(*) T.D. : Pour tout contact : r.chibloun@umi.ac.ma

- La semaine précédente, j'ai donné des indications sur a), b), c) de l'exercice 20 de la Série 1. **15**

Pour e) et f), on les déduit de d).

Pour d) :

Soit $(x,y) \in G^2$ tel que $o(x)=2$ et $o(y)=3$

(Justifier l'existence de x et y).

donc Justifier $G = \{e, x, y, y^2, xy, xy^2\} =$

$\underset{\uparrow \text{ Justifier}}{=} \langle \{x,y\} \rangle$

Montrer que : $xyxy \notin \{x, y, y^2, xy, xy^2\}$

et alors $xyxy = e$

Donc $G \simeq D_3$.

- Ex 23 : Si $o(G) \in \{1, 2, 3, 4=2^2, 5, 6=2.3, 7, 9=3^2, 10=2.5, 11, 13, 14=2.7, 15=3\times5\}$ c'est fait dans les ex. précédents. Il reste $o(G) \in \{8, 12\}$.

Exercice 24 / Série 1 // Soit G un groupe simple d'ordre 60 ((ie) les s/g distingués de G sont G et {e}).

1°) Montrer que G admet six 5-Sylow

16

Preuve:

<< On a $|G| = 60 = 2^2 \times 3 \times 5$

. un 5-Sylow de G est un s/g de G d'ordre 5

. un 2-Sylow de G est un s/g de G d'ordre $2^2 = 4$

. le nbre de 5-Sylow de G est congru à 1 modulo 5 et divise $|G| = 60$ >> ((en fait divise $[G : H] = 12$ où H est un 5-Sylow))

– Soit k le nbre de 5-Sylow, $k \neq 0$ car $5 / 60 = |G|$

$k = 1 + 5\alpha / 60$ (ie) $\begin{cases} k \in \{6, 11, 16, 21, 26, 31, 36, 41, 46, 51, 56\} \\ \text{et} \\ k / 60 \end{cases}$

d'où forcément $\underline{k = 6}$

2°) Soit S un 5-Sylow de G et $N_G(S)$ le normalisateur de S dans G. Quel est l'indice de $N_G(S)$ dans G?

Preuve: On fait opérer G sur l'ensemble $\mathcal{H}$ des s/g de G par conjugaison (ie) $G \times \mathcal{H} \longmapsto \mathcal{H}$

$(g, H) \longmapsto gHg^{-1}$

Le stabilisateur de S est $G(S) = \{g \in G / g.S = gSg^{-1} = S\} = N_G(S)$.

17

L'orbite de S est $G.S = \{g.S = gSg^{-1} / g \in G\}$

(ie) l'ensemble des s/g de G conjugués à S

On sait que $\underbrace{\operatorname{Card}(G.S)}_{6 \text{ d'après } 1} = [G : G(S)] = [G : N_G(S)]$.

(ie)

3°) $\Psi_g : G \times \left(G/N_G(S)\right)_g \longrightarrow \left(G/N_G(S)\right)_g$

$$\left(g, xN_G(S)\right) \longmapsto gxN_G(S)$$

définit une action (dite à gauche) de G sur $\left(G/N_G(S)\right)_g$ / transitive et fidèle.

On déduit que G se plonge dans S_6, on notera J l'image de ce plongement dans S_6.

Preuve: « En général, si H est un s/g de G

$$G \times (G/H)_g \longrightarrow (G/H)_g$$

$$(g, xH) \longmapsto gxH$$ est une

action du groupe G sur $(G/H)_g$ » « $e.xH = xH$

et $y.(z.xH) = y.(zxH) = yzxH = (yz).xH$ »

≪ Soit E un G-ensemble

- On dit que G opère transitivement sur E si E n'a qu'une seule orbite (qui est forcément E) (ie) $\forall x \in E, G.x = \{gx / g \in G\} = E$
- Si S_E désigne le groupe des bijections de $E \longrightarrow E$, l'application $\gamma : G \longmapsto S_E$

$$g \longmapsto \gamma(g) = \gamma_g : E \longmapsto E$$
$$x \longmapsto g.x$$

(18)

est un homomorphisme de groupes

et $\operatorname{Ker} \gamma = \{g \in G / \gamma_g = id_E$ (ie) $\forall x \in E : g.x = x\}$

- On dit que G opère fidèlement sur E si γ est injectif, et alors G est isomorphe à un s/g de S_E ≫

* Soit $xN_G(S) \in \left(G/N_G(S)\right)_g$

l'orbite de $xN_G(S)$ est $G.xN_G(S) = \{y.xN_G(S) = yxN_G(S) / y \in G\}$

$\square$ q $G \cdot xN_G(S) = \left(G/N_G(S)\right)_g = \{g \cdot N_G(S) / g \in G\}$

"$\subseteq$" évidente.

