*UNIVERSITE MOULAY ISMAIL*
*FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES*
*DEPARTEMENT DE PHYSIQUE ERRACHIDIA*

**Module P124**

**Pr. BENAMI**

# ***Correction TD d'électricité***
## ***Série n°1***

### ***Exercice n°1***

La dérivée partielle d'une fonction ***f*** par rapport à la variable ***x*** est notée :

$$f'_x = \frac{\partial f}{\partial x}$$

∂ : d rond

Si f est une fonction de x, y et z. Alors les dérivées partielles premières sont :

$$\boxed{f'_x = \frac{\partial f}{\partial x}} \qquad \boxed{f'_y = \frac{\partial f}{\partial y}} \quad \text{et} \quad \boxed{f'_z = \frac{\partial f}{\partial z}}$$

Les dérivées du second ordre :

$$f''_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad ; \quad f''_y = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \quad \text{et} \quad f''_z = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Les dérivées mixtes :

$$f''_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \quad ; \quad f''_{xz} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} \quad ; \quad f''_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

$$f''_{zx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \quad ; \quad f''_{yz} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} \quad ; \quad f''_{zy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}$$

**a)**

$$f'_x = \cos(x+y)\ ;\ f'_y = \cos(x+y)$$

$$f''_x = f''_y = f''_{xy} = f''_{yx} = -\sin(x+y)$$

**b)**

$$f'_x = 3x^2 \mathrm{y} \ \ ;\ f'_y = x^3$$

$f''_x = 6xy$ ; $f''_y = 0$ ; $f''_{xy} = 3x^2$ ; $f''_{yx} = 3x^2$

**c)**

$f'_x = 3x^2 \log y \sin^2 z$ ; $f'_y = \frac{x^3}{y} \sin^2 z$ ; $f'_z = 2x^3 \log y \cos z \sin z = x^3 \log y \sin 2z$

$f''_x = 6x \log y \sin^2 z$ ; $f''_y = -\frac{x^3}{y^2} \sin^2 z$ ; $f''_z = 2x^3 \log y \cos 2z$

$f''_{xy} = \frac{3x^2}{y} \sin^2 z$ ; $f''_{xz} = 3x^2 \log y \sin 2z$ ; $f''_{yx} = \frac{3x^2}{y} \sin^2 z$ ; $f''_{yz} = \frac{x^3}{y} \sin 2z$

$f''_{zx} = 3x^2 \log y \sin 2z$ ; $f''_{zy} = \frac{x^3}{y} \sin 2z$

***<u>Exercice n°2</u>***

## a) Intégrale simple

Changement de variable

On pose $\cos\theta = \frac{b}{\sqrt{b^2+x^2}}$ donc $\sin\theta = \frac{x}{\sqrt{b^2+x^2}}$

On trouve que $\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{x}{b}$ ⇨ $x = \frac{b\sin\theta}{\cos\theta}$ et $dx = \frac{b}{cos^2\theta} d\theta$

L'intégrale devient

$$\int \frac{b}{cos^2\theta} \frac{cos^3\theta}{b^2} d\theta = \frac{1}{b} \int \cos\theta d\theta = \frac{\sin\theta}{b} + C^{ste} = \frac{x}{b\sqrt{b^2+x^2}} C^{ste}$$

## b) Intégrale double

On a : $1 \le x \le n$ et $0 \le y \le x^2$ (théorème de Fubini)

$$\int_1^n \int_0^{x^2} \frac{1}{(x+y)^2} dxdy = \int_1^n \left[\int_0^{x^2} \frac{1}{(x+y)^2} dy\right] dx = \int_1^n \left[-\frac{1}{x+y}\right]_0^{x^2} dx$$

Ce qui donne : $\int_1^n \frac{x}{x^2+x} dx = \int_1^n \frac{1}{1+x} dx = [Ln(1+x)]_1^n = Ln(1+n) - Ln2$

