جامعة مولاي إسماعيل
UNIVERSITÉ MOULAY ISMAÏL
كلية العلوم
FACULTÉ DES SCIENCES

Analyse Complexe

(SMA 6)

Chapitre V : Théorie des Résidus

§1. Séries de Taylor
§2. Séries de Laurent
§3. Résidus
§4. Lemmes de Jordan
§5. Calcul d'Intégrales par Méthode des Résidus
Exercices d'Application

M.Babahmed

Chapitre V Théorie des Résidus

§1. Séries de Taylor.

Soit z_0 un nombre complexe fixé.

Pour tous $y \neq z \in \mathbb{C}$, on a :

$$\frac{1}{y-z} = \frac{1}{(y-z_0)+(z_0-z)} = \frac{1}{y-z_0}\left[\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{y-z_0}}\right]$$

Or $\frac{1}{1-\theta} = 1+\theta+\theta^2+\dots+\theta^m+\frac{1}{1-\theta}\theta^{m+1}$ $\forall m \in \mathbb{N}$.

Et alors, on a :

$$\frac{1}{y-z} = \frac{1}{y-z_0}\left[1+\left(\frac{z-z_0}{y-z_0}\right)+\dots+\left(\frac{z-z_0}{y-z_0}\right)^m+\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{y-z_0}}\left(\frac{z-z_0}{y-z_0}\right)^{m+1}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y-z} = \frac{1}{y-z_0}+\frac{z-z_0}{(y-z_0)^2}+\dots+\frac{(z-z_0)^m}{(y-z_0)^{m+1}}+\frac{1}{y-z}\left(\frac{z-z_0}{y-z_0}\right)^{m+1} \quad (1)$$

Soit maintenant f une fonction holomorphe sur un convexe U de $\mathbb{C}$. Et soient $z_0, z \in U$.

Multiplions les deux membres de (1) par $\frac{f(y)}{2\pi i}$ et intégrons sur un contour fermé C contenu dans U, on aura :

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(y)}{y-z}\,dy = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(y)}{y-z_0}\,dy + \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{z-z_0}{(y-z_0)^2} f(y)\,dy + \dots +$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{(z-z_0)^m}{(y-z_0)^{m+1}} f(y)\,dy + \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(y)}{y-z}\left(\frac{z-z_0}{y-z_0}\right)^{m+1} dy.$$

Et alors, d'après la formule de Cauchy, on a :

$$f(z) = f(z_0)+\frac{1}{1!}f'(z_0)(z-z_0)+\dots+\frac{1}{m!}f^{(m)}(z_0)(z-z_0)^m+R_m(z) \quad (2)$$

où R_m est le reste d'ordre m donné par l'expression :

$$R_n(z) := \frac{(z-z_0)^{n+1}}{2\pi i} \int_C \frac{f(y)}{(y-z)(y-z_0)^{n+1}}\, dy .$$

Il est clair que le développement (2) généralise au cas d'une fonction holomorphe la notion de développement de Taylor introduit en Analyse réelle.

Naturellement on peut poser la question suivante :

" Sous quelles conditions peut-on aller dans le développement jusqu'à l'infini ? "

Plus précisément, comment peut-on avoir :

$$\lim_{n \to +\infty} R_n = 0 \text{ uniformément ?}$$

Alors, dans le cas où on peut répondre positivement à ces questions, la fonction f peut être représentée par une série de puissances positives du simple monome $(z-z_0)$:

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n \qquad (3)$$

Définition 1.1. La série donnée dans la relation (3) est appelée **la série de Taylor** de f au voisinage de z_0.

Théorème 1.2. Soit f une fonction complexe. Alors f peut être représentée par sa série de Taylor sur toute boule ouverte $B(z_0, R)$ sur laquelle f est holomorphe. En plus, la série converge uniformément sur toute boule fermée contenue dans $B(z_0,R)$.

Preuve. Soit $z \in B(z_0,R)$. Il existe $k \in]0,1[$ tel que $|z-z_0| = kR$, et on a : $|y-z_0| \leq |y-z| + |z-z_0|$

$\Rightarrow |y-z| \geq |y-z_0| - |z-z_0| \geq R - kR = (1-k)R > 0$

Soit $M := \max\limits_{y \in B(z_0,R)} |f(y)|$. Alors on a :

$$|R_n(z)| = \left| \frac{(z-z_0)^{n+1}}{2\pi i} \int_C \frac{f(y)}{(y-z)(y-z_0)^{n+1}}\, dy \right|$$

$$\leq \frac{(kR)^{n+1}}{2\pi} \frac{M\, 2\pi R}{(1-k) R\, R^{n+1}} = \frac{M k^{n+1}}{1-k}.$$

Donc, $\lim\limits_{n \to +\infty} R_n = 0$.

La série de Taylor existe bien dans tout ouvert contenu dans $B(z_0,R)$.

De plus, comme la borne du reste est indépendante de z, la convergence est uniforme sur toute boule fermée de rayon kR ($0<k<1$) ∎

On donne, maintenant, le développement de Taylor de quelques fonctions élémentaires :

1) $$e^z = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!} \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

2) $$\sin z = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

3) $\cos z = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad \forall z \in \mathbb{C}$.

4) $\operatorname{sh} z = \sum_{n\geq 0} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \forall z \in \mathbb{C}$.

5) $\operatorname{ch} z = \sum_{n\geq 0} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad \forall z \in \mathbb{C}$.

6) $(1+z)^\alpha = 1 + \sum_{n\geq 1} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} z^n \quad \forall z \in B(0,1)$.

$(\alpha \in \mathbb{R})$.

7) Soit $f(z) = \operatorname{Log}(1+z)$.

$\forall n \geq 1, \ \frac{d^n}{dz^n} \operatorname{Log}(1+z) = \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{(1+z)^n}$

$\Longrightarrow \ \frac{d^n}{dz^n} \operatorname{Log}(1+z)\Big/_{z=0} = (-1)^{n+1}(n-1)!$.

Donc, la série de Taylor de $\operatorname{Log}(1+z)$ au voisinage de 0 est :

$$\operatorname{Log}(1+z) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n \quad \forall z \in B(0,1).$$

§2. Séries de Laurent

Définition 2.1. Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite doublement infinie. On dit que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} z_n$ converge (resp.

converge absolument) si les deux séries $\sum_{n\geq 0} z_n$ et $\sum_{n\geq 1} z_{-n}$ convergent (resp. convergent absolument).

