Série n°2 : Intégrale Généralisée et Équations différentielles.

Exercice 1.

1. En utilisant les primitives usuelles, déterminer la nature des intégrales suivantes :

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan(x)\, dx, \qquad B = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)}}\, dx, \qquad C = \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2}\, dx.$$

2. Étudier la nature des intégrales suivantes :

$$A = \int_0^1 \frac{x^2+1}{\sqrt{x}(1-x)}\, dx, \quad B = \int_1^{+\infty} x^{2020}e^{-x}\, dx, \quad C = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+2-cos(x)}\, dx,$$

$$D = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x}\, dx, \quad E = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x}}\, dx, \quad F = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(1+\sin(x))\, dx.$$

$$G = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(x)}{x^2}\, dx, \quad H = \int_{-\infty}^{-1} \frac{e^{\cos(x)}}{x}\, dx, \quad I = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}\, dx, \quad J = \int_0^{+\infty} \cos(x^2)\, dx.$$

3. Montrer la convergence et calculer :

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(t-a)(b-t)}} \quad (a<b), \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\, dx.$$

Exercice 2.

1. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que l'intégrale généralisée $\int_0^1 f(x) \ln x\, dx$ est absolument convergente.
2. Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction positive et décroissante telle que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} f(x)\, dx$ converge. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x) = 0$.
3. Soit $f : [0,1[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que f' soit bornée. Montrer que $\lim\limits_{1} f$ existe.

Exercice 3. Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\, dt$ converge et soient $a, b > 0$. Pour tout $x > 0$, on pose :

$$F(x) := \int_x^{+\infty} \frac{f(at)-f(bt)}{t}\, dt \quad \text{et} \quad G(x) := \int_{ax}^{bx} \frac{f(t)}{t}\, dt.$$

1. Montrer que $F = G$.
2. Montrer que si une fonction $g : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ est continue et nulle en 0, alors $\lim\limits_{x\to 0} \int_{ax}^{bx} \frac{g(t)}{t}\, dt = 0$.

3. Déduire des deux questions précédentes que
$$\int_0^{+\infty} \frac{f(at)-f(bt)}{t}\,dt = f(0)\ln\frac{b}{a}.$$
4. Application : montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\,dt = \ln\frac{b}{a}$.

Exercice 4. Résoudre les équations différentielles suivantes :
(E_1) : $(1+x)y' + y - 2 = 0$,
(E_2) : $y'' - 3y' + 2y = 1 + 2e^x$.

Exercice 5. Résoudre les équations différentielles suivantes :
(Sep) : $(\cos t)y' = (\sin t)y^4$,
(Ber) : $y' = y + ty^3$,
(Ric) : $y' = (t-1)y + y^2 - t$, sachant qu'elle admet une solution particulière constante.

Exercice 6 (facultatif). Étudier la nature des intégrales suivantes :
$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{4x^2+x+1}}\,dx,\quad \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x}\,dx,\quad \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\,dx,\quad \int_0^{+\infty} 2^{-x}x^4\,dx,$$
$$\int_0^1 \frac{dx}{1-\sqrt{x}},\quad \int_0^1 \frac{dx}{(\tan x - x)^\alpha},\quad \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x^\alpha(1-x)^\beta}\,dx,\quad \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^{\arctan x}}\,dx.$$
$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha}\,dx,\quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx,\quad \int_0^1 \sin(1/x)\,dx,\quad \int_0^1 \frac{dx}{\arccos x},\quad \int_0^{+\infty} \sin(x^2)\,dx,$$
$$\int_0^{+\infty} \cos(x^\alpha)\,dx,\quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\,dx,\quad \int_1^{+\infty} \left(1-\cos\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\sin x\,dx,\quad \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^\alpha}\,dx.$$

Exercice 7 (facultatif). Soient $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction localement intégrable, et $I_n = \displaystyle\int_0^n f(x)\,dx$. On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = I \in \mathbb{R}$. Est-il vrai que sous cette hypothèse :

1. Si l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ converge alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = I$.
2. Si f est positive alors l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ converge ?
3. Si f est positive alors $\lim\limits_{+\infty} f = 0$?
4. f admet en $+\infty$ une limite (finie ou infinie), alors l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ converge ?
5. Si f est dérivable et de dérivée bornée, alors l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ converge ?

Exercice 8 (facultatif). Montrer la convergence et calculer :
$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2},\quad \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}},\quad \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t+1)(t+2)},\quad \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1},\quad \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}\,dt$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x+2)(x+3)}, \quad \int_3^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-3x+2)^2}, \quad \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\cos t \, dt, \quad \int_4^5 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(t-4)(5-t)}},$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)(1+t^\alpha)}\, dt, \quad (\alpha \in \mathbb{R}), \int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{1-t}}\, dt, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(a+x^2)(b+x^2)} \quad (a, b > 0).$$

Exercice 9 (facultatif). Soit $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t}\, dt$.

1. Montrer que I est convergente.
2. Pour $\varepsilon > 0$, établir la relation :
$$\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t}\, dt = \int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{e^{-t}}{t}\, dt.$$
3. En déduire le calcule de I (utiliser la première formule de la moyenne).
4. En déduire le calcul de $\displaystyle\int_0^1 \frac{x-1}{\ln(x)}\, dx$ (Poser $x = e^{-t}$).

Exercice 10 (facultatif). Soit $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t^3+1)^n}$, où n est un entier naturel.

1. Étudier pour quelles valeurs de n l'intégrale I_n converge.
2. Calculer I_1.
3. Montrer que si $n \geq 1$, on a : $I_{n+1} = \dfrac{3n-1}{3n} I_n$.
4. En déduire l'expression de I_n.

Exercice 11 (facultatif). Soit $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}(t^2+1)}$.

1. Montrer que I est convergente.
2. Calculer $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1}$.
3. En déduire I (poser $x = \sqrt{t}$).

Exercice 12 (facultatif). En posant $u(x) = (1+x^2)y(x)$, résoudre l'équation différentielle suivantes :

$$(E) : \quad (1+x^2)y'' + 4xy' + (1-x^2)y = 0.$$

Corrigé de la Série n°2

Exercice 1.

1. $*$ La nature de $A = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan(x)\, dx$:

   La fonction $t \mapsto \tan(x)$ est localement intégrable sur $[0; \frac{\pi}{2}[$ car elle est continue. Il y a donc un problème en $\frac{\pi}{2}$.

$$A = \lim_{t\to\frac{\pi}{2}} \int_0^t \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\, dx = \lim_{t\to\frac{\pi}{2}} \Big[-\ln(|\cos(x)|)\Big]_0^t = -\lim_{t\to\frac{\pi}{2}} \ln(|\cos(t)|) = +\infty.$$

   Donc, l'intégrale A est divergente.

   $*$ La nature de $B = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)}}\, dx$:

   La fonction $t \mapsto \dfrac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)}}$ est localement intégrable sur $]0; \frac{\pi}{4}]$ (car continue). Pour étudier la convergence de cette intégrale, il suffit de se préoccuper du comportement au voisinage de 0. Soit $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{4}$. L'integrand est de la forme $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$ avec $u = \sin$ donc se primitive en $2\sqrt{u}$:

$$B = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)}}\, dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \Big[2\sqrt{\sin(x)}\Big]_\varepsilon^{\frac{\pi}{4}} = \lim_{\varepsilon\to 0} 2\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}} - 2\sqrt{\sin(\varepsilon)} = 2^{\frac{3}{4}},$$

   donc l'intégrale B est convergente et $B = 2^{\frac{3}{4}}$.

   $*$ La nature de $C = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2}\, dx$:

   La fonction $t \mapsto xe^{-x^2}$ est continue sur $]-\infty, +\infty[$, donc le problème se pose en $+\infty$ et en $-\infty$. Soit $c \in \mathbb{R}$, on a

$$\int_c^{+\infty} xe^{-x^2}\, dx = \lim_{A\to+\infty} \int_c^A xe^{-x^2}\, dx = \lim_{A\to+\infty} \Big[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\, dx\Big]_c^A = \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{2}e^{-A^2} + \frac{1}{2}e^{-c^2} = \frac{1}{2}e^{-c^2},$$

   et

$$\int_{-\infty}^c xe^{-x^2}\, dx = \lim_{A\to-\infty} \int_A^c xe^{-x^2}\, dx = \lim_{A\to-\infty} \Big[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\, dx\Big]_A^c = -\frac{1}{2}e^{-c^2} + \lim_{A\to+\infty} \frac{1}{2}e^{-A^2} = -\frac{1}{2}e^{-c^2}.$$

   Donc, les deux intégrales $\displaystyle\int_c^{+\infty} xe^{-x^2}\, dx$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^c xe^{-x^2}\, dx$ sont convergentes. Par suite, l'intégrale B est convergente et on a

$$B = \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2}\, dx = \int_{-\infty}^0 xe^{-x^2}\, dx + \int_0^{+\infty} xe^{-x^2}\, dx = 0.$$

2. $*$ La nature de l'intégrale $A = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^2+1}{\sqrt{x}(1-x)}\,dx$:

La fonction $x \mapsto \dfrac{x^2+1}{\sqrt{x}(1-x)}$ est continue sur $]0,1[$, donc localement intégrable. Soit $0<c<1$.