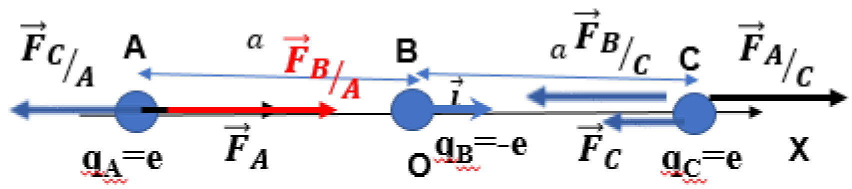
## c) Intégrale Triple

On a : $0 \leq r \leq R$ ; $0 \leq \theta \leq 2\pi$ et $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$

$$\int_0^R r^2 dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\varphi \, d\varphi = \frac{4}{3}\pi R^3$$

***Exercice n°3***

**1**)




Soit $\vec{F}_A$ la force

qui s'exerce sur $q_A$ due à $q_B$ et $q_C$.

$\vec{F}_B$ la force qui s'exerce sur $q_B$ due à $q_A$ et $q_C$.

$\vec{F}_C$ la force qui s'exerce sur $q_C$ due à $q_B$ et $q_A$.



D'après la loi de Coulomb et le principe de superposition on a :

$$\vec{F}_A = \vec{F}_{B/A} + \vec{F}_{C/A} = ke\left(\frac{e}{a^2}\vec{\imath} - \frac{e}{(2a)^2}\vec{\imath}\right) = \frac{3}{4a^2}ke^2\vec{\imath}$$

Sa norme ou module est $\|\vec{F}_A\| = 1,728 * 10^{-8} N$

$\vec{F}_B = \vec{F}_{A/B} + \vec{F}_{C/B} = \vec{0}$ , en raison de la symétrie par rapport au point **O**.

Et $\vec{F}_C = \vec{F}_{B/C} + \vec{F}_{A/C} = -\vec{F}_A = -\frac{3}{4a^2}ke^2\vec{\imath}$

Sa norme est $\|\vec{F}_C\| = 1,73 * 10^{-8} N$

**2)**

Les charges étant ponctuelles, alors leurs potentiels sont :

$$V_A = k\left(-\frac{e}{a}+\frac{e}{2a}\right) = -\frac{ke}{2a}$$

$$V_B = k\left(\frac{e}{a}+\frac{e}{a}\right) = \frac{2ke}{a}$$

$$V_C = k\left(\frac{e}{2a}-\frac{e}{a}\right) = -\frac{ke}{2a}$$

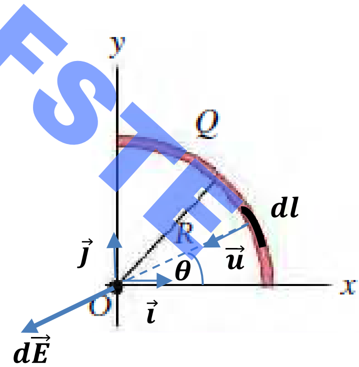
Donc l'énergie potentielle de système $U = \frac{1}{2}\sum_i q_i V_i$

$$U = \frac{1}{2}[q_A V_A + q_B V_B + q_C V_C] = -\frac{3}{2a}ke^2$$

$U = -3,46 * 10^{-18} J$ ou bien $U = -21.6\ eV$



***Exercice n°4***




Le champ électrostatique créé par la charge $dq$ est :

$$d\vec{E} = k\frac{dq}{r^2}\vec{u} \text{ or } dq = \lambda dl \text{ et } dl = Rd\theta \text{ ; avec r=R ; } k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

Donc

$$d\vec{E} = k\frac{\lambda R d\theta}{R^2}\vec{u} = k\frac{\lambda d\theta}{R}(-cos\theta\vec{\imath} - sin\theta\vec{\jmath})$$

Le champ total

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \frac{k\lambda}{R}\int_0^{\pi/2}(-cos\theta\vec{\imath} - sin\theta\vec{\jmath})\,d\theta = -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}(\vec{\imath}+\vec{\jmath})$$