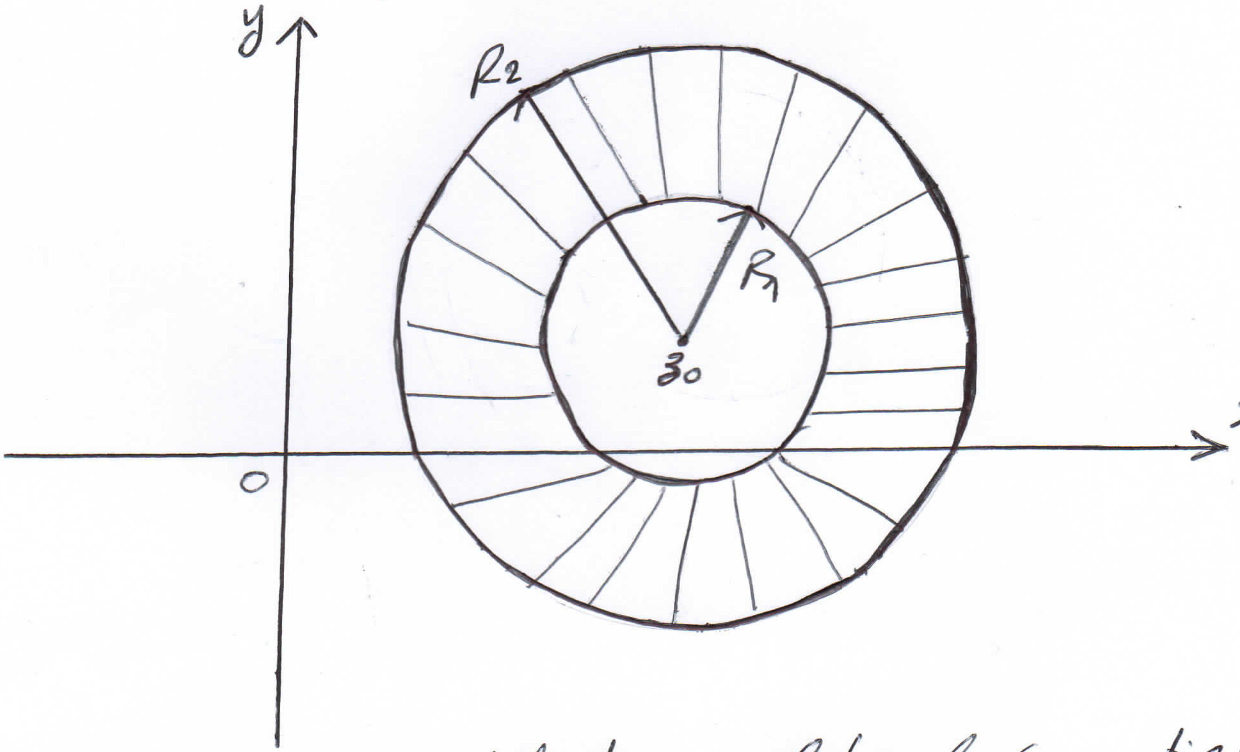
Et dans ce cas, on a :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} z_n = \sum_{n\geq 0} z_n + \sum_{n\geq 1} z_{-n}$$

<u>**Définition 2.2**</u> Soient $0 \leq R_1 < R_2 \leq +\infty$ et $z_0 \in \mathbb{C}$.

On appelle **Couronne** de centre z_0 et de rayons R_1 et R_2 l'ensemble :

$$\mathcal{C}(z_0, R_1, R_2) := \{ z \in \mathbb{C} / R_1 < |z - z_0| < R_2 \}$$



On note que cette définition englobe le cas particulier de boule épointée : $B^*(z_0, R) := \mathcal{C}(z_0, 0, R)$ $\forall R > 0$.

Théorème 2.3. (Théorème de Laurent)

Soit f une fonction holomorphe sur la couronne $\mathcal{C}(z_0, R_1, R_2)$. Alors on a :

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n (z-z_0)^n$$

avec la convergence est uniforme et absolue sur toute couronne $\mathcal{C}(z_0, r_1, r_2)$ avec $R_1 < r_1 < r_2 < R_2$.

Et les coefficients a_n sont donnés par :

$$(*) \quad a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}(z_0, r)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

où $\mathcal{C}(z_0, r)$ est un cercle de centre z_0 et de rayon $r \in]R_1, R_2[$.

Preuve. Soit $z \in \mathcal{C}(z_0, R_1, R_2)$. Et soient $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ tels que $R_1 < r_1 < r_2 < R_2$ et $z \in \mathcal{C}(z_0, r_1, r_2)$.

D'après la formule de Cauchy, on a :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathcal{C}(z_0, r_1, r_2)} \frac{f(y)}{y-z}\, dy$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}(z_0, r_2)} \frac{f(y)}{y-z}\, dy - \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}(z_0, r_1)} \frac{f(y)}{y-z}\, dy$$

Pour tout $y \in \mathcal{C}(z_0, r_2)$, on a : $\left|\frac{z-z_0}{y-z_0}\right| < 1$. Et alors on a :

$$\frac{1}{y-z} = \frac{1}{(y-z_0)\left[1-\left(\frac{z-z_0}{y-z_0}\right)\right]} = \sum_{n\geq 0} \frac{(z-z_0)^n}{(y-z_0)^{n+1}},$$

et cette série converge absolument et uniformément sur $y \in \mathcal{C}(z_0, R_2)$.

En multipliant par la fonction bornée $\frac{f(y)}{2\pi i}$ et en intégrant terme à terme le long de $\mathcal{C}(z_0, R_2)$, on aura :

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}(z_0,R_2)} \frac{f(y)}{y-z}\, dy = \sum_{n\geq 0} a_n (z-z_0)^n, \text{ avec}$$

$$a_n := \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}(z_0,R_2)} \frac{f(y)}{(y-z_0)^{n+1}}\, dy \quad \forall n \geq 0.$$

L'autre intégrale $\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}(z_0,R_1)} \frac{f(y)}{y-z}\, dy$ est décomposée de manière similaire.