$-$ Au voisinage de 0 on a : $\dfrac{x^2+1}{\sqrt{x}(1-x)} \underset{0^+}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ et $\displaystyle\int_0^c \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ est une intégrale de Riemann convergente (car $\alpha = \dfrac{1}{2} < 1$), par le critère de comparaison, l'integrale $\displaystyle\int_0^c \frac{x^2+1}{\sqrt{x}(1-x)}\,dx$ converge.

$-$ Au voisinage de 1 on a : $\dfrac{x^2+1}{\sqrt{x}(1-x)} \underset{1^-}{\sim} \dfrac{2}{1-x}$ et $\displaystyle\int_c^1 \frac{2}{1-x}\,dx$ est une intégrale de Riemann divergente (car $\alpha = 1 \geq 1$), par le critère de comparaison, l'integrale $\displaystyle\int_c^1 \frac{x^2+1}{\sqrt{x}(1-x)}\,dx$ diverge.

Conclusion : l'integrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2+1}{\sqrt{x}(1-x)}\,dx$ diverge (CV+DV=DV).

$*$ La nature de l'intégrale $B = \displaystyle\int_1^{+\infty} x^{2020}e^{-x}\,dx$:

La fonction $x \mapsto x^{2020}e^{-x}$ est continue (donc localement intégrable) sur $[1,+\infty[$. D'où le problème se pose en $+\infty$. Puisque $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2(x^{2020}e^{-x}) = 0$, d'après les règles de Riemann ($\alpha = 2 > 1$), l'intégrale B converge.

$*$ La nature de l'intégrale $C = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+2-cos(x)}\,dx$:

La fonction $x \mapsto \dfrac{x^2}{x^4+2-cos(x)}\,dx$ est paire et localement intégrable sur $]-\infty,+\infty[$, donc les deux intégrales $C = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+2-cos(x)}\,dx$ et $C' = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+2-cos(x)}\,dx$ sont de même nature (dans le cas de convergence on a $C = 2C'$).

Au voisinage de $+\infty$ on a : $\dfrac{x^2}{x^4+2-cos(x)} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^2}$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ est une intégrale de Riemann convergente ($\alpha = 2 > 1$). Donc, d'après le critère de comparaison, l'intégrale C' converge, par suite l'intégrale C converge.

$*$ La nature de l'intégrale $D = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x}\,dx$:

La fonction $x \mapsto \dfrac{\sin^2(x)}{x}$ est continue sur $]0,+\infty[$, il y a donc deux problèmes en 0 et en $+\infty$. Soit $c \in]0,+\infty[$.

$-$ L'intégrale $D_1 := \displaystyle\int_0^c \frac{\sin^2(x)}{x}\,dx$ est convergente car la fonction $x \mapsto \dfrac{\sin^2(x)}{x}$ admet une limite finie en 0 $\left(\displaystyle\lim_{x\to0^+} \frac{\sin^2(x)}{x} = \lim_{x\to0^+} \sin(x)\frac{\sin(x)}{x} = 0\times1 = 0\right)$.

$-$ Pour l'intégrale $D_2 := \displaystyle\int_c^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x}\,dx$ on a

$$D_2 = \int_c^{+\infty} \frac{1-\cos(2x)}{2x}\,dx = \int_c^{+\infty} \frac{1}{2x}\,dx - \int_c^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{2x}\,dx := D_2' + D_2''$$

$+$ D_2' est une intégrale de Riemann divergente ($\alpha = 1 \leq 1$).

+ Pour D_2'' on va utiliser l'intégration par parties :

$$D_2'' = \left[\frac{-\sin(2x)}{4x^2}\right]_c^{+\infty} + \int_c^{+\infty} \frac{\sin(2x)}{4x^2}\,dx = \frac{\sin(2c)}{4c^2} + \frac{1}{4}\int_c^{+\infty} \frac{\sin(2x)}{x^2}\,dx.$$

Comme $\left|\dfrac{\sin(2x)}{x^2}\right| \leq \dfrac{1}{x^2}$ et $\displaystyle\int_c^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ est une intégrale de Riemann convergente, alors D_2'' est convergente, par suite D_2 diverge.
Conclusion : l'intégrale $D = D_1 + D_2$ diverge (CV+DV=DV).

$*$ La nature de l'intégrale $E = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x}}\,dx$:

La fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x}}$ est continue sur $]0, +\infty[$, le problème se pose donc en 0 et en $+\infty$. Soit $c > 0$,

$-$ Au voisinage de 0 on a : $\dfrac{e^{-\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x}} \underset{0^+}{\sim} \dfrac{e^{-1}}{\sqrt{x}}$ et $\displaystyle\int_0^c \frac{e^{-1}}{\sqrt{x}}\,dx$ est une intégrale de Riemann convergente ($\alpha = \dfrac{1}{2} < 1$), donc d'après le critère de comparaison $E_1 = \displaystyle\int_0^c \frac{e^{-\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x}}\,dx$ est convergente.

$-$ Pour $x \geq c$ on a $\dfrac{e^{-\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x}} \leq \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{c}}$ et $\displaystyle\int_c^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{c}}\,dx$ converge (voir le cours), d'où d'après le critère de comparaison $E_2 = \displaystyle\int_c^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x}}\,dx$ est convergente.
Conclusion : l'intégrale $E = E_1 + E_2$ converge.

$*$ La nature de l'intégrale $F = \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(1 + \sin(x))\,dx$:

La fonction $t \mapsto \ln(1 + \sin(x))$ est continue sur $]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}]$, le problème se pose donc en $-\dfrac{\pi}{2}$. Cherchons un équivalent de $\ln(1 + \sin(x))$ au voisinage de $-\dfrac{\pi}{2}$. Posons $u = x + \dfrac{\pi}{2}$, donc

$$\ln(1 + \sin(x)) = \ln(1 - \cos(u)) = \ln(\frac{u^2}{2} + o(u^2)) = 2\ln(u)\left(1 + \frac{\ln(\frac{1}{2} + o(1))}{2\ln(u)}\right) \underset{0^+}{\sim} 2\ln(u).$$

Comme $\displaystyle\int_0^1 \ln(x)\,dx$ converge (voir le cours), d'après le critère d'équivalence, l'intégrale F est convergente.

$*$ La nature de l'intégrale $G = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(x)}{x^2}\,dx$:

La fonction $x \mapsto \dfrac{1 - \cos(x)}{x^2}$ est continue sur $]0, +\infty[$, il y a donc deux problèmes en 0 et en $+\infty$. Soit $c \in]0, +\infty[$.

$-$ L'intégrale $G_1 := \displaystyle\int_0^c \frac{1 - \cos(x)}{x^2}\,dx$ est convergente car la fonction $x \mapsto \dfrac{1 - \cos(x)}{x^2}$ admet une limite finie en 0 $\left(\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}\right)$.

– Puisque $|\cos x| \leq 1$, alors

$$\left|\frac{1-\cos(x)}{x^2}\right| \leq \frac{1+|\cos(x)|}{x^2} \leq \frac{2}{x^2}, \quad \forall x \in [c,+\infty[.$$

Comme $\displaystyle\int_c^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ est une intégrale de Riemann convergente ($\alpha = 2 > 1$), par le critère de comparaison, l'intégrale $G_2 := \displaystyle\int_c^{+\infty} \frac{1-\cos(x)}{x^2}$ est convergente.
Conclusion : l'intégrale $G = G_1 + G_2$ est convergente (CV+CV=CV).