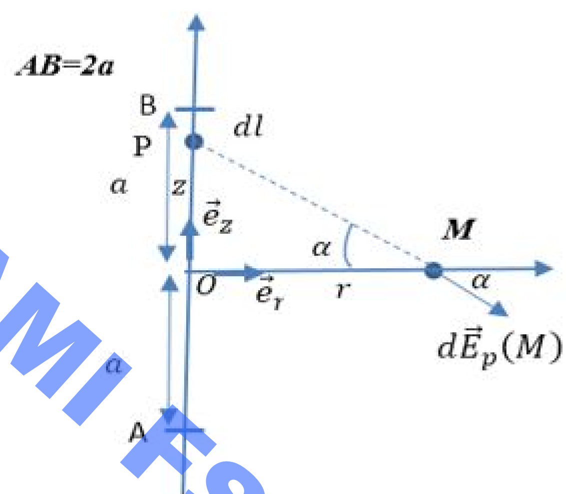
Le champ en fonction de la charge totale $\boldsymbol{Q}$

On a: $Q = \int dq = \int_0^{\pi/2} \lambda R\, d\theta = \frac{\lambda R\pi}{2} \rightarrow \lambda = \frac{2Q}{\pi R}$

$$\Rightarrow\ \vec{E} = -\frac{Q}{2\pi^2\varepsilon_0 R^2}(\vec{\imath}+\vec{\jmath})$$

***<u>Exercice n°5</u>***

On fait coïncider l'axe ***Oz*** avec le segment et on se place en coordonnées cylindriques (***r, θ, z)*** pour ***M***.






Soit ***O*** le milieu du segment, on a ***OM=r***. soit P un point du segment avec sa cote ***z*** telle que $-a \leq OP = z \leq a$

On considère un élément de longueur ***dl*** centré en ***P*** et portant la charge ***dq=λdl***. Il créé en ***M*** le champ élémentaire :

$$d\vec{E}_p(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dl}{PM^2}\vec{u}_{PM}$$

Donc le champ total créé par la distribution s'écrit :

$$\vec{E}(M) = \int_{P\in L} d\vec{E}_p(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{P\in L}\frac{\lambda dl}{PM^2}\vec{u}_{PM}$$

Ici $\overrightarrow{OP} = z\,\vec{e}_z$ , $dl = dz$ et $\overrightarrow{OM} = r\,\vec{e}_r$ d'où

$$\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OM} = -z\vec{e}_z + r\,\vec{e}_r$$

Soit $PM^2 = z^2 + r^2 \rightarrow PM = \sqrt{z^2+r^2}$ or $\vec{u}_{PM} = \frac{\overrightarrow{PM}}{PM} = \frac{r\,\vec{e}_r - z\vec{e}_z}{\sqrt{z^2+r^2}}$

Finalement :

$$\vec{E}(M) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-a}^{a}\frac{r\,\vec{e}_r - z\vec{e}_z}{(z^2+r^2)^{3/2}}dz$$

Or

$$\int_{-a}^{a}\frac{z}{\sqrt[3]{z^2+r^2}}dz = \left.\frac{-1}{\sqrt{z^2+r^2}}\right]_{-a}^{a} = 0$$

et

Voir ex 2

$$\int_{-a}^{a}\frac{r}{\sqrt[3]{z^2+r^2}}dz = \frac{1}{r}\left.\frac{z}{\sqrt{z^2+r^2}}\right]_{-a}^{a} = \frac{2a}{r\sqrt{a^2+r^2}}$$

On en déduit :

$$\vec{E}(M) = \frac{\lambda a}{2\pi r\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{a^2+r^2}}\vec{e}_r$$



**2)**

Dans le cas d'un fil infini càd ***a*** tend vers l'infini ($a\to\infty$)

La valeur du champ est :

$$\vec{E}(M) = \lim_{a\to\infty}\frac{\lambda a}{2\pi r\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{a^2+r^2}}\vec{e}_r = \frac{\lambda}{2\pi r\varepsilon_0}\vec{e}_r$$

## Théorème de Gauss

***Exercice n°6***

**1)**

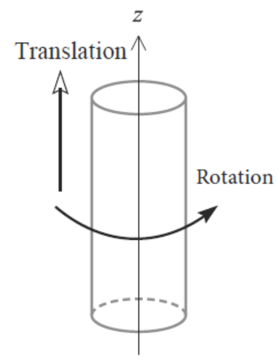
Dans la base cylindrique le vecteur $\vec{E}$(M) se décompose en :

$$\vec{E}(M) = \vec{E}(r,\theta,z) = E_r(r,\theta,z)\vec{e}_r + E_\theta(r,\theta,z)\vec{e}_\theta + E_z(r,\theta,z)\vec{e}_z$$

