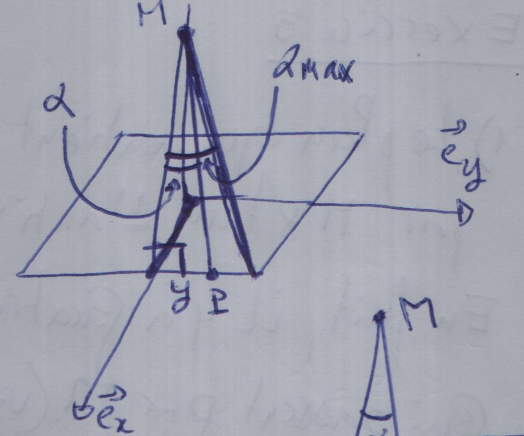
On a aussi $\vec{OM} = z_M\,\vec{e}_z$ et $\vec{PM} = \vec{PO} + \vec{OM} = \vec{OM} - \vec{OP}$

$= z_M\vec{e}_z - \frac{a}{2}\vec{e}_x - y\,\vec{e}_y$

$\Rightarrow \|\vec{PM}\| = \sqrt{\frac{a^2}{4} + y^2 + z_M^2}$

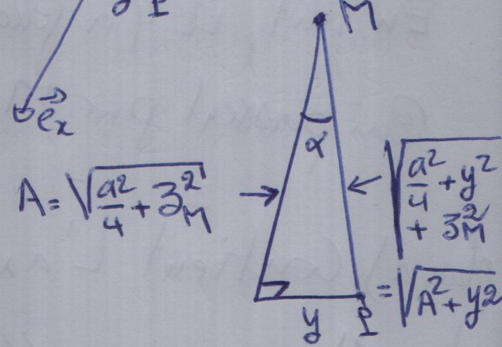
et $\vec{dl}\wedge\vec{PM} = dy\,z_M\,\vec{e}_y\wedge\vec{e}_z - dy\,\frac{a}{2}\,\vec{e}_y\wedge\vec{e}_x = dy\,z_M\,\vec{e}_x + dy\,\frac{a}{2}\,\vec{e}_z$

$$B_{\substack{\text{créé}\\ z\ \text{par } AB\\ \text{selon } z}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{y=0}^{\frac{a}{2}} \frac{\frac{a}{2}\,dy}{\sqrt{\frac{a^2}{4}+y^2+z_M^2}^{\,3}}$$



on a $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{A}$, $\cos\alpha = \frac{A}{PM} = \frac{A}{\sqrt{A^2+y^2}}$

et $\sin\alpha = \frac{y}{\sqrt{A^2+y^2}}$



donc $dy = \frac{A}{\cos^2\alpha}\,d\alpha$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{\sqrt{\frac{a^2}{4}+y^2+z_M^2}^{\,3}} = \int_0^{\alpha_{max}} \frac{A\,d\alpha}{\cos^2\alpha\,\sqrt{A^2+y^2}^{\,3}}$$

$$= \frac{1}{A^2}\int \frac{1}{\cos^2\alpha}\,\frac{A^3}{(A^2+y^2)^{3/2}}$$

On a $\cos\alpha = \frac{A}{(A^2+y^2)^{1/2}} \Rightarrow \int \frac{dy}{\left(\frac{a^2}{4}+y^2+z_M^2\right)^{3/2}} = \frac{1}{A^2}\int_0^{\alpha_{max}} \frac{\cos^3\alpha}{\cos^2\alpha}\,d\alpha$

$$= \frac{1}{A^2}\left[\sin\alpha\right]_0^{\alpha_{max}}$$

$$= \frac{1}{A^2}\sin\alpha_{max}$$

$$\Rightarrow B_{z\,AB} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\,\frac{a/2}{A^2}\sin\alpha_{max}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\,\frac{a/2}{\left(\frac{a^2}{4}+z_M^2\right)}\,\frac{a/2}{\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{4}+z_M^2}}$$

$$\Rightarrow \vec{B}_T = 8\,B_{z\,AB} = \frac{\mu_0 I a^2}{2\pi}\,\frac{1}{\left(\frac{a^2}{4}+z_M^2\right)\sqrt{\frac{a^2}{2}+z_M^2}}\,\vec{e}_z$$

3) si $z \to +\infty$

$$\vec{B} \simeq \frac{\mu_0 I a^2}{2\pi} \frac{1}{z^3} \vec{e}_z$$

on a le moment magnétique d'un dipôle magnétique est $\vec{M} = I.\vec{S}$

dans notre cas $S = a^2$

donc $\vec{M} = I a^2 \vec{e}_z$

on a le champ magnétique d'un dipôle magnétique est :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 M}{4\pi r^3} \left(2\cos\theta \, \vec{e}_r + \sin\theta \, \vec{e}_\theta\right) \text{ (coordonnées sphérique)}$$

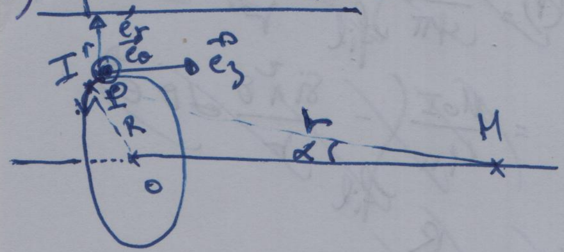
pour $z \to +\infty$ $\theta = 0$ donc $\cos\theta = 1$ et $\sin\theta = 0$ et $\vec{e}_r = \vec{e}_z$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 M}{2\pi r^3} \vec{e}_z$$

$$= \frac{\mu_0 I a^2}{2\pi z^3} \vec{e}_z$$ donc c'est vérifié

Exercice 11

1) Spire circulaire



$$d\vec{B}(\ell, z) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{I\, \vec{d\ell} \wedge \vec{PM}}{\|\vec{PM}\|^3}$$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\vec{d\ell} \wedge (\vec{PO} + \vec{OM})}{PM^3}.$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\vec{d\ell} \wedge (-R\vec{e_r} + z\vec{e_z})}{PM^3}$$

on a $\vec{d\ell} = R.d\theta\, \vec{e_\theta}$

$$\Rightarrow d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R\,d\theta\,(R\vec{e_z} + \cancel{z\vec{e_r}})}{(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R^2}{(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\, d\theta\, \vec{e_z}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R^2}{(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} d\theta\, \vec{e_z}$$