Pour tout $y \in \mathcal{C}(z_0, R_1)$, on a $\left|\frac{y-z_0}{z-z_0}\right| < 1$, et donc on a :

$$-\frac{1}{y-z} = \frac{1}{(z-z_0)\left[1-\left(\frac{y-z_0}{z-z_0}\right)\right]} = \sum_{n\geq 0} \frac{(y-z_0)^{n-1}}{(z-z_0)^n},$$

et cette série converge absolument et uniformément sur $y \in \mathcal{C}(z_0, R_1)$.

En multipliant par la fonction bornée $\frac{f(y)}{2\pi i}$ et en intégrant terme à terme le long de $\mathcal{C}(z_0, R_1)$, on aura :

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_0,R_1)} \frac{f(y)}{y-z}\,dy = \sum_{n\geq 1} \frac{d_n}{(z-z_0)^n}$$

où $d_n := \frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_0,R_1)} f(y)(y-z_0)^{n-1}\,dy \quad \forall n\geq 1$.

Et si on remplace l'indice n par $-n$, on aura :

$$a_n = d_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_0,R_1)} \frac{f(y)}{(y-z_0)^{n+1}}\,dy \quad \forall n\leq -1 .$$

On en déduit alors le développement donné par $(*)$.
En plus, d'après le théorème de Cauchy, dans les expressions des coefficients a_n, on peut remplacer les cercles $C(z_0,R_1)$ et $C(z_0,R_2)$ par n'importe quel cercle $C(z_0,r)$ avec $R_1 < r < R_2$

<u>Définition 2.4.</u> La série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-z_0)^n$ du théorème 2.3 s'appelle **la série de Laurent** de la fonction f dans la couronne $C(z_0,R_1,R_2)$.
En plus, $\sum_{n\geq 0} a_n(z-z_0)^n$ s'appelle **la partie régulière** de la série de Laurent et $\sum_{n\leq -1} a_n(z-z_0)^n$ s'appelle **la partie singulière** (ou partie principale) de cette série.

<u>Corollaire 2.5.</u> Soit z_0 une singularité isolée d'une fonction holomorphe f sur la boule épointée $B^*(z_0,R)$, et supposons que $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-z_0)^n$ est la série de

Laurent dans la couronne $\mathcal{C}(z_0, 0, R)$. Alors, on a :

(1) z_0 est éliminable <u>ssi</u> $a_n = 0$ $\forall n \leq -1$

(2) z_0 est un pôle d'ordre m <u>ssi</u> $a_{-m} \neq 0$ et $a_n = 0$ pour tout $n \leq -(m+1)$.

(3) z_0 est une singularité essentielle <u>ssi</u> $a_n \neq 0$ pour un nombre infini des entiers négatifs n.

<u>Preuve</u>. (1) Supposons que $a_n = 0$ $\forall n \leq -1$. Alors la fonction $g(z) := \sum_{n \geq 0} a_n (z-z_0)^n$ est holomorphe sur $B(z_0, R)$ et elle est égale à $f(z)$ dans la boule épointée $B^*(z_0, R)$. Donc z_0 est une singularité éliminable. La réciproque est évidente.

(2) Supposons que $a_n = 0$ $\forall n \leq -(m+1)$, alors la fonction $g(z) := (z-z_0)^m f(z)$ se développe en série de Laurent régulière. Et d'après (1), $g(z)$ présente une singularité éliminable en z_0.

Pour la réciproque, on inverse cet argument.

(3) Conséquence de (1) et (2) ∎

<u>Théorème 2.6.</u> (Théorème de Casorati-Weierstrass)

Soit z_0 une singularité isolée essentielle d'une fonction holomorphe sur la boule épointée $B^*(z_0, R)$. Alors, pour tout $\delta > 0$, $f(\mathcal{C}(z_0, 0, \delta))$ est dense dans $\mathbb{C}$.

Preuve. Soit $\delta > 0$. Il s'agit de montrer que pour tous $c \in \mathbb{C}$ et $\varepsilon > 0$, il existe $z \in C(z_0, 0, \delta)$ tel que $|f(z) - c| < \varepsilon$.

Supposons, par l'absurde, qu'il existe $c \in \mathbb{C}$ et $\varepsilon > 0$ tels que $|f(z) - c| \geq \varepsilon \quad \forall z \in C(z_0, 0, \delta) = B^*(z_0, \delta)$.

Donc, $\displaystyle\lim_{z \to z_0} \frac{|f(z) - c|}{|z - z_0|} = \infty$, et alors la fonction

$g(z) := \dfrac{f(z) - c}{z - z_0}$ possède un pôle au point z_0.

Soit m l'ordre de ce pôle. Alors on a :

$\displaystyle\lim_{z \to z_0} |z - z_0|^{m+1} |f(z) - c| = 0$. Et par conséquent,

$$|z - z_0|^{m+1} |f(z)| \leq |z - z_0|^{m+1} |f(z) - c| + |z - z_0|^{m+1} c \xrightarrow[z \to z_0]{} 0$$

$$\Rightarrow (z - z_0)\left[(z - z_0)^m f(z)\right] \xrightarrow[z \to z_0]{} 0$$

$\Rightarrow (z - z_0)^m f(z)$ possède une singularité éliminable en z_0.

Ce qui est absurde ■

Exemples 2.7. 1) La fonction $f(z) := \dfrac{1}{z - 1}$ est développable en série de Laurent sur la couronne $C(0, 1, 2)$ comme fonction holomorphe sur cette couronne. Son développement de Laurent est :

$$\frac{1}{z - 1} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{z^n} \qquad \forall z \in C(0, 1, 2).$$

2) La fonction $g(z) := \sin\left(\frac{1}{z}\right)$ est holomorphe sur la couronne $C(0, 0, R)$ pour tout $R > 0$.

Son développement en série de Laurent est donné par :

$$\sin\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{(2n)!\, z^{2n}} \quad \forall z \in \mathcal{C}(0,0,R).$$

Et le rayon de convergence de la série est infini.