Invariances :

La distribution de charge est invariante par translation selon l'axe (Oz) et par rotation d'un angle θ autour de ce même axe, le champ est donc indépendant de coordonnées θ et Z.

$$\vec{E}(M) = \vec{E}(r, \cancel{\theta}, \cancel{z}) = \vec{E}(r)$$



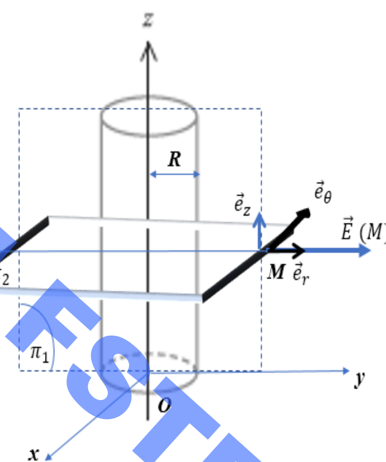

Le plan $\pi_1 = (M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ passant par M et OZ est un plan de symétrie donc $\vec{E}$(M) est dans ce plan soit ($E_\theta$=0).

Le plan $\pi_2 = (M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ passant par M et perpendiculaire à OZ est un plan de symétrie donc $\vec{E}(M) \in \pi_2$ est dans ce plan soit ($E_z$=0).

Ainsi le champ électrostatique est donc contenu dans l'intersection de ces deux plan $\vec{E}(M) \in \pi_1 \cap \pi_2$

Finalement le champ est radial (porté par $\vec{e}_r$) $\vec{E}(M) = E_r(r)\vec{e}_r$

(Pour une densité volumique présentant une symétrie cylindrique on aura : (ρ (r, θ, z) = ρ(r)))






**2)**

Flux de champ électrostatique à travers une surface fermée est égale à $\frac{1}{\varepsilon_0}$ fois la charge à l'intérieur de la surface.

$$\boldsymbol{\Phi}_{\vec{E}/_s} = \oiint_s \vec{\boldsymbol{E}}\,\overrightarrow{\boldsymbol{ds}} = \frac{\boldsymbol{q_{in}}}{\boldsymbol{\varepsilon_0}} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

**3)**

La symétrie est cylindrique. Alors la surface fermée de Gauss sera un cylindre passant par ***M*** de rayon ***r*** et de hauteur arbitraire ***h***, refermé par deux disques perpendiculaires à (***OZ***).

$$S_G = S_{b_1} + S_{b_2} + S_{Lat}$$

Le flux du champ à travers la surface de Gauss

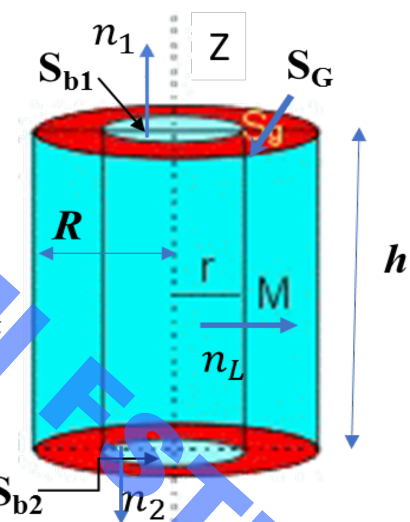
$$\Phi_{\vec{E}/S_G} = \underbrace{\cancel{\iint \vec{E}\,\overrightarrow{dS_{b_1}}}}_{=0,\ n_1 \perp \vec{E}} + \underbrace{\cancel{\iint \vec{E}\,\overrightarrow{dS_{b_2}}}}_{=0,\ n_2 \perp \vec{E}} + \overbrace{\iint \vec{E}\,\overrightarrow{dS_{Lat}}}^{n_L /\!/ \vec{E}}$$

$$\boxed{ds = r d\theta dz, 0 \le \theta \le 2\pi \quad 0 \le z \le h}$$

$$\Phi_{\vec{E}/S_G} = \iint \vec{E}\,\overrightarrow{dS_{Lat}} = \iint E\,dS\,\cos(0) = ES = E2\pi rh$$