∗ La nature de l'intégrale $H = \displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{e^{\cos(x)}}{x}\,dx$:

La fonction $x \mapsto \dfrac{e^{\cos(x)}}{x}$ est continue sur $]-\infty,-1]$, il suffit donc d'étudier le comportement au voisinage de $-\infty$. Puisque $-1 \leq \cos x \leq 1$, on a $e^{-1} \leq e^{\cos x} \leq e$ et donc

$$\left|\frac{e^{\cos(x)}}{x}\right| = \frac{e^{\cos(x)}}{|x|} \geq \frac{e^{-1}}{|x|} = \frac{e^{-1}}{-x}, \quad \forall x \in]-\infty,-1].$$

Comme $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{e^{-1}}{x}\,dx$ est une intégrale de Riemann divergente ($\alpha = 1 \leq 1$), par le critère de comparaison, l'intégrale H est divergente.

∗ La nature de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}\,dx$:

La fonction $x \mapsto \dfrac{\cos(x)}{\sqrt{x}}$ est continue sur $]0,+\infty[$, il y a donc deux problèmes en 0 et en $+\infty$. Soit $c \in]0,+\infty[$.
– L'intégrale $I_1 := \displaystyle\int_0^{c} \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}\,dx$ est convergente. En effet, puisque $|\cos x| \leq 1$, alors

$$\left|\frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}\right| \leq \frac{|\cos(x)|}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad \forall x \in]0,c].$$

Comme $\displaystyle\int_0^{c} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ est une intégrale de Riemann convergente ($\alpha = \frac{1}{2} < 1$), par le critère de comparaison, l'intégrale I_1 est convergente.
– D'après le critère d'Abel, l'intégrale $I_2 := \displaystyle\int_c^{+\infty} \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}\,dx$ est convergente. En effet, la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ garde un signe constant, décroissante et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$. D'autre part, pour tout $t \in [c,+\infty[$: On a $\left|\displaystyle\int_c^{t} \cos(x)\,dx\right| \leq 2$.
Conclusion : l'intégrale $I = I_1 + I_2$ est convergente (CV+CV=CV).

∗ La nature de l'intégrale $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(x^2)\,dx$:

En faisant le changement de variable $u = x^2$ on obtient $J = \frac{1}{2}I$. Comme l'intégrale I est convergente, alors J l'est aussi.

3. $*$ La convergence et le calcul de $A = \displaystyle\int_a^b \frac{dt}{\sqrt{(t-a)(b-t)}} \quad (a < b)$:

La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{(t-a)(b-t)}}$ est localement intégrable (car continue) sur $]a, b[$. Il y a donc deux problèmes en a et en b. Or

$$\frac{1}{\sqrt{(t-a)(b-t)}} \underset{a^+}{\sim} \frac{1}{\sqrt{(t-a)(b-a)}} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\sqrt{(t-a)(b-t)}} \underset{b^-}{\sim} \frac{1}{\sqrt{(b-a)(b-t)}},$$

et $\displaystyle\int_a^b \frac{dt}{\sqrt{t-a}}, \int_a^b \frac{dt}{\sqrt{b-t}}$ sont deux intégrales de Riemann convergentes ($\alpha = \dfrac{1}{2} < 1$), alors l'intégrale A est convergente.

Pour le calcul, on remarque que A a la forme d'une intégrale abélienne de deuxième espèce. On a

$$\begin{aligned}(t-a)(b-t) &= -t^2 + (a+b)t - ab \\ &= -\left(t - \frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \quad \text{(la forme canonique)} \\ &= \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \left[1 - \left(\frac{2t}{b-a} - \frac{a+b}{b-a}\right)^2\right].\end{aligned}$$

Alors, $\dfrac{1}{\sqrt{(t-a)(b-t)}} = \dfrac{2}{b-a} \dfrac{1}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{2t}{b-a} - \dfrac{a+b}{b-a}\right)^2}}$.

Effectuons le changement de variable $u = \dfrac{2t}{b-a} - \dfrac{a+b}{b-a}$, on trouve

$$\begin{aligned}A &= \int_{-1}^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} \\ &= 2\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} \quad \left(u \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \text{ est paire}\right) \\ &= 2 \lim_{x \to 1^-} \Big[\arcsin u\Big]_0^x \\ &= \pi.\end{aligned}$$

$*$ La convergence et le calcul de $B = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\, dx$.

La fonction $x \mapsto \ln(\sin x)$ est localement intégrable (car continue) sur $]0, \frac{\pi}{2}]$. De plus, lorsque $x \to 0^+$, on a

$$\ln(\sin x) = \ln(x + o(x)) = \ln(x) + \ln(1 + o(1)) \underset{0^+}{\sim} \ln x.$$

Comme $\displaystyle\int_0^1 \ln(x)\, dx$ converge (voir le cours), d'après le critère d'équivalence, l'intégrale $B' := \displaystyle\int_0^1 \ln(\sin x)\, dx$ est convergente. Or $B = B' + \displaystyle\int_1^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\, dx$ et $\displaystyle\int_1^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\, dx$ converge car la fonction $x \mapsto \ln(\sin x)$ est continue sur le compacte $[1, \dfrac{\pi}{2}]$, donc B est convergente.

Pour le calcul, de $\sin x = 2\sin(\frac{x}{2})\cos(\frac{x}{2})$ on abtient

$$\begin{aligned}
B &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin(\frac{x}{2})\cos(\frac{x}{2})\ dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\ dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\frac{x}{2})\ dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\frac{x}{2})\ dx \\
&= \frac{\pi\ln 2}{2} + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x)\ dx + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(x)\ dx \quad (\text{poser} \quad u = \frac{\pi}{2} - x) \\
&= \frac{\pi\ln 2}{2} + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x)\ dx + 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(u)\ du \quad (\text{Relation de Chasle}) \\
&= \frac{\pi\ln 2}{2} + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\ dx \\
&= \frac{\pi\ln 2}{2} + 2B.
\end{aligned}$$

D'où $B = -\dfrac{\pi\ln 2}{2}$.

Exercice 2.

1. Montrons que $\displaystyle\int_0^1 f(x)\ln x\ dx$ est absolument convergente :
   Puisque f est continue sur le compact $[0,1]$, elle y est bornée ; il existe donc $M \geq 0$ tel que $|f(t)\ln t| \leq M|\ln t|$ pour tout $t \in [0,1]$. D'où
   $$|f(t)\ln t| \leq M|\ln t|. \tag{1}$$
   Or, sur $]0,1]$ on a $|\ln t| = -\ln t$ et l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln x\ dx$ est convergente (voir le cours), de l'inégalité (1) et le critère de comparaison, on déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(x)\ln x\ dx$ est absolument convergente.
2. Montrons que $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x) = 0$:
   Soit $\varepsilon > 0$. Comme l'intégrale de f est convergente, d'après le critère de Cauchy, on a :
   $$(\exists A > 0)(\forall x > A), \quad \int_x^{2x} f(t)\ dt < \varepsilon.$$
   Comme la fonction f es décroissante sur $]1,+\infty[$, on a alors
   $$(\forall x > A), \quad xf(2x) = \int_x^{2x} f(2x)\ dt \leq \int_x^{2x} f(t)\ dt < \varepsilon.$$
   On en déduit que $0 \leq 2xf(2x) \leq 2\varepsilon$ pour tout $x > A$, ce qui entraîne :
   $$\lim_{x\to+\infty} xf(x) = 0.$$

3. Montrons que $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ existe :

   On a $f(x) - f(0) = \displaystyle\int_0^x f'(t)\,dt$, d'où $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(0) + \lim\limits_{x\to 1} \displaystyle\int_0^x f'(t)\,dt$. Or l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^1 f'(t)\,dt$ est convergente, alors $\lim\limits_{x\to 1} \displaystyle\int_0^x f'(t)\,dt$ existe. Par conséquent, $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ existe aussi.

Exercice 3.