"$\supseteq$" Si $g \in G$, $g N_G(S) = (g x^{-1}) x N_G(S) \in$

$\in G \cdot x N_G(S)$.

19

Ainsi l'opération est transitive.

* Montrons qu'elle est fidèle :

Soit $\gamma : G \longrightarrow S\left(\left(G/N_G(S)\right)_g\right)$

$$g \longmapsto \gamma(g) = \gamma_g,$$

où $\gamma_g : \left(G/N_G(S)\right)_g \longrightarrow \left(G/N_G(S)\right)_g$

$$xN_G(S) \longmapsto gxN_G(S),$$

l'homomorphisme de groupes, $\operatorname{Ker}\gamma$ est un s/g distingué de G qui est simple, donc $\operatorname{Ker}\gamma = G$ ou $\operatorname{Ker}\gamma = \{e\}$. Si $\operatorname{Ker}\gamma = G$ alors $\forall g \in G$, $\gamma(g) = \gamma_g = \mathrm{id}_{\left(G/N_G(S)\right)_g}$ (i.e)

$\forall x \in G : \gamma_g(x N_G(S)) = g x N_G(S) = x N_G(S)$

donc $x^{-1} x N_G(S) = x N_G(S)$

(i.e) $N_G(S) x N_G(S)$

20

(i.e) $x \in N_G(S)$ (i.e) $N_G(S) = G$

(i.e) $\{g \in G / g S g^{-1} = S\} = G$

(i.e) S est un s/g distingué de G

donc $S = \{e\}$ ou $S = G$ (absurde)

car $|S| = 5$

Donc $\ker \gamma = \{e\}$ et γ injectif

d'où l'action est fidèle et $\gamma(G) =$ s/g de $S_{(G/N_G(S))_g}$

et comme $|(G/N_G(S))| = [G : N_G(S)] = 6$

alors G est isomorphe à un s/g de S_6.

(On identifie $S_{(G/N_G(S))_g}$ avec S_6)

4°) Montrer que $J \subseteq A_6$:

Comme A_6 est un s/g distingué de S_6,

$\gamma^{-1}(A_6)$ est un s/g distingué de G

donc égal à $\{e\}$ ou égal à G.

21

Si $\gamma^{-1}(A_6) = \{e\}$, alors

$$G \longrightarrow \frac{S_6}{A_6}$$

$$g \longmapsto \overline{\gamma(g)} = \overline{\gamma_g}$$

est un homomorphisme injectif, ce qui est absurde

puisque $|G| = 60$ et $\left|\frac{S_6}{A_6}\right| = 2$.

Donc $\gamma^{-1}(A_6) = G$, et alors

$$J = \gamma(G) = \gamma(\gamma^{-1}(A_6)) \subseteq A_6.$$

5°) Considérons l'action à gauche, transitive et fidèle, de A_6 sur $\left(\frac{A_6}{J}\right)_g$ définie par

$$A_6 \times \left(\frac{A_6}{J}\right)_g \longrightarrow \left(\frac{A_6}{J}\right)_g$$

$$(g, xJ) \longmapsto gxJ$$

((car A_6 est simple))

on regarde A_6 comme le groupe des permutations paires sur l'ensemble $(A_6/J)_g = \{J_1 = J, J_2, \dots, J_6\}$

22

$\boxed{\Pi}_g$ $J \subseteq A_5$.

Preuve : Soit $g \in J$, on a : $gJ = J$

donc les éléments de J sont des permutations paires de $\{J_2, \dots, J_6\}$ qui laissent fixe J_1, donc ce sont des permutations paires de $\{J_2, \dots, J_6\}$, et alors $J \underset{\Pi_g}{\subseteq} A_6 \cap S_5 = A_5$.

6°) Conclure que G est isomorphe à A_5.

On a $J = \gamma(G)$, $G \simeq J$

d'ou $|J| = 60$ et comme $|A_5| = \frac{5!}{2} = 3 \times 4 \times 5 = 60$

alors $J = A_5$, d'ou

$$G \simeq A_5.$$

C.Q.F.D