Car E est radial ne dépend que de r

* Pour r < R






La charge intérieure à la surface de Gauss est :

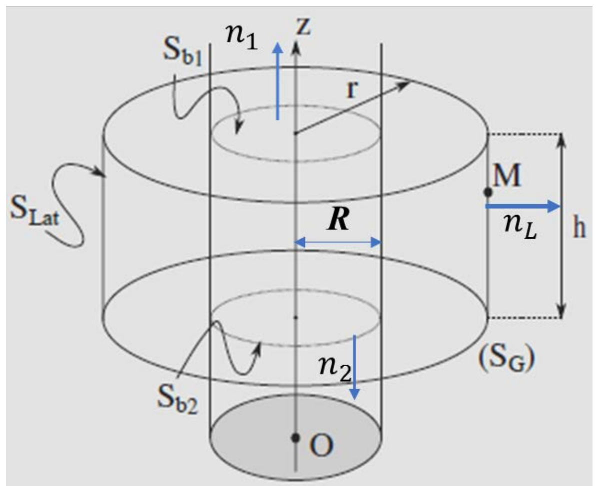
$$Q_{int} = \int dq = \iiint \rho\,dv = \rho \int_0^r r dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h dz = \rho \frac{r^2}{2} 2\pi h = \rho r^2 \pi h$$

L'application de Th de Gauss conduit à :

$$\Phi_{\vec{E}/S_G} = E2\pi rh = \frac{\rho r^2 \pi h}{\varepsilon_0}$$

Soit : $E(r) = \frac{\rho r}{2\varepsilon_0}$

* Pour r > R




$$Q_{int} = \iiint \rho\, dv = \rho \int_0^R r dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h dz = \rho R^2 \pi h$$

Donc d'après le TH de Gauss :

$$\Phi_{\vec{E}/S_G} = E 2\pi r h = \frac{\rho R^2 \pi h}{\varepsilon_0}$$

Soit $E(r) = \dfrac{\rho R^2}{2r\varepsilon_0}$

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} \dfrac{\rho r}{2\varepsilon_0}\vec{e}_r\ si\ r < R \\ \dfrac{\rho R^2}{2r\varepsilon_0}\ \vec{e}_r\ si\ r > R \end{cases}$$

On constate que le champ électrostatique est continu en ***r*=*R***.

**4)**

Le potentiel : la relation entre le champ et le potentiel $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$ or $\vec{E} = E\vec{e}_r \Rightarrow \frac{dV}{dr}\vec{e}_r$

Soit $E = -\frac{dV}{dr} \Rightarrow V = -\int E\,dr$

* Pour r < R

$$\boldsymbol{V(r) = -\int \frac{\rho r}{2\varepsilon_0} dr = -\frac{\rho r^2}{4\varepsilon_0} + C_1}$$

* Pour r > R

$$\boldsymbol{V(r) = -\frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0} ln r + C_2}$$

La référence de potentiel ne peut pas être prise à l'infini, puisqu'il y existe des charges. On choisit V(r=R)=0

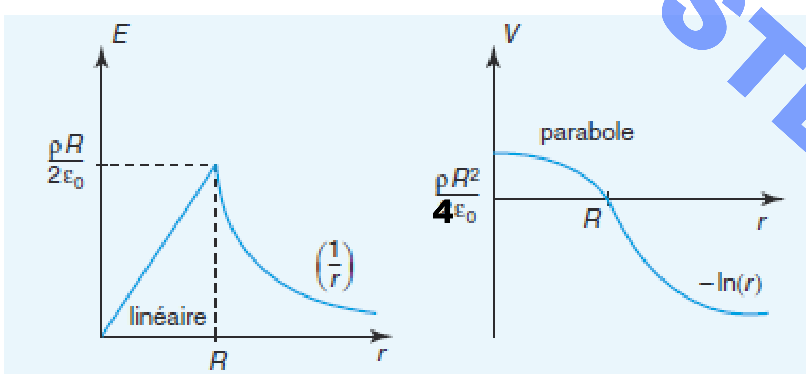
Donc $\boldsymbol{C_1} = \frac{\boldsymbol{\rho R^2}}{\boldsymbol{4\varepsilon_0}}$ et $\boldsymbol{C_2} = \frac{\boldsymbol{\rho R^2}}{\boldsymbol{2\varepsilon_0}}\boldsymbol{ln R}$