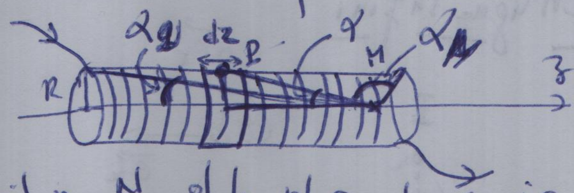
$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R^2}{(R^2+z^2)^{3/2}}\, 2\pi\, \vec{e_z}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2R} \frac{R^3}{(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\, \vec{e_z}$$

on a $\sin\alpha = \frac{R}{r} = \frac{R}{(R^2+z^2)^{1/2}}$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3\alpha\, \vec{e_z}$$

2) Solénoïde fini



soit $n = \frac{N}{L}$ est le nbre de spire par unité de longueur

N : est le nbre de spire dans le solénoïde

si $N = nL$

alors le nbre de spire dans dz est $n\,dz$

si dI = nbre spire × I

$= n\,dz\,I$

Le champ magnétique élementaire crée par $n\,dz$ spires de courant élémentaire dI est

$$dB = \frac{\mu_0\, dI}{2R}\sin^3\alpha = \frac{\mu_0 n\, dz\, I}{2R}\sin^3\alpha$$

par symétrie $\vec{dB}$ est suivant (Oz).

on a $\tan\alpha = \frac{R}{z} \Rightarrow z = \frac{R}{\tan\alpha} \Rightarrow dz = \frac{-R}{\sin^2\alpha}\, d\alpha$

$$B = -\frac{\mu_0 n I}{2R} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{R\sin^3\alpha}{\sin^2\alpha}\, d\alpha = +\frac{\mu_0 n I}{2} \left[\cos\alpha\right]_{\alpha_1}^{\alpha_2}$$

$$= \frac{\mu_0 n I}{2}(\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1)$$

Solénoïde infini

$\alpha_2 \to 0$, et $\alpha_1 \to \pi$

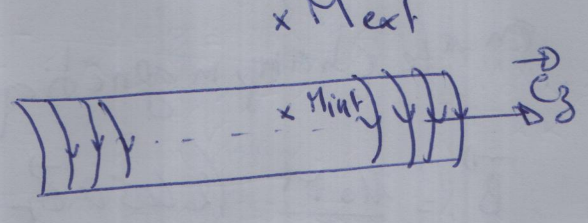
$$B = \frac{\mu_0 n I}{2} \times 2 = \mu_0 n I$$

Exercice 4 (suite)

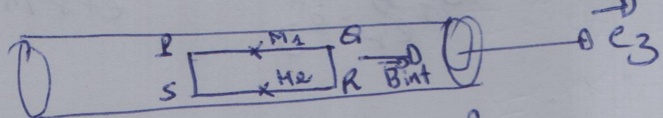
3) Trouver le champ magnétique du solénoïde infini en appliquant le théorème d'Ampère :

choix du contour : on choisit un contour qui va être perpendiculaire ou tangente aux lignes de champ magnétique, on sait que le champ magnétique est dirigé suivant Oz, alors le contour est un cadre rectangulaire (voir figure).

on va calculer le champ magnétique à l'intérieur et à l'extérieur du solénoïde



1er cas : contour à l'intérieur du solénoïde



$$C = \int_P^Q \vec{B}\cdot\vec{dl} + \int_Q^R \vec{B}\cdot\vec{dl} + \int_R^S \vec{B}\cdot\vec{dl} + \int_S^P \vec{B}\cdot\vec{dl}$$

$$= B(M_1)\,PQ + 0 - B(M_2)\,RS + 0 = B(M_1)\,PQ - B(M_2)\,RS = \mu_0 I_{enl}$$

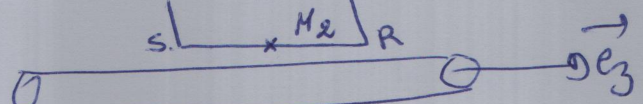
pour un contour à l'intérieur $I_{enlac} = 0$

et on a : $PQ = RS \Longrightarrow B(M_1)\,PQ = B(M_2)\,RS$

$$\Longrightarrow B(M_1) = B(M_2) = B_{int}$$

on peut conclure que le champ magnétique à l'intérieur du solénoïde est uniforme.

2ème cas : contour à l'extérieur du solénoïde

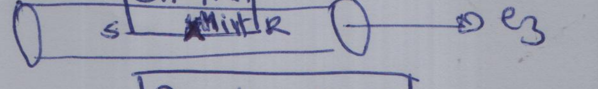


$B(M_1) = B(M_2) = B_{ext}$

et comme B_{ext} est nul à l'infini

on peut conclure que B_{ext} est nul.

3ème cas on choisit un contour "à cheval"



$C = B_{ext}\,PQ - B_{int}\,RS = \mu_0 I_{enl} = \mu_0(-n\,PQ\,I)$

on a $PQ = RS \Longrightarrow B_{int} = B_{ext} + \mu_0 n I$ et puisque $B_{ext} = 0 \Longrightarrow \boxed{B_{int} = \mu_0 n I}$