1. Soit $x > 0$. On a :
$$\begin{aligned}
F(x) &= \int_x^{+\infty} \frac{f(at)}{t}\,dt - \int_x^{+\infty} \frac{f(bt)}{t}\,dt \\
&= \int_{ax}^{+\infty} \frac{f(u)}{u}\,du - \int_{bx}^{+\infty} \frac{f(v)}{v}\,dv \quad (\text{poser} \quad u = at \quad \text{et} \quad v = bt) \\
&= \int_{ax}^{+\infty} \frac{f(u)}{u}\,du + \int_{+\infty}^{bx} \frac{f(v)}{v}\,dv \quad (\text{Ralation de Chasle}) \\
&= G(x).
\end{aligned}$$

2. En supposant, sans perte de généralité, $b \geq a$. La fonction $t \mapsto g(t)$ est continue sur $[ax, bx]$ et la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{t}$ est positive sur $[ax, bx]$, donc, d'après la première formule de la moyenne, il existe $c_x \in [ax, bx]$ tel que
$$\int_{ax}^{bx} \frac{g(t)}{t}\,dt = g(c_x) \int_{ax}^{bx} \frac{1}{t}\,dt = g(c_x) \ln(\frac{b}{a}).$$
   Comme $c_x \to 0$ quad $x \to 0$, alors,
$$\lim_{x\to 0} \int_{ax}^{bx} \frac{g(t)}{t}\,dt = \lim_{c_x\to 0} g(c_x) \ln(\frac{b}{a}) = g(0) \ln(\frac{b}{a}) = 0.$$

3. On considère la fonction $g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $g(x) := f(x) - f(0)$. Cette fonction est continue et nulle en 0. D'où,
$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{f(at) - f(bt)}{t}\,dt &= \lim_{x\to 0} F(x) = \lim_{x\to 0} G(x) \quad (\text{D'après la première question}) \\
&= \lim_{x\to 0} \int_{ax}^{bx} \frac{f(t)}{t}\,dt \\
&= \lim_{x\to 0} \int_{ax}^{bx} \frac{f(0) + g(t)}{t}\,dt \\
&= \lim_{x\to 0} \int_{ax}^{bx} \frac{f(0)}{t}\,dt + \lim_{x\to 0} \int_{ax}^{bx} \frac{g(t)}{t}\,dt \\
&= f(0) \lim_{x\to 0} \int_{ax}^{bx} \frac{1}{t}\,dt + 0 \quad (\text{D'après la deuxième question}) \\
&= f(0) \ln(\frac{b}{a}).
\end{aligned}$$

4. Appliquer le resultat de la question précédente à la fonction $f : x \mapsto e^{-x}$ qui vérifie les hypothèses.

Exercice 4.

1. $*$ On commence par résoudre l'équation homogène $(1+x)y'+y=0$. On a

$$\begin{aligned}
(1+x)y'+y=0 &\Rightarrow \frac{dy}{y}=\frac{-dx}{1+x},\\
&\Rightarrow \int\frac{dy}{y}=\int\frac{-dx}{1+x},\\
&\Rightarrow \ln|y|=-\ln(|x+1|)+\text{cte},\quad x\in]-\infty,-1[\quad \text{ou bien}\quad x\in]-1,+\infty[,\\
&\Rightarrow y=\frac{C}{|x+1|},\quad \text{avec}\quad C\in\mathbb{R},\quad x\in]-\infty,-1[\quad \text{ou bien}\quad x\in]-1,+\infty[,\\
&\Rightarrow y=\begin{cases}\dfrac{C}{x+1} & \text{pour}\quad x\in]-1,+\infty[,\\ \dfrac{C_1}{x+1} & \text{pour}\quad x\in]-\infty,-1[.\end{cases}\qquad \text{avec}\quad C,C_1\in\mathbb{R}
\end{aligned}$$

$*$ On cherche maintenant une solution particulière de (E_1) ; sur $]-1,+\infty[$ sous la forme $y_p=\dfrac{C(x)}{x+1}$; par la méthode de variation de la constante :

$$\begin{aligned}
y_p \text{ est solution de } (E_1) &\Rightarrow (1+x)y_p'+y_p+2=0\\
&\Rightarrow (1+x).\frac{C'(x)(1+x)-C(x)}{(1+x)^2}+\frac{C(x)}{1+x}=-2,\\
&\Rightarrow C'(x)=-2\\
&\Rightarrow C(x)=\int -2\ dx\\
&\Rightarrow C(x)=-2x\\
&\Rightarrow y_p=\frac{C(x)}{x+1}=\frac{-2x}{x+1}.
\end{aligned}$$

Donc, la solution générale de l'équation (E_1) sur $]-1,+\infty[$ est

$$y(x)=y_h(x)+y_p(x)=\frac{C}{x+1}+\frac{-2x}{x+1}=\frac{C-2x}{x+1},\qquad C\in\mathbb{R}.$$

Et sur $]-\infty,-1[$ est

$$y(x)=y_h(x)+y_p(x)=\frac{C_1}{x+1}+\frac{-2x}{x+1}=\frac{C_1-2x}{x+1},\qquad C_1\in\mathbb{R}.$$

2. On commence par résoudre l'équation homogène associée $y''-3y'+2y=0$. l'équation caractéristique est : $r^2-3r+2=0$ dont le $\Delta=(-3)^2-4\times1\times2=1$, alors elle admet deux racines réelles $r_1=1$ et $r_2=2$. Donc, la solution générale de l'équation homogène est

$$y_h=Ae^x+Be^{2x};\quad A,B\in\mathbb{R}.$$

Pour trouver une solution particulière, on peut utiliser :
1- Principe de Superposition : le second membre de l'équation (E_2) est de la forme $f(x)=$

$f_1(x)+f_2(x)$, avec $f_1(x)=1$ et $f_2(x)=2e^x$. On cherche une solution particulière $y_{p_i} \quad (i=1,2)$ des équations

$$(E_2'): \quad y''-3y'+2y=1, \quad \text{et} \quad (E_2''): \quad y''-3y'+2y=2e^x.$$

On remarque que $y_{p_1}(x)=\dfrac{1}{2}$ est solution particulière de l'équation $(E_2'): \quad y''-3y'+2y=1$.
Le second membre de l'équation (E_2'') est de la forme $e^{mx}\Big(P_0(x)\cos(\omega x)+Q_{-\infty}(x)\sin(\omega x)\Big)$ avec $m=1$, $\omega=0$, $P_0(x)=2$ et $Q_{-\infty}(x)=0$. Or $m+i\omega=1$ est racine de l'équation caractéristique, alors on cherche une solution particulière de la forme :

$$y_{p_2}=xe^{mx}\Big(R_0(x)\cos(\omega x)+T_0(x)\sin(\omega x)\Big)=axe^x.$$

Puisque

$$y_{p_2}''-3y_{p_2}'+2y_{p_2}=-ae^x=2e^x.$$

Par identification, on obtient $a=-2$, par conséquent,

$$y_{p_2}(x)=-2xe^x.$$

Donc, Une solution particulière y_p de (E_2) est donnée par

$$y_p(x)=y_{p_1}(x)+y_{p_2}(x)=\frac{1}{2}-2xe^x.$$

Et la solution générale de (E_2) est

$$y=y_h+y_p=Ae^x+Be^{2x}-2xe^x+\frac{1}{2}; \qquad A,B\in\mathbb{R}.$$

2- Méthode de Variation de la Constante : la solution générale de l'équation homogène associée à (E_2) est donnée par :

$$y_h(x)=Ae^x+Be^{2x}; \quad A,B\in\mathbb{R}.$$

Cherchons une solution particulière de (E) sous la forme

$$y_p(x)=A(x)e^x+B(x)e^{2x}, \quad \text{avec} \quad A,B \quad \text{sont deux fonctions dérivables.}$$

On a

$$y_p'(x)=A'(x)e^x+B'(x)e^{2x}+A(x)e^x+2B(x)e^{2x}.$$

On impose la condition

$$A'(x)e^x+B'(x)e^{2x}=0,$$

Ce qui donne

$$y_p'(x)=A(x)e^x+2B(x)e^{2x}.$$

On calcule ensuite y'' (utiliser le fait que $y_1=e^x$ et $y_2=e^{2x}$ sont deux solutions de l'équation homogène, c-à-d $e^x-3e^x+2e^x=0$ et $4e^{2x}-6e^{2x}+2e^{2x}=0$), on remplace dans l'équation (E_2) on trouve que

$$A'(x)e^x+2B'(x)e^{2x}=1+2e^x.$$

Résolvons donc le système

$$\begin{cases} A'(x)e^x + B'(x)e^x = 0, \\ A'(x)e^x + 2B'(x)e^{2x} = 1 + 2e^x. \end{cases}$$

On obtient

$$\begin{cases} A'(x) = -2 - e^{-x}, \\ B'(x) = e^{-2x} + 2e^{-x}. \end{cases}$$

C'est à dire $A(x) = -2x + e^{-x}$ et $B(x) = -\dfrac{e^{-2x}}{2} - 2e^{-x}$.
Donc, une solution particulière de l'équation (E_2) est donnée par

$$y_p(x) = (-2x + e^{-x})e^x + (-\frac{e^{-2x}}{2} - 2e^{-x})e^{2x} = \frac{1}{2} - 2xe^x - 2e^x.$$

Par conséquent, la solution générale de (E_2) est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Ae^x + Be^{2x} + \frac{1}{2} - 2xe^x - 2e^x = Ce^x + Be^{2x} - 2xe^x + \frac{1}{2}; \quad A, B, C \in \mathbb{R}.$$

Exercice 5.