$$\boldsymbol{V(r) = \begin{cases} \frac{\rho}{4\varepsilon_0}(R^2 - r^2) si\ r < R \\ -\frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0} ln\, {}^{r}/_{R}\ si\ r > R \end{cases}}$$



**5)**

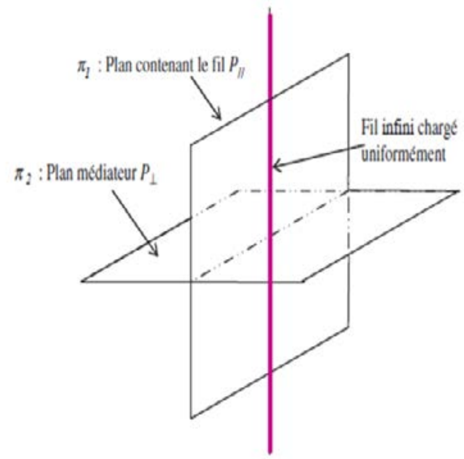
Courbe ***E=f(r)*** et ***V=f(r)***



***Exercice n°7***

-

**1)**




- La distribution de charges est invariante par translation selon Oz.

- La distribution de charges est invariante par rotation autour de Oz

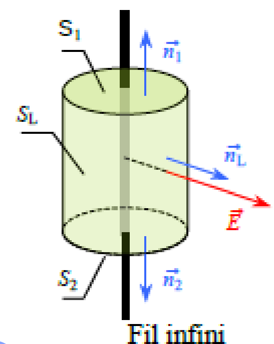
- Le plan $\pi_1$ contenant le fil est plan de symétrie

- Le plan $\pi_2$ perpendiculaire au fil est plan de symétrie

**2)**

La symétrie est cylindrique. On choisit comme surface de Gauss $\boldsymbol{S_G}$ un cylindre de rayon ***r*** de hauteur ***h*** et qui a pour axe le fil infini.






$$S_G = S_1 + S_2 + S_L$$

Le théorème de Gauss stipule que :

$$\Phi_{\vec{E}/_s} = \oiint_s \vec{E}\,\overrightarrow{ds} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0}$$

$$\Phi_{\vec{E}/_{S_G}} = \iint \vec{E}\,\overrightarrow{dS_1} + \iint \vec{E}\,\overrightarrow{dS_2} + \iint \vec{E}\,\overrightarrow{dS_L}$$

$$\Phi_{\vec{E}/_{S_G}} = \iint \vec{E}\,\overrightarrow{dS_{Lat}} = ES = E2\pi rh$$

Car ***E*** est radial ne dépend que de r et comme tout les points ***M*** de la surface latérale sont séparés de ***r*** du fil ⇒ E=$C^{ste}$

La charge à l'intérieur de la surface de Gauss :

$$Q_{int} = \int dq = \lambda \int_0^h dz = \lambda h$$

Th de Gauss implique

$$E 2\pi r h = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0}$$

Donc

$$E = \frac{\lambda}{2\pi r \varepsilon_0}$$

**3)**

Le potentiel

$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$ or $\vec{E} = E\vec{e}_r \Rightarrow \frac{dV}{dr}\vec{e}_r$

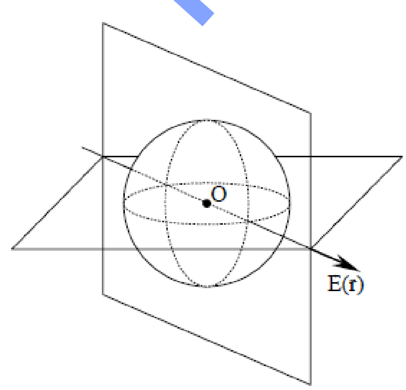
Soit $E = -\frac{dV}{dr} \Rightarrow V = -\int E\,dr = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\int\frac{dr}{r} = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln r + C^{ste}$