3) La fonction $h(z) := \frac{1}{z(1-z)}$ est holomorphe sur la $\mathbb{C} \setminus \{0,1\}$. Son développement de Laurent sur la couronne $\mathcal{C}(0,0,1)$ est :

$$\frac{1}{z(1-z)} = \frac{1}{z} + \frac{1}{1-z} = \frac{1}{z} + \sum_{n\geq 0} z^n$$

Donc, $$\frac{1}{z(1-z)} = \sum_{n\geq -1} z^n \quad \forall z \in \mathcal{C}(0,0,1).$$

Le développement de Laurent de la fonction h sur la couronne $\mathcal{C}(0,1,+\infty)$ est donné par :

$$\frac{1}{z(1-z)} = -\frac{1}{z^2}\, \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\frac{1}{z^2} \sum_{n\geq 0} \left(\frac{1}{z}\right)^n.$$

Donc, $$\frac{1}{z(1-z)} = -\sum_{n\geq 2} \frac{1}{z^n} \quad \forall z \in \mathcal{C}(0,1,+\infty).$$

Théorème 2.8 (Théorème de Riemann – Singularité éliminable)

Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$, $z_0 \in U$ et f une fonction holomorphe sur l'ouvert épointé $U^* := U \setminus \{z_0\}$ et de développement de Laurent $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n (z-z_0)^n$ en z_0.

Alors L.A.S.S.E :

(i) f est bornée sur un voisinage épointé de z_0 (c.à.d : $\exists r, M > 0$ tels que $\sup_{z\in B^*(z_0,r)} |f(z)| \leq M$) ;

(ii) $a_n = 0 \quad \forall n \leq -1$;

(iii) f se prolonge de manière unique en une fonction $\tilde{f}$ holomorphe sur U.

Dans ce cas, z_0 est une singularité éliminable de f.

<u>Preuve</u>. (i) $\Rightarrow$ (ii). Soient $0 \leq s \leq r$. Pour tout $n \leq -1$, on a :
$$|a_n| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{\mathcal{C}(z_0,s)} \frac{f(y)}{(y-z_0)^{n+1}}\,dy\right|$$
$$= \frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi} \frac{f(z_0+se^{it})}{(z_0+se^{it}-z_0)^{n+1}}\, ise^{it}dt\right|$$
$$\leq \frac{1}{2\pi}\sup_{t\in\mathbb{R}}\left|f(z_0+se^{it})\right| s^{-n}\int_0^{2\pi} dt$$
$$\leq M s^{-n} \xrightarrow[s \to 0]{} 0 \quad (n \leq -1)$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Puisque tous les a_n sont nuls pour $n \leq -1$, la partie singulière h de f est nulle. Et comme $f-h$ est holomorphe, donc f se prolonge holomorphiquement à U. Et l'unicité est une conséquence du principe d'unicité.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Evidente ■

<u>Théorème 2.9.</u> (Singularités Polaires)

Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$, $z_0 \in \mathbb{C}$ et f une fonction holomorphe sur l'ouvert épointé $U^* := U \setminus \{z_0\}$ de développement de Laurent $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-z_0)^n$ en z_0. Alors L.A.S.S.E :

(i) $\lim_{z\to z_0} |f(z)| = +\infty$;

(ii) $\exists -m < -1$ tel que $a_{-m} \neq 0$ et $a_{-n} = 0$ $\forall -n < -m$;

(iii) Il existe un polynôme non constant $P \in \mathbb{C}[z]$ tel que $f(z) = P\left(\frac{1}{z-z_0}\right)$ se prolonge en une fonction holomorphe sur U.

Dans ce cas, z_0 est un pôle d'ordre m de f.

<u>Preuve</u>. (i) $\Rightarrow$ (ii) Supposons que $\lim_{z\to z_0} |f(z)| = +\infty$. Alors la fonction $g := \frac{1}{f}$ est définie et holomorphe sur une boule épointée $B^*(z_0, r)$ pour r assez petit qui tend vers 0 quand z tend vers z_0. Et alors, d'après le théorème de Riemann (Théorème 2.8.), g admet un prolongement holomorphe non constant $\tilde{g}$ sur $B(z_0, r)$ avec $\tilde{g}(z_0) = 0$. Alors on peut écrire :

$\tilde{g}(z) = (z-z_0)^m h(z)$, avec h une fonction holomorphe sur $B(z_0,r)$ qui s'annule en aucun point de $B(z_0, r)$.

Développons alors l'inverse de cette fonction sur $B(z_0, r)$:

$$\frac{1}{h(z)} = \sum_{n\geq 0} b_n (z-z_0)^n \quad \text{avec } b_0 \neq 0 .$$

Et alors, pour tout $z \in B^*(z_0, r)$, on a :

$$f(z) = \frac{1}{\tilde{g}(z)} = \frac{1}{(z-z_0)^m}\frac{1}{h(z)} = \frac{1}{(z-z_0)^m}\sum_{n\geq 0} b_n (z-z_0)^n .$$

Enfin, l'unicité du développement en série de Laurent

$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n (z-z_0)^n$ nous donne le résultat :

$a_{-n} = 0 \ \forall -n < -m$ et $a_n = b_{n+m} \ \forall n \geq -m$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Puisque la partie régulière du développement de Laurent est tronquée, elle s'écrit effectivement sous une forme polynômiale non constante :

$$\frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m} + \dots + \frac{a_{-1}}{(z-z_0)^1} = P\left(\frac{1}{z-z_0}\right).$$

(iii) $\Rightarrow$ (i). Puisque $P\left(\frac{1}{z-z_0}\right)$ est non constant, il contient un terme de plus haut degré $\frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m}$, qui tend vers ∞ en module quand z tend vers z_0 et domine tous les autres ■

Définition 2.10. Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$, $z_0 \in \mathbb{C}$ et f une fonction holomorphe sur l'ouvert épointé $U^* := U \setminus \{z_0\}$ de développement de Laurent $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n (z-z_0)^n$ en z_0.

On appelle **la valuation de f en z_0** le terme suivant :

$$v_f(z_0) := \mathrm{Inf}\{n \in \mathbb{Z} / a_n \neq 0\}$$

$$\left(v_f(z_0) \in \overline{\mathbb{Z}} := \{-\infty, +\infty\} \cup \mathbb{Z}\right)$$

Remarque 2.11. Le cas où $v_f(z_0) = +\infty$ ne se produit que si f est identiquement nulle sur un voisinage épointé de z_0.

Classification des Singularités Isolées :

Soit f une fonction holomorphe sur la boule épointée

$B^*(z_0, r)$ dont le développement en série de Laurent est :

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n .$$

Alors on a :

(1) z_0 est une singularité éliminable de f **SSi** $0 \leq v_f(z_0)$

(2) z_0 est un pôle d'ordre m de f **SSi** $-m = v_f(z_0)$.

(3) z_0 est une singularité essentielle de f **SSi** $-\infty = v_f(z_0)$.