1. (Sep) : $\quad (\cos t)y' = (\sin t)y^4$ est une équation à variables séparées. On a

$$\begin{aligned}
(\cos t)y' = (\sin t)y^4 \Rightarrow &\quad (\cos t)\frac{dy}{dt} = (\sin t)y^4 \\
\Rightarrow &\quad \frac{dy}{y^4} = -\frac{\sin t}{\cos t}\, dt, \\
\Rightarrow &\quad \int \frac{dy}{y^4} = -\int \frac{\sin t}{\cos t}\, dt, \quad \text{sur} \quad I =]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[\quad (k \in \mathbb{Z}), \\
\Rightarrow &\quad \frac{y^{-3}}{-3} = -\ln(|\cos t|) + \text{cte}, \quad \text{sur} \quad I =]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[\quad (k \in \mathbb{Z}), \\
\Rightarrow &\quad y = \begin{cases} \sqrt[3]{\dfrac{1}{3\ln(|\cos t|) + c_1}},, & \text{sur un intervalle} \quad J \subset I \\ -\sqrt[3]{\dfrac{-1}{3\ln(|\cos t|) + c_2}}, & \text{sur un intervalle} \quad J' \subset I, \end{cases}
\end{aligned}$$

avec $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

2. (Ber) : $\quad y' = y + ty^3$ est une équation de Bernoulli avec $n = 3$, divisons tous les termes par y^3, on obtient l'équation suivante

$$(Ber') : \quad y'y^{-3} - y^{-2} = t.$$

Introduisant la nouvelle fonction $u = y^{-2}$, d'où $u' = -2y'y^{-3}$, portons ces expressions dans l'équation (Ber'), nous obtenons l'équation différentielle linéaire

$$(E) : \quad u' + 2u = -2t,$$

qu'on peut résoudre facilement. En effet, la solution de l'équation homogène $u' + 2u = 0$ est $u_h(t) = Ce^{-2t}$ et par la méthode de variation de la constante on trouve que $u_p(t) = -t + \frac{1}{2}$ est une solution particulière de (E), d'où la solution générale de (E) est

$$u(t) = u_h(t) + u_p(t) = Ce^{-2t} - t + \frac{1}{2}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Comme $y^{-2} = u$, donc $y = \frac{\pm 1}{\sqrt{u}} = \frac{\pm 1}{\sqrt{Ce^{-2t} - t + \frac{1}{2}}}$ sur un intervalle I.

3. (Ric) : $y' = (t-1)y + y^2 - t$ est une équation de Riccati qui admet une solution particulière constante $y_p = c$. En remplaçant dans l'équation (Ric) y par c, on obtient

$$(\forall t \in \mathbb{R}) : \quad 0 = (t-1)c + c^2 - t, \quad \text{c-à-d} \quad (\forall t \in \mathbb{R}) : \quad t(c-1) + (c^2 - c) = 0,$$

d'où $c - 1 = 0$ et $c^2 - c = 0$, donc $c = 1$, par conséquent, $y_p = 1$.
Soit le changement de variables :

$$y = y_p + \frac{1}{z} = 1 + \frac{1}{z}.$$

D'où $y' = -\frac{z'}{z^2}$. Substituons cette expression dans l'équation (Ric), afin d'obtenir une équation linéaire non homogène de la forme

$$(E) : \quad z' + (t+1)z = -1,$$

la solution de l'équation homogène $z' + (t+1)z = 0$ est $z_h(t) = Ce^{-(\frac{t^2}{2}+t)}$ et par la méthode de variation de la constante on trouve que $C'(x) = -e^{(\frac{t^2}{2}+t)}$ c-à-d $C(x) = -\int e^{(\frac{t^2}{2}+t)}\, dt$. Donc $z_p(t) = -e^{-(\frac{t^2}{2}+t)}.\int e^{(\frac{t^2}{2}+t)}\, dt$ est une solution particulière de (E), d'où la solution générale de (E) est

$$z(x) = z_h(x) + z_p(x) = e^{-(\frac{t^2}{2}+t)}\left(C - \int e^{(\frac{t^2}{2}+t)}\, dt\right), \quad C \in \mathbb{R}.$$

Comme $y = 1 + \frac{1}{z}$, donc

$$y = 1 + \frac{1}{e^{-(\frac{t^2}{2}+t)}\left(C - \int e^{(\frac{t^2}{2}+t)}\, dt\right)} \quad \text{sur un intervalle} \quad I.$$

Remarque : On ne peut pas exprimer la primitive $\int e^{(\frac{t^2}{2}+t)}\, dt$ en termes de fonctions usuelles !!!.

Exercice 6 (facultatif).

∗ La nature de $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{4x^2+x+1}}\, dx$: L'intégrande est positif, continu sur $[1, +\infty[$ et majoré par $\frac{1}{2x^2}$ donc, d'après le critère de comparaison, l'intégrale est (absolument) convergente.

Remarque : une autre façon de montrer que cette intégrale converge est de la transformer, par le changement de variable $\tan\theta = \dfrac{8x+1}{\sqrt{15}}$, en une intégrale non impropre, que l'on peut même calculer.

$\ast$ La nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x}\,dx$: Au voisinage de 0, on a $\dfrac{e^{-x}}{x} \underset{0^+}{\sim} \dfrac{1}{x} > 0$ donc, d'après le critère d'équivalence, l'intégrale diverge. (en $+\infty$, elle est absolument convergente car $0 < \dfrac{e^{-x}}{x} \leq e^{-x}$ pour $x \geq 1$).

$\ast$ La nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\,dx$: L'intégrande est continu sur $[0, +\infty[$ et $\dfrac{|\cos x|}{1+x^2} \leq \dfrac{1}{x^2}$ donc l'intégrale est absolument convergente, d'après le critère de comparaison.

$\ast$ La nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} 2^{-x}x^4\,dx$: Le problème se pose en $+\infty$. On a $2^{-x} = e^{-x\ln 2}$ et $\ln 2 > 0$ d'où

$$\lim_{x\to+\infty} x^4.2^{-x} = \lim_{x\to+\infty} x^4\,e^{-x\ln 2} = \lim_{x\to+\infty} e^{-x\ln 2} = 0.$$

Donc, d'après les règles de Riemann, l'intégrale converge (absolument).

$\ast$ La nature de $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{1-\sqrt{x}}$: Par changement de variable et équivalence, l'intégrale en 1 est de même nature que celle de $\dfrac{1}{y}$ en 0 donc divergente.

$\ast$ La nature de $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{(\tan x - x)^{\alpha}}$: En 0, par équivalence, l'intégrale est de même nature que celle de $\dfrac{1}{x^{3\alpha}}$ donc, elle converge (absolument) si et seulement si $3\alpha < 1$, c'est-à-dire $\alpha < 1/3$ (elle n'est même pas impropre si $\alpha \leq 0$).

$\ast$ La nature de $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln(1+x)}{x^{\alpha}(1-x)^{\beta}}\,dx$: L'intégrande est équivalent à $\dfrac{1}{x^{\alpha-1}}$ en 0 et à $\dfrac{\ln 2}{(1-x)^{\beta}}$ en 1. D'après le critère d'équivalence, l'intégrale est donc convergente (absolument) si et seulement si $\alpha - 1$ et β sont strictement inférieurs à 1, c'est-à-dire $\alpha < 2$ et $\beta < 1$.

$\ast$ La nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^{\arctan x}}\,dx$: On a $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^{\arctan x}} = 1$ car $\arctan x.\ln x \underset{0^+}{\sim} x\ln x \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$. Par conséquent, l'intégrale est convergente en 0 car l'intégrande admet une limite finie en 0.
Au voisinage de $+\infty$, on a $\dfrac{1}{x^{\arctan x}} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^{\pi/2}}$ (car quand $y := \dfrac{1}{x} \to 0^+$, $\dfrac{x^{\pi/2}}{x^{\arctan x}} = y^{-\pi/2+\arctan(1/y)} = y^{-\arctan(y)} = \dfrac{1}{y^{\arctan y}} \to 1$). Puisque $\pi/2 > 1$, l'intégrale converge donc aussi en $+\infty$.