***<u>Exercice n°8</u>***

**1-** Tout plan passant par O est plan de symétrie de la distribution de charge

Comme le champ $\vec{E}$ appartient à l'intersection de deux plans de symétrie, on en déduit que le champ est radial : $\vec{E}$(r)= E (r, θ, φ) $\vec{e}_r$

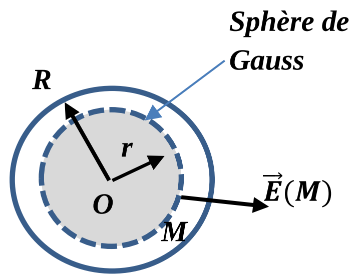



La symétrie de la distribution est sphérique, alors $\vec{E}$ ne dépend pas de θ et φ. $\vec{E}$(r)= E (r) $\vec{e}_r$

**2-** Champ en tout point de l'espace

Prenons pour la surface fermée de Gauss (S) la sphère de centre ***O*** et de rayon ***r*** passant par le point ***M***.

Le flux de $\vec{E}$ à travers la surface fermée (S) est : $\Phi_{\vec{E}/_S} = \oiint_S \vec{E}\,\overrightarrow{dS}$ puisque $\vec{E}$ ne dépend que de r donc le flux $\Phi_{\vec{E}/_S} = E\iint dS = ES = E4\pi r^2$



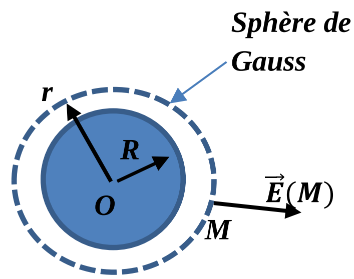

Deux cas se présentent suivant la distance ***r***.

1er cas à l'intérieur de la sphère : r <R

$\Phi_{\vec{E}/_S} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$ avec $Q_{int} = \int dq$ et $dq = \rho dv \Rightarrow Q_{int} = \iiint_v \rho dv$

Soit $Q_{int} = \rho\frac{4}{3}\pi r^3$ donc $\Phi_{\vec{E}/_S} = E4\pi r^2 = \rho\frac{4}{3}\frac{\pi r^3}{\varepsilon_0}$

$\Rightarrow E(r) = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}$




2eme cas à l'extérieur de la sphère : r > R

$\Phi_{\vec{E}/_S} = E4\pi r^2 = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$

Avec

$$Q_{int} = \iiint_v \rho dv = \rho\frac{4}{3}\pi R^3$$

Donc $E4\pi r^2 = \rho\frac{4}{3}\frac{\pi R^3}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}$

(Si r=R, $E(r) = \frac{\rho R}{3\varepsilon_0}$ on trouve que le champ est continue pour une distribution volumique.)

**3-** Calcul du potentiel

On sait que $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V \Rightarrow E = -\frac{dV}{dr}$ car E ne dépend que de ***r***.

$\Rightarrow V = -\int E\,dr + C^{ste}$

Pour r<R

$$V_{int} = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\int r dr + C_1 = -\frac{\rho}{6\varepsilon_0}r^2 + C_1$$

Pour r>R

$$V_{ext} = -\frac{\rho R^3}{3\boldsymbol{\varepsilon_0}} \int \frac{dr}{r^2} + C_2 = \frac{\rho R^3}{3r\boldsymbol{\varepsilon_0}} + C_2$$

Si on prend $V(\infty) = 0$

$V_{ext}(\infty) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$ alors $V_{ext}(r) = \frac{\rho R^3}{3r\boldsymbol{\varepsilon_0}}$

$V_{int}(R) = V_{ext}(R) = \frac{\rho R^2}{3\boldsymbol{\varepsilon_0}} \Rightarrow V_{int}(r) = \frac{\rho}{\boldsymbol{\varepsilon_0}}(\frac{R^2}{2} - \frac{r^2}{6})$

**4-** Courbe E=f(r) et V=f(r)