§3. Résidus.

Soit f une fonction holomorphe sur le voisinage épointé de z_0 $B^*(z_0, R)$ et qui possède une singularité isolée en z_0.

On sait que f admet le développement en série de Laurent sur la couronne $C(z_0, 0, R)$ suivant :

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n = \dots + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1 (z - z_0) + \dots$$

Et la série peut être intégrée terme à terme sur tout cercle fermé contenu dans la couronne $C(z_0, 0, R)$.

Soit $r \in]0, R[$ et considérons $C(z_0, r)$ le cercle de centre z_0 et de rayon r orienté dans le sens direct.

Si on intègre la série de Laurent terme à terme sur $C(z_0, r)$, et en tenant compte que :

$$\int_{C(z_0, r)} (z - z_0)^n dz = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq -1 \\ 2\pi i & \text{si } n = -1 \end{cases}$$

Alors, on a : $$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}(z_0,r)} f(z)\, dz.$$

Définition 3.1. Soit z_0 une singularité isolée d'une fonction holomorphe sur un voisinage épointé V de z_0 et ayant pour développement de Laurent $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n (z-z_0)^n$ dans une couronne $\mathcal{C}(z_0, 0, R)$ contenue dans V. On appelle **résidu de f au point z_0**, qu'on note $Res(f,z_0)$, le coefficient a_{-1} dans la série de Laurent de f.

i.e : $$Res(f,z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}(z_0,r)} f(z)\, dz.$$

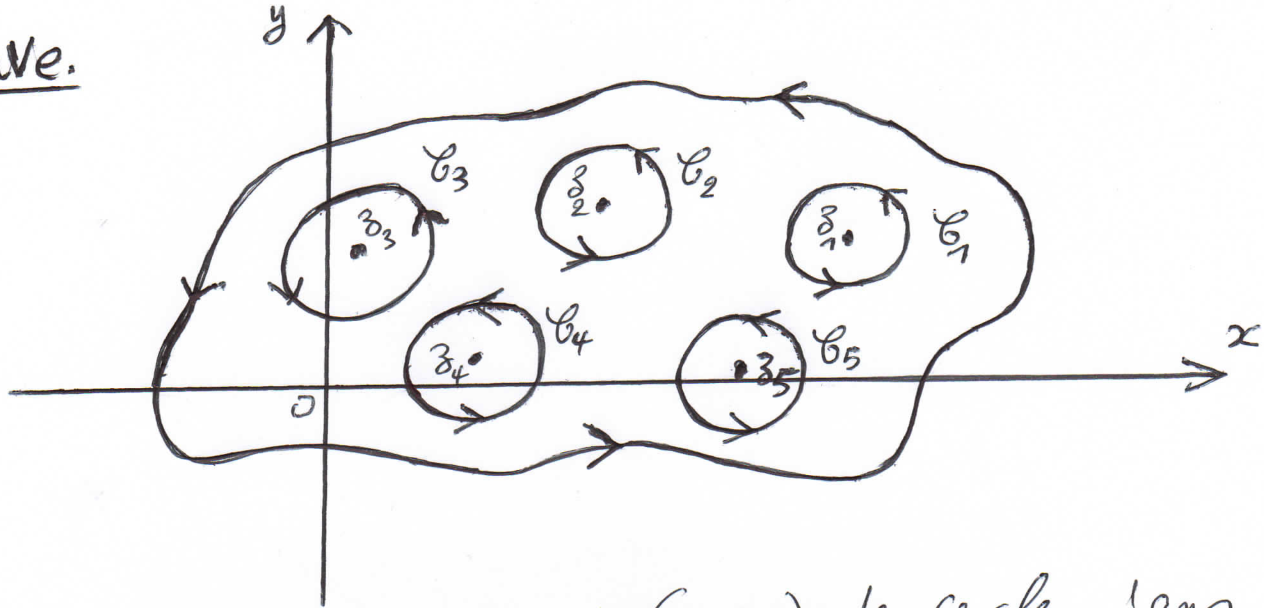
Où $\mathcal{C}(z_0,r)$ est le cercle de centre z_0 et de rayon r orienté dans le sens direct et contenu dans $\mathcal{C}(z_0, 0, R)$.

Théorème 3.2. (Théorème des Résidus de Cauchy)

Soient $\mathcal{C}$ un chemin fermé orienté dans le sens direct et f une fonction holomorphe sur $\mathcal{C}$ et son intérieur sauf pour un nombre fini de singularités isolées $z_1, \ldots, z_m$ à l'intérieur de $\mathcal{C}$. Alors, on a :

$$\int_{\mathcal{C}} f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{m} Res(f, z_j).$$

Preuve.



Soient $\mathscr{C}_1 := \mathscr{C}(z_1, r_1), \dots, \mathscr{C}_m := \mathscr{C}(z_m, r_m)$ des cercles dans l'intérieur de $\mathscr{C}$ autour des points $z_1, \dots, z_m$ et qui sont deux à deux disjoints.

D'après le théorème intégral de Cauchy, on a :

$$\int_{\mathscr{C}} f(z)\, dz = \sum_{j=1}^{m} \int_{\mathscr{C}_j} f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{m} Res(f, z_j) \blacksquare$$

Le calcul des résidus va dépendre de type de la singularité isolée.

Proposition 3.3. Soit z_0 une singularité isolée d'une fonction holomorphe sur un voisinage épointé de z_0. On a : z_0 est un pôle de f ssi $Res(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) \neq 0$.

Preuve. On sait que z_0 est un pôle d'ordre 1 de f ssi la série de Laurent de f en z_0 est de la forme :

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + h(z)$$

avec $a_{-1} \neq 0$ et h est la partie régulière de la série de Laurent de f en z_0. Donc, $(z - z_0) f(z) = a_{-1} + (z - z_0) h(z)$.