$\ast$ La nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^{\alpha}}\,dx$ et de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^{\alpha}}\,dx$: En 0, par équivalence, on a $\dfrac{\cos x}{x^{\alpha}} \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{x^{\alpha}}$ et $\dfrac{\sin x}{x^{\alpha}} \underset{0}{\sim} \dfrac{x}{x^{\alpha}} = \dfrac{1}{x^{\alpha-1}}$. D'où, la première intégrale converge (absolument) si et seulement si $\alpha < 1$ et la seconde si et seulement si $\alpha < 2$.
En $+\infty$, pour chacune des deux intégrales, on a :
$\star$ convergence absolue si $\alpha > 1$ (Voir le cours).

$\star$ convergence simple si et seulement si $\alpha > 0$. En effet, cette condition est non seulement nécessaire (car si $\beta := -\alpha \geq 0$ alors $\int_{2k\pi}^{2k\pi+\pi/2} x^\beta \sin x \,\mathrm{d}x$ et $\int_{2k\pi}^{2k\pi+\pi/2} x^\beta \cos x \,\mathrm{d}x$, minorées par $(2k\pi)^\beta$, ne tendent pas vers 0) mais aussi suffisante, d'après le critère d'Abel.

En résumé :
– la première intégrale converge lorsque $0 < \alpha < 1$ et sa convergence n'est jamais absolue ;
– la seconde converge lorsque $0 < \alpha < 2$ mais sa convergence n'est absolue que si $\alpha > 1$.

$\ast$ La nature de $\int_0^1 \sin(1/x)\,dx$: Par changement de variable $y = \frac{1}{x}$, cette intégrale est absolument convergente, comme celle de $\frac{\sin y}{y^2}$ en $+\infty$.

$\ast$ La nature de $\int_0^1 \frac{dx}{\arccos x}$: Par changement de variable $y = \arccos x$, cette intégrale est absolument convergente, car $\int_0^1 \frac{dx}{\arccos x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin y}{y}\,dy$ ($\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin y}{y}\,dy$ est faussement impropre, car l'intégrande admet une limite finie en 0).

$\ast$ La nature de $\int_0^{+\infty} \sin(x^2)\,dx$: Par changement de variable $y = x^2$, cette intégrale est semi-convergente, comme celle de $\frac{\sin y}{y^{1/2}}$ en $+\infty$.

$\ast$ La nature de $\int_0^{+\infty} \cos(x^\alpha)\,dx$: Supposons $\alpha \neq 0$ (sinon, l'intégrale diverge évidemment). Par changement de variable $y = x^\alpha$, cette intégrale est de même nature que $\int_0^{+\infty} \frac{\cos y}{y^\beta}\,\mathrm{d}y$ avec $\beta = 1 - \frac{1}{\alpha}$. Elle est donc convergente si et seulement si $0 < 1 - \frac{1}{\alpha} < 1$, c'est-à-dire $\alpha > 1$, et sa convergence n'est jamais absolue.

$\ast$ La nature de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\,dx$: En 0, l'intégrale est faussement impropre (l'intégrande tend vers 0). En $+\infty$, elle diverge, puisque $\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$ et que l'intégrale en $+\infty$ de $\frac{\cos(2x)}{x}$ est semi-convergente (par changement de variable $y = 2x$) tandis que celle de $\frac{1}{x}$ est divergente.

$\ast$ La nature de $\int_1^{+\infty} \left(1 - \cos\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \sin x\,dx$: L'intégrande est continu sur $[1, +\infty[$. Vérifions les hypothèses de la règle d'Abel. $x \mapsto 1 - \cos\frac{1}{\sqrt{x}}$ est décroissante sur $[1, +\infty[$ et nulle à l'infini, et $x \mapsto \int_1^x \sin t\,\mathrm{d}t = \cos 1 - \cos x$ est bornée. Par conséquent, l'intégrale converge. Mais elle est seulement semi-convergente car $\left|\left(1 - \cos\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\sin x\right| \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{|\sin x|}{2x}$, non intégrable en $+\infty$.

Autre Solution : $\left(1 - \cos\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\sin x = \left(\frac{1}{2x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\sin x = \frac{\sin x}{2x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ donc l'intégrale est semi-convergente, comme somme d'une intégrale semi-convergente et d'une intégrale absolument convergente.

$*$ La nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^\alpha}\, dx$: En 0, la fonction (positive) $\displaystyle\frac{1-\cos x}{x^\alpha} \underset{0^+}{\sim} \frac{1}{2x^{\alpha-2}}$ est intégrable si et seulement si $\alpha - 2 < 1$, c'est-à-dire $\alpha < 3$. En $+\infty$, l'intégrale converge si $\alpha > 1$ (car $0 \leq \displaystyle\frac{1-\cos x}{x^\alpha} \leq \frac{1}{x^\alpha}$) et diverge si $\alpha \leq 1$ (car $\displaystyle\int_{2k\pi+\pi/2}^{2k\pi+3\pi/2} \frac{1-\cos x}{x^\alpha}\, \mathrm{d}x \geq \int_{2k\pi+\pi/2}^{2k\pi+3\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln \frac{2k\pi+3\pi/2}{2k\pi+\pi/2} \sim \frac{1}{2k}$). Finalement, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^\alpha}\, \mathrm{d}x$ converge si et seulement si $1 < \alpha < 3$.

Exercice 7 (facultatif).

1. Vrai car si $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \int_0^A f(x)\, dx = J$ alors $\lim I_n = J$.
2. Vrai car $\forall A \in \mathbb{R}^+ \quad I_{[A]} \leq \displaystyle\int_0^A f(x)\, dx \leq I_{[A]+1}$ (où $[A]$ désigne la partie entière de A) donc $\displaystyle\left|\int_0^A f(x)\, dx - I\right| \leq \max\left(\left|I_{[A]} - I\right|, \left|I_{[A]+1} - I\right|\right) \to 0$ quand $A \to +\infty$.
3. Faux, bien que l'intégrale converge d'après le point précédent, car $\displaystyle\lim_{+\infty} f$ peut ne pas exister. On peut construire un contre-exemple où, de plus, la fonction positive f n'est pas bornée :
$$f(x) = \begin{cases} ng(n^3(x-n)) & \text{si} \quad n \leq x \leq n + \frac{1}{n^3} \text{ pour un } n \in \mathbb{N}^* \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
pour n'importe quelle fonction non nulle intégrable $g : [0,1] \to \mathbb{R}_+$ (par construction, $I_{n+1} = G\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$, avec $G = \displaystyle\int_0^1 g(t)\, dt$).
4. Vrai : $\star$ Montrons d'abord que cette limite ℓ est forcément 0. Pour tout entier naturel n, puisque $I_{n+1} - I_n = \displaystyle\int_n^{n+1} f(x)\, dx$, on a : $\displaystyle\inf_{x\geq n} f(x) \leq I_{n+1} - I_n \leq \sup_{x \geq n} f(x)$. Par passage à la limite, on en déduit : $\ell \leq 0 \leq \ell$.
$\star$ Sachant maintenant que $\displaystyle\lim_{+\infty} f = 0$, montrons que l'intégrale converge. Pour tout $A \in \mathbb{R}^+$, on a
$$\begin{aligned} \left|\int_0^A f(x)\, dx - I_{[A]}\right| = \left|\int_{[A]}^A f(x)\, dx\right| &\leq \int_{[A]}^A |f(x)|\, dx \\ &\leq (A - [A]) \sup_{[A]\leq x\leq A} |f(x)| \\ &\leq \sup_{x\geq[A]} |f(x)| \end{aligned}$$
donc
$$\left|\int_0^A f(x)\, dx - I\right| \leq \sup_{x\geq[A]} |f(x)| + \left|I_{[A]} - I\right| \to 0 \quad \text{quand} \quad A \to +\infty.$$
5. Faux. Exemple : $f(x) = \sin(2\pi x)$.

Exercice 8 (facultatif). La convergence et le calcul de :

$\ast$ $A = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$: On a $A = [\arctan t]_0^{+\infty} = \pi/2$.

$\ast$ $B = \displaystyle\int_0^{1} \frac{dt}{\sqrt{t}}$: On a $B = \left[2\sqrt{t}\right]_0^1 = 2$.

$\ast$ $C = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t+1)(t+2)}$: La Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}$ de l'intégrande est

$$\frac{1}{(X+1)(X+2)} = \frac{1}{X+1} - \frac{1}{X+2}.$$

Une primitive sur $]-1, +\infty[$ est donc : $F(t) = \ln \dfrac{t+1}{t+2}$. Puisque $\lim\limits_{+\infty} F = 0 \in \mathbb{R}$, l'intégrale converge et $C = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t+1)(t+2)} = 0 - F(0) = \ln 2$.