Et alors, $\lim_{z \to z_0} (z-z_0) f(z) = a_{-1} = \mathrm{Res}(f, z_0)$ ■

Proposition 3.4. Soit $f(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$ avec p, q deux fonctions holomorphes en z_0, $p(z_0) \neq 0$ et q admet un **zéro** en z_0. Alors, on a :

$$\mathrm{Res}\left(\frac{p(z)}{q(z)}, z_0\right) = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$$

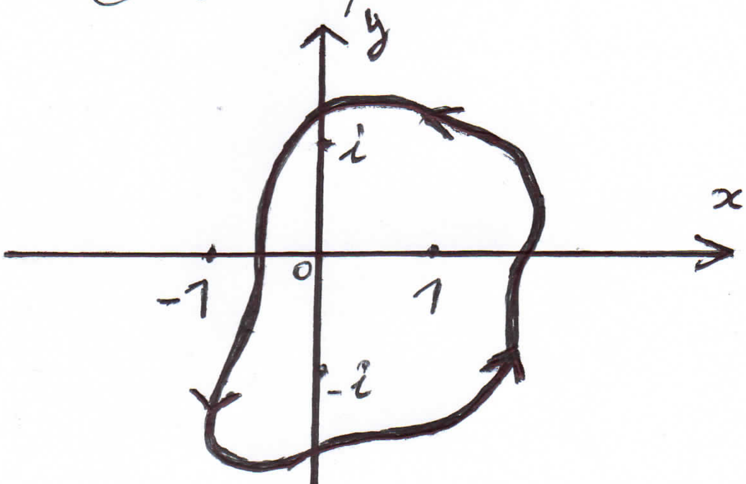
Preuve. f admet donc un pôle simple en z_0. Alors, d'après la proposition 3.3., on a :

$$\mathrm{Res}\left(\frac{p(z)}{q(z)}, z_0\right) = \lim_{z \to z_0} (z-z_0) \frac{p(z)}{q(z)}$$

$$= \lim_{z \to z_0} p(z) \lim_{z \to z_0} \frac{z-z_0}{q(z)-q(z_0)} = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$$ ■

Application du Théorème des Résidus

Soit $\mathcal{C}$ un chemin simple, fermé, orienté dans le sens direct et tel que les points $1, -i$ et i sont à l'intérieur de $\mathcal{C}$ et le point -1 est à l'extérieur de $\mathcal{C}$



Calculons l'intégrale :

$$I = \int_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z^4 - 1}$$

Soit $f(z) := \frac{1}{z^4-1}$. On a : $z^4-1 = (z-1)(z+1)(z-i)(z+i)$.
Donc, f admet des singularités isolées en $-1, 1, -i$ et i.
Trois de ces singularités isolées sont à l'intérieur de $\mathcal{C}$.
Et alors, d'après le théorème des Résidus de Cauchy, on a

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z^4-1} = 2\pi i\Big(Res(f,1) + Res(f,i) + Res(f,-i)\Big).$$

$-1, 1, i$ et $-i$ sont des pôles simples de f.
Soit z_0 l'un des pôles simples $1, i$ ou $-i$.
Comme z_0 est un pôle simple de f, on a :

$$Res(f,z_0) = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z).$$

utilisant la factorisation $z^4-1 = (z-1)(z+1)(z-i)(z+i)$, on a :

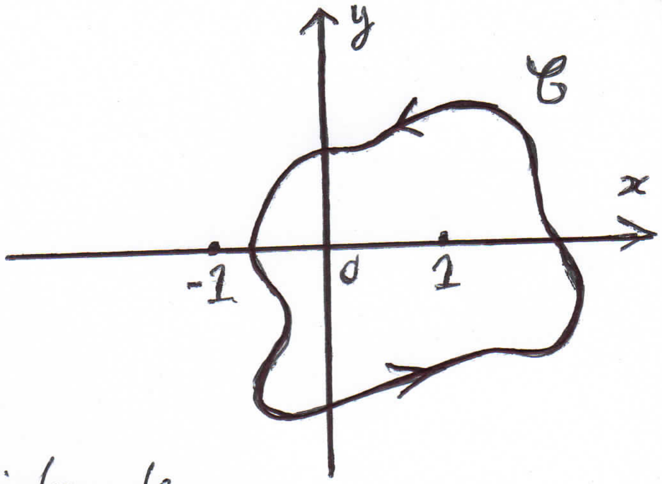
- Si $z_0 = 1$, $Res(f,1) = \lim_{z\to 1}(z-1)\frac{1}{z^4-1} = \frac{1}{4}$.
- Si $z_0 = i$, $Res(f,i) = \lim_{z\to i}(z-i)\frac{1}{z^4-1} = \frac{i}{4}$.
- Si $z_0 = -i$, $Res(f,-i) = \lim_{z\to -i}(z+i)\frac{1}{z^4-1} = \frac{-i}{4}$.

Et alors, on a : $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z^4-1} = 2\pi i\left(\frac{1}{4} + \frac{i}{4} - \frac{i}{4}\right) = \frac{\pi}{2} i.$

Résidu en une Singularité éliminable

Soit $\mathcal{C}$ un chemin simple, fermé, orienté dans le sens direct et tel que le point 1 est à l'intérieur et le point -1 est à l'extérieur de $\mathcal{C}$.
Calculons l'intégrale $I = \displaystyle\int_{\mathcal{C}} \frac{\sin(\pi z)}{z^2-1}\, dz$.

Soit $f(z) := \dfrac{\sin(\pi z)}{z^2-1}$.



f possède des singularités isolées en -1 et 1.
Comme seulement 1 qui est à l'intérieur de $\mathcal{C}$, on a d'après le théorème des Résidus de Cauchy :

$$\int_{\mathcal{C}} f(z)\,dz = 2\pi i \,\mathrm{Res}(f,1).$$

Or $\displaystyle\lim_{z\to 1}(z-1)f(z) = \lim_{z\to 1}\frac{\sin(\pi z)}{z+1} = 0$, donc la singularité en 1 est éliminable et alors la série de Laurent de f en $z_0 = 1$ ne contient pas des puissances négatives de $(z-1)$.
Donc a_{-1} le coefficient de cette série pour $(z-1)^{-1}$ est nul, et alors $\mathrm{Res}(f,1) = a_{-1} = 0$.

Donc :
$$\int_{\mathcal{C}} \frac{\sin(\pi z)}{z^2-1}\,dz = 0.$$

Remarque 3.5. On note bien que si z_0 est une singularité éliminable de f, alors $\mathrm{Res}(f,z_0) = 0$.