$\ast$ $D = \displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2-1}$: Par un raisonnement analogue, avec

$$\frac{1}{X^2-1} = \frac{1/2}{X-1} - \frac{1/2}{X+1},$$

$F(x) = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x-1}{x+1}$ (sur $]1, +\infty[$) et $D = \displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2-1} = 0 - F(2) = \frac{\ln 3}{2}$.

$\ast$ $E = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x+2)(x+3)}$: Par un raisonnement analogue, avec

$$\frac{1}{(X+1)(X+2)(X+3)} = \frac{1/2}{X+1} - \frac{1}{X+2} + \frac{1/2}{X+3},$$

$F(x) = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{(x+1)(x+3)}{(x+2)^2}$ (sur $]-1, +\infty[$) et $E = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x+2)(x+3)} = 0 - F(0) = \frac{\ln(4/3)}{2}$.

$\ast$ $F = \displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-3x+2)^2}$: Par un raisonnement analogue, avec

$$\frac{1}{(X^2-3X+2)^2} = \frac{2}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2} - \frac{2}{X-2} + \frac{1}{(X-2)^2},$$

$F(x) = 2\ln\left|\dfrac{x-1}{x-2}\right| - \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x-2}$ (sur $]-\infty, 1[$, $]1, 2[$ et $]2, +\infty[$) et

$$F = \int_3^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-3x+2)^2} = 0 - F(3) = \frac{3}{2} - 2\ln 2.$$

$\ast$ $G = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}\, dt$: Par équivalence, l'intégrale converge en 0 car $\gamma > -1$. Par changement de variable $s = 1/t$, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\ln t\, dt$ est l'opposée de $\displaystyle\int_0^1 f(t)\ln t\, dt$ (donc, comme elle, convergente), si bien que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\ln t\,\mathrm{d}t$ est convergente et nulle.

$*$ $H = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\cos t\ dt$: Par une double intégration par parties,

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\cos t\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\mathrm{e}^{-t}(\sin t - \cos t)}{2}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2}.$$

$*$ $I = \displaystyle\int_4^5 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(t-4)(5-t)}}$: Par le changement de variable $s = 2t - 9$,

$$\int_4^5 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(t-4)(5-t)}} = \int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{1-s^2}} = [\arcsin s]_{-1}^1 = \pi.$$

$*$ $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{1-t}}\ dt$: Par le changement de variable $s = \sqrt{1-t}$,

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{1-t}}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^1 \ln(1-s^2)\,\mathrm{d}s = 2\,[G(1+s) - G(1-s)]_0^1,$$

avec $G(x) = x\ln x - x$, continue sur $]0,+\infty[$. Puisque $\lim\limits_0 G = 0 \in \mathbb{R}$, l'intégrale est donc convergente et vaut $2\,(G(2) - 0) = 4\,(\ln 2 - 1)$.

$*$ $K_\alpha = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)\,(1+t^\alpha)}\ dt$, $(\alpha \in \mathbb{R})$: L'intégrande (positif et continu sur $]0,+\infty[$) est majoré par $\dfrac{1}{1+t^2}$, donc l'intégrale converge. Par changement de variable $s = 1/t$,

$$K_\alpha := \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)\,(1+t^\alpha)}\,\mathrm{d}t = \int_{+\infty}^0 \frac{1}{(1+s^{-2})\,(1+s^{-\alpha})}\,\frac{-\mathrm{d}s}{s^2} = \int_0^{+\infty} \frac{s^\alpha}{(1+s^2)\,(1+s^\alpha)}\,\mathrm{d}s =: K'_\alpha$$

donc $K_\alpha = \dfrac{K_\alpha + K'_\alpha}{2} = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\ dt = \frac{\pi}{4} = K_0.$

$*$ $L = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(a+x^2)(b+x^2)}$ $\quad(a, b > 0)$:

L'intégrale converge en $\pm\infty$ comme celle de $\dfrac{1}{x^4}$.

– Cas général : $b \neq a$. L'intégrande s'écrit alors $\dfrac{1}{b-a}\left(\dfrac{1}{x^2+a} - \dfrac{1}{x^2+b}\right)$ donc admet pour primitive

$$F(x) := \frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\arctan\frac{x}{\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{b}}\arctan\frac{x}{\sqrt{b}}\right).$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(a+x^2)(b+x^2)} = \lim_{+\infty} F - \lim_{-\infty} F = 2\lim_{+\infty} F = \frac{\pi}{b-a}\left(\frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{b}}\right) = \frac{\pi}{b\sqrt{a} + a\sqrt{b}}.$$

– Cas particulier : $b = a$. Par changement de variable $x = y\sqrt{a}$ puis $y = \tan t$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(a+x^2)^2} = \frac{1}{a\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}y}{(1+y^2)^2} = \frac{1}{a\sqrt{a}}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t\ dt = \frac{\pi}{2a\sqrt{a}}.$$

Exercice 9 (facultatif).

1. La fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-t} - e^{-2t}}{t}$ est continue sur $]0, +\infty[$, le problème se pose donc en 0 et en $+\infty$.
Soit $c > 0$,
– En 0 : l'intégrale $\displaystyle\int_0^c \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t}\, dt$ est convergente car la fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-t} - e^{-2t}}{t}$ se prolonge par continuité en 0 (elle admet une limite finie en 0^+). En effet,
$$\lim_{t \to 0^+} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} = \lim_{t \to 0^+} e^{-t}.\frac{e^{-t} - 1}{-t} = 1.$$
Ou bien, En effectuant un développement limité en 0, on a
$$e^{-t} - e^{-2t} = (1 - t) - (1 - 2t) + o(t) = t + o(t),$$
d'où, $\displaystyle\lim_{t \to 0^+} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} = 1.$
– En $+\infty$: d'après les règles de Riemann, l'intégrale $\displaystyle\int_c^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t}\, dt$ converge, en effet,
$$\lim_{t \to +\infty} t^3 (\frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t}) = 0, \quad (\alpha = 3 > 1).$$
Conclusion : l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^c \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t}\, dt + \int_c^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t}\, dt$ est convergente.

2. Soit $\varepsilon > 0$. On a
$$\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t}\, dt = \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt - \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-2t}}{t}\, dt.$$
Par le changement de variable $u = 2t$, on obtient
$$\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-2t}}{t}\, dt = \int_{2\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{2u}\, 2du = \int_{2\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\, du = \int_{2\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt,$$
d'où,
$$\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t}\, dt = \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt - \int_{2\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt = \int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{e^{-t}}{t}\, dt.$$

3. On a :
$$I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t}\, dt = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t}\, dt = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{e^{-t}}{t}\, dt.$$
La fonction $t \mapsto e^{-t}$ est continue sur $[\varepsilon, 2\varepsilon]$ et $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ est positive sur $[\varepsilon, 2\varepsilon]$, donc, d'après la première formule de la moyenne, il existe $c_\varepsilon \in [\varepsilon, 2\varepsilon]$ tel que
$$\int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{e^{-t}}{t}\, dt = e^{-c_\varepsilon} \int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{1}{t}\, dt = e^{-c_\varepsilon} \ln(2).$$
Comme $c_\varepsilon \to 0$ quand $\varepsilon \to 0$, alors,
$$I = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^{2\varepsilon} \frac{e^{-t}}{t}\, dt = \lim_{c_\varepsilon \to 0} e^{-c_\varepsilon} \ln(2) = \ln(2).$$

4. Le changement de variable $x = e^{-t}$ donne :

$$\int_0^1 \frac{x-1}{\ln(x)}\, dx = I = \ln(2).$$

Exercice 10 (facultatif).

1. On a $\dfrac{1}{(t^3+1)^n} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{3n}}$. Donc, l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t^3+1)^n}$ converge si et seulement si $3n > 1$ c-à-d $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Calculons $I_1 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^3+1}$.