Théorème 3.6. Soit z_0 un pôle d'ordre $m \geq 1$ de f.
Alors, on a :
$$\mathrm{Res}(f,z_0) = \lim_{z\to z_0}\frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-z_0)^m f(z)\right].$$

Preuve. D'après la caractérisation de la série de Laurent des pôles, on a :

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m} + \frac{a_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots$$

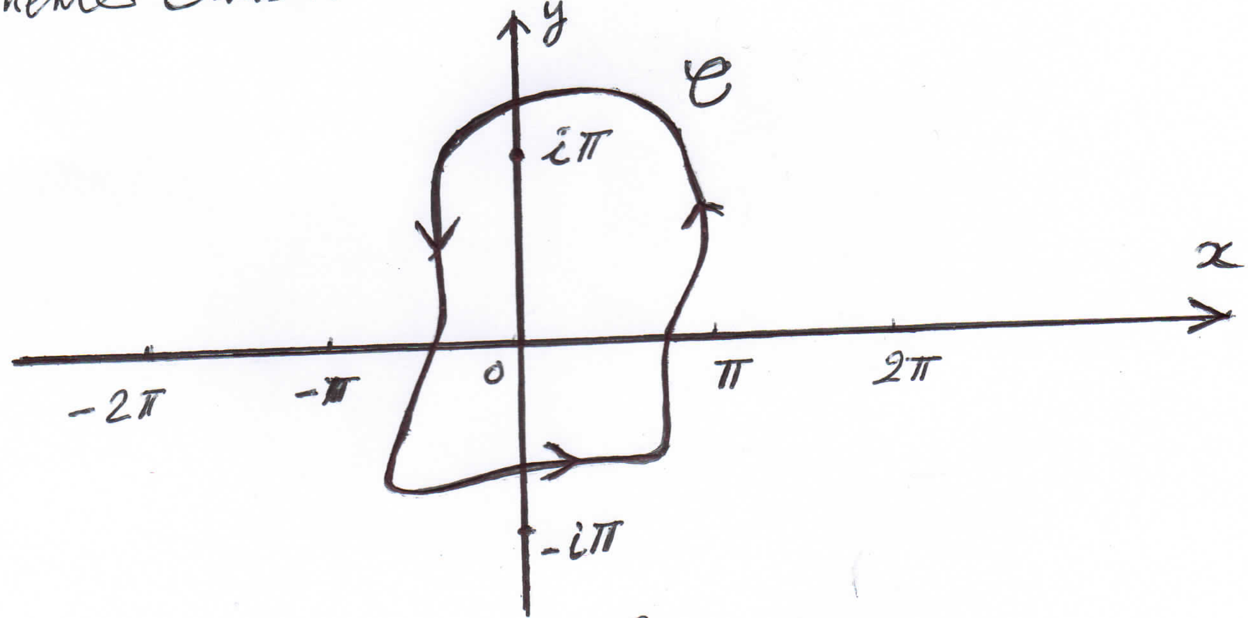
Alors, en multipliant par $(z-z_0)^m$ et en dérivant $(m-1)$ fois, on aura :

$$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-z_0)^m f(z)\right] = (m-1)!\, a_{-1} + m!\, a_0(z-z_0) + \frac{(m+1)!}{2} a_1 (z-z_0)^2 + \cdots$$

$$\Rightarrow \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-z_0)^m f(z)\right] = (m-1)!\, a_{-1}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-z_0)^m f(z)\right] \quad \blacksquare$$

Exemple 3.7. Soit $\mathcal{C}$ le chemin simple, fermé et orienté dans le sens direct suivant :



Calculons $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \frac{z^2}{(z^2+\pi^2)^2 \sin z}\, dz$.

Posons : $f(z) := \dfrac{z^2}{(z^2+\pi^2)^2 \sin z}$

• Déterminons les singularités de f à l'intérieur de $\mathcal{C}$.
f admet des singularités isolées en $i\pi$, $-i\pi$ et $k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$.
A l'intérieur de $\mathcal{C}$, on a seulement les singularités isolées $i\pi$ et 0.

• Déterminons le type des singularités isolées à l'intérieur de $\mathcal{C}$.

* en 0 : $\lim\limits_{z\to 0} f(z) = \lim\limits_{z\to 0} \dfrac{z}{\sin z}\, \dfrac{z}{(\pi^2+z^2)^2} = 0$.

Donc, $z_0 = 0$ est une singularité éliminable de f.

* en $i\pi$: $\dfrac{1}{f(z)} = \dfrac{(z+i\pi)^2(z-i\pi)^2 \sin z}{z^2}$ qui a un zéro d'ordre 2 en $i\pi$. Donc, $z_0 = i\pi$ est un pôle d'ordre 2 de f.

• Déterminons les résidus de f des singularités intérieures à $\mathcal{C}$.

$\mathrm{Res}(f,0) = 0$ (Car 0 est une singularité éliminable de f)

$$\mathrm{Res}(f,i\pi) = \lim_{z\to i\pi} \frac{d}{dz}\left[(z-i\pi)^2 f(z)\right] \quad \text{(Théorème 3.6.)}$$

$$= \lim_{z\to i\pi} \frac{d}{dz}\left(\frac{z^2}{(z+i\pi)^2 \sin z}\right)$$

$$= \lim_{z\to i\pi} \frac{2z(z+i\pi)\sin z - z^2\left[(z+i\pi)\cos z + 2\sin z\right]}{(z+i\pi)^3 \sin^2 z}$$

$$= \frac{2\,\mathrm{sh}(\pi) + \left[-\pi\,\mathrm{ch}(\pi) - \mathrm{sh}(\pi)\right]}{-4\,\mathrm{sh}^2(\pi)}$$

$$= \frac{1}{4\pi\,\mathrm{sh}(\pi)} + \frac{\mathrm{ch}(\pi)}{4\pi\,\mathrm{sh}^2(\pi)}.$$

$\left(\sin(i\pi) = i\,\mathrm{sh}(\pi) \text{ et } \cos(i\pi) = \mathrm{ch}(\pi)\right)$.

Alors, d'après le théorème des Résidus de Cauchy, on a :

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{z^2}{(z^2+\pi^2)^2 \sin z}\, dz = 2\pi i\Big(\mathrm{Res}(f,0) + \mathrm{Res}(f,i\pi)\Big)$$
$$= i\left(\frac{-1}{2\,\mathrm{sh}(\pi)} + \frac{\mathrm{ch}(\pi)}{2\,\mathrm{sh}^2(\pi)}\right).$$

Proposition 3.8. Si 0 est une singularité isolée d'une fonction f paire et holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, alors on a $\mathrm{Res}(f,0) = 0$.

Preuve. Montrons que le coefficient a_{-1} dans la série de Laurent de f en 0 est nul.

Soit $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n$ le développement en série de Laurent de f sur $B^*(0,R)$.

Comme $f(z) = f(-z)$, on a $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n a_n z^n$.

Et par unicité de la série de Laurent, on a :

$a_n = (-1)^n a_n \quad \forall n\in\mathbb{Z}$, et alors $a_n = 0$ si $|n|$ est impair. En particulier, $a_{-1} = 0$. Donc, $\mathrm{Res}(f,0) = 0$ ∎

Exemples 3.9. 1) La fonction $f(z) := e^{-\frac{1}{z^2}}\cos\left(\frac{1}{z}\right)$ est paire et possède 0 comme singularité isolée (essentielle). Et alors, $\mathrm{Res}\left(e^{-\frac{1}{z^2}}\cos\left(\frac{1}{z}\right), 0\right) = 0$.

2) Cherchons le Résidu de $z^2\sin\left(\frac{1}{z}\right)$ en 0.

Le développement en série de Laurent de $z^2\sin\left(\frac{1}{z}\right)$ en 0 est donné par :

$$z^2\sin\left(\frac{1}{z}\right) = z^2\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{3!}\frac{1}{z^3} + \frac{1}{5!}\frac{1}{z^5} + \cdots\right)$$
$$= z - \frac{1}{3!}\frac{1}{z} + \frac{1}{5!}\frac{1}{z^3} + \cdots$$

Et alors on a : $\operatorname{Res}\left(z^2\sin\left(\frac{1}{z}\right), 0\right) = \frac{-1}{6}$.

3) Cherchons le résidu de $\dfrac{e^{\frac{1}{z}}}{z^2+1}$ en 0.

$f(z) := \dfrac{e^{\frac{1}{z}}}{z^2+1}$ a une singularité essentielle en 0.

Pour tout $z \in B^*(0,1)$, on a :

$$\frac{e^{\frac{1}{z}}}{z^2+1} = \frac{1}{z^2+1}e^{\frac{1}{z}} = \left(1 - z^2 + z^4 + \cdots\right)\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!}\frac{1}{z^2} + \cdots\right)$$

D'après les propriétés des séries de Taylor et de Laurent, les deux séries sont absolument convergentes sur $B^*(0,1)$. Et alors, on peut les multiplier terme à terme, et on trouve que le coefficient de $\frac{1}{z}$ est :

$$a_{-1} = 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} + \cdots = \sin(1).$$

Donc, $\operatorname{Res}\left(\dfrac{e^{\frac{1}{z}}}{z^2+1}, 0\right) = \sin(1)$.

§4. Lemmes de Jordan

Théorème 4.1. (Lemme de Jordan)

Pour tout $R > 0$, on a :

$$\int_0^{\pi} e^{-R\sin\theta}\, d\theta \leq \frac{\pi}{R}.$$

Preuve. $\int_0^{\pi} e^{-R\sin\theta}\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin\theta}\,d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{-R\sin\theta}\,d\theta.$

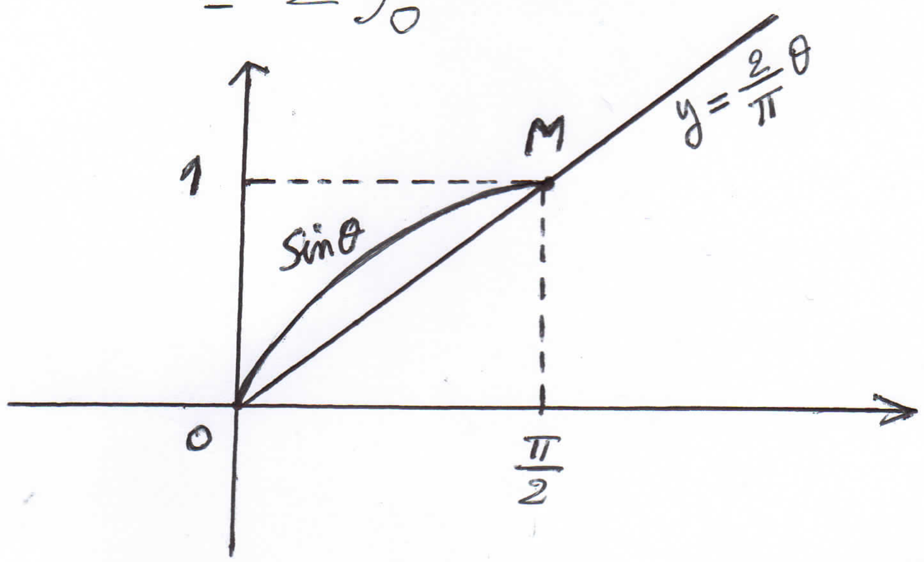
Faisons le changement de variable $t := \pi - \theta$ dans la seconde intégrale, on a :

$\sin\theta = \sin(\pi-\theta) = \sin t$ et $d\theta = -dt.$

Et alors, on a :

$$\int_0^{\pi} e^{-R\sin\theta}\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin\theta}\,d\theta - \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} e^{-R\sin t}\,dt$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin\theta}\,d\theta$$



Comme $\sin'' = -\sin$ est negative sur $]0, \frac{\pi}{2}[$, la fonction $\sin$ est concave sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, et par suite la courbe de $\sin$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ est au dessus de la corde joignant l'origine O au point $M = (\frac{\pi}{2}, 1)$.

Donc, $\sin\theta \geq \frac{2}{\pi}\theta \quad \forall\, \theta \in [0, \frac{\pi}{2}].$

Et alors, on a :

$$\int_0^{\pi} e^{-R\sin\theta}\,d\theta \leq 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2}{\pi}R\theta}\,d\theta.$$

Faisons le changement de variable $t := \frac{2}{\pi} R \theta$, on aura:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2}{\pi} R\theta} d\theta = \int_0^R e^{-t} \frac{\pi}{2R} dt = \frac{\pi}{2R}\left[-e^{-t}\right]_0^R$$
$$= \frac{\pi}{2R}\left(1 - e^{-R}\right).$$

Donc, $\int_0^{\pi} e^{-R\sin\theta} d\theta \leq 2\frac{\pi}{2R}\left(1-e^{-R}\right) \leq \frac{\pi}{R}$ ∎

Théorème 4.2. (Lemme de Jordan - Version Générale)