   La décomposition en éléments simples de la fraction $F(t) = \dfrac{1}{t^3+1} = \dfrac{1}{(t+1)(t^2-t+1)}$ s'écrit :

$$F(t) = \frac{a}{t+1} + \frac{bt+c}{t^2-t+1}.$$

   Avec :
   $a = (t+1)F(t)\Big|_{t=-1} = \dfrac{1}{t^2-t+1}\Big|_{t=-1} = \dfrac{1}{3}$.
   $F(0) = 1 = a + c \Rightarrow c = 1 - a = \dfrac{2}{3}$.
   $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} tF(t) = 0 = a + b \Rightarrow b = -a = \frac{-1}{3}$.
   Donc,

$$\begin{aligned}
\int_0^x \frac{dt}{t^3+1} &= \frac{1}{3}\int_0^x \frac{dt}{t+1} - \frac{1}{3}\int_0^x \frac{t-2}{t^2-t+1}\, dt,\\
&= \frac{\ln(x+1)}{3} - \frac{1}{6}\int_0^x \frac{(t^2-t+1)'}{t^2-t+1}\, dt + \frac{1}{2}\int_0^x \frac{dt}{t^2-t+1},\\
&= \frac{\ln(x+1)}{3} - \frac{\ln(x^2-x+1)}{6} + \frac{1}{2}\int_0^x \frac{dt}{(t-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}},\\
&= \frac{1}{6}\ln\left(\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^x \frac{dt}{(\frac{2t-1}{\sqrt{3}})^2+1}, \quad (u = \frac{2t-1}{\sqrt{3}}),\\
&= \frac{1}{6}\ln\left(\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\arctan(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}) - \arctan(\frac{-1}{\sqrt{3}})\right),\\
&= \frac{1}{6}\ln\left(\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}) + \frac{\pi}{6\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

   Par conséquent, $I_1 = \displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^x \frac{dt}{t^3+1} = 0 + \frac{\pi}{2\sqrt{3}} + \frac{\pi}{6\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$.

3. Soit $n \geq 1$, par une intégration par parties, on obtient :

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^{+\infty} \frac{(t)'}{(t^3+1)^n}\, dt,\\
&= \left[\frac{t}{(t^3+1)^n}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{3nt^3}{(t^3+1)^{n+1}}\, dt,\\
&= 3n\Big(\int_0^{+\infty} \frac{t^3+1}{(t^3+1)^{n+1}}\, dt - \int_0^{+\infty} \frac{1}{(t^3+1)^{n+1}}\, dt\Big),\\
&= 3n(I_n - I_{n+1}).
\end{aligned}$$

D'où, pour tout $n \geq 1$, $I_{n+1} = \dfrac{3n-1}{3n} I_n$.

4. Pour tout $n \geq 1$, on a $I_{n+1} = \dfrac{3n-1}{3n} I_n$. Donc :

$$\begin{aligned}
I_n &= \frac{3n-4}{3n-3} I_{n-1},\\
I_{n-1} &= \frac{3n-7}{3n-6} I_{n-2},\\
I_{n-2} &= \frac{3n-10}{3n-9} I_{n-3},\\
. &= .\\
. &= .\\
. &= .\\
I_2 &= \frac{2}{3} I_1.
\end{aligned}$$

Multiplions ces égalités, membre à membre, on obtient :

$$(\forall n \geq 2), \quad I_n = \frac{3n-4}{3n-3}.\frac{3n-7}{3n-6}.\frac{3n-10}{3n-9}\cdots\frac{2}{3}.I_1 = \frac{3n-4}{3n-3}.\frac{3n-7}{3n-6}.\frac{3n-10}{3n-9}\cdots\frac{2}{3}.\frac{\pi}{6\sqrt{3}}.$$

Exercice 11 (facultatif).

1. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}(t^2+1)}$ est continue sur $]0, +\infty[$, le problème se pose donc en 0 et en $+\infty$.
Soit $c > 0$,
– En 0, on a $\dfrac{1}{\sqrt{t}(t^2+1)} \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ et $\displaystyle\int_0^c \frac{dt}{\sqrt{t}}$ est une intégrale de Riemann convergente ($\alpha = \frac{1}{2} < 1$), donc, d'après le citère d'équivalence, l'intégrale $\displaystyle\int_0^c \frac{dt}{\sqrt{t}(t^2+1)}$ est convergente.
– En $+\infty$, on a $\dfrac{1}{t^{\frac{5}{2}}} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ et $\displaystyle\int_0^c \frac{dt}{\sqrt{t}}$ est une intégrale de Riemann convergente ($\alpha = \frac{5}{2} > 1$), donc, d'après le citère d'équivalence, l'intégrale $\displaystyle\int_c^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}(t^2+1)}$ est convergente.
onclusion : l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}(t^2+1)} = \int_0^c \frac{dt}{\sqrt{t}(t^2+1)} + \int_c^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}(t^2+1)}$ converge.

2. Pour calculer l'intégrale J il faut décomposer la fraction $F(x) = \dfrac{1}{x^4+1}$ en éléménts simples. On a

$$x^4+1 = (x^4+2x^2+1) - 2x^2 = (x^2+1)^2 - (\sqrt{2}x)^2 = (x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1).$$

D'où

$$F(x) = \frac{1}{(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)} = \frac{ax+b}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \frac{cx+d}{x^2-\sqrt{2}x+1}.$$

Comme la fonction F est paire, alors $c=-a$ et $d=b$, d'où

$$F(x) = \frac{1}{(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)} = \frac{ax+b}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \frac{-ax+b}{x^2-\sqrt{2}x+1}.$$

On a $F(0) = 1 = 2b$, alors $b = \dfrac{1}{2}$.

De $F(1) = \dfrac{1}{2} = \dfrac{a+\frac{1}{2}}{2+\sqrt{2}} + \dfrac{-a+\frac{1}{2}}{2-\sqrt{2}}$, on obtient $a = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

Or,

$$\begin{aligned}
\int_0^t \frac{ax+b}{x^2+\sqrt{2}x+1}\,dx &= \frac{1}{4\sqrt{2}}\int_0^t \frac{(x^2+\sqrt{2}x+1)'+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}\,dx,\\
&= \frac{\ln(t^2+\sqrt{2}t+1)}{4\sqrt{2}} + \frac{1}{4}\int_0^t \frac{dx}{(x+\frac{\sqrt{2}}{2})^2+\frac{1}{2}},\\
&= \frac{\ln(t^2+\sqrt{2}t+1)}{4\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{dx}{(\sqrt{2}x+1)^2+1} \quad (u=\sqrt{2}x+1),\\
&= \frac{\ln(t^2+\sqrt{2}t+1)}{4\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{4}\Big(\arctan(\sqrt{2}t+1) - \arctan(1)\Big),\\
&= \frac{\ln(t^2+\sqrt{2}t+1)}{4\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{4}\arctan(\sqrt{2}t+1) - \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

Et,

$$\int_0^t \frac{-ax+b}{x^2-\sqrt{2}x+1}\,dx = -\frac{\ln(t^2-\sqrt{2}t+1)}{4\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{4}\arctan(-\sqrt{2}t+1) + \frac{\pi}{4}.$$

Donc,

$$\begin{aligned}
J &= \lim_{t\to+\infty}\int_0^t \frac{dx}{x^4+1},\\
&= \lim_{t\to+\infty}\left[\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left(\frac{t^2+\sqrt{2}t+1)}{t^2-\sqrt{2}t+1}\right) + \frac{\sqrt{2}}{4}\Big(\arctan(\sqrt{2}t+1) - \arctan(-\sqrt{2}t+1)\Big)\right],\\
&= \frac{\pi\sqrt{2}}{4}.
\end{aligned}$$

3. Par le changement de variable $x=\sqrt{t}$ dans I, on trouve que $I = 2J = \dfrac{\pi\sqrt{2}}{2}$.

Exercice 12 (facultatif).

Posons $u(x) = (1+x^2)y(x)$, donc

$$u'(x) = 2xy(x) + (1+x^2)y'(x) \quad \text{et} \quad u''(x) = 2y(x) + 4xy'(x) + (1+x^2)y''(x).$$

D'où $(1+x^2)y''(x) + 4xy'(x) = u''(x) - 2y(x)$.
En reportant dans l'équation (E) , on obtient l'équation linéaire suivante :

$$(E) \Leftrightarrow u''(x) - 2y(x) + (1-x^2)y = 0 \Leftrightarrow u''(x) - (1+x^2)y = 0 \Leftrightarrow (E') : \quad u''(x) - u(x) = 0.$$

l'équation caractéristique $r^2 - 1 = 0$ admet deux racines réelles $r_1 = 1$ et $r_2 = -1$. Donc, la solution générale de l'équation (E') est

$$y_h = Ae^x + Be^{-x}; \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Comme $u(x) = (1+x^2)y(x)$, alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$y(x) = \frac{u(x)}{1+x^2} = \frac{Ae^x + Be^{-x}}{1+x^2}; \quad A, B \in \mathbb{R}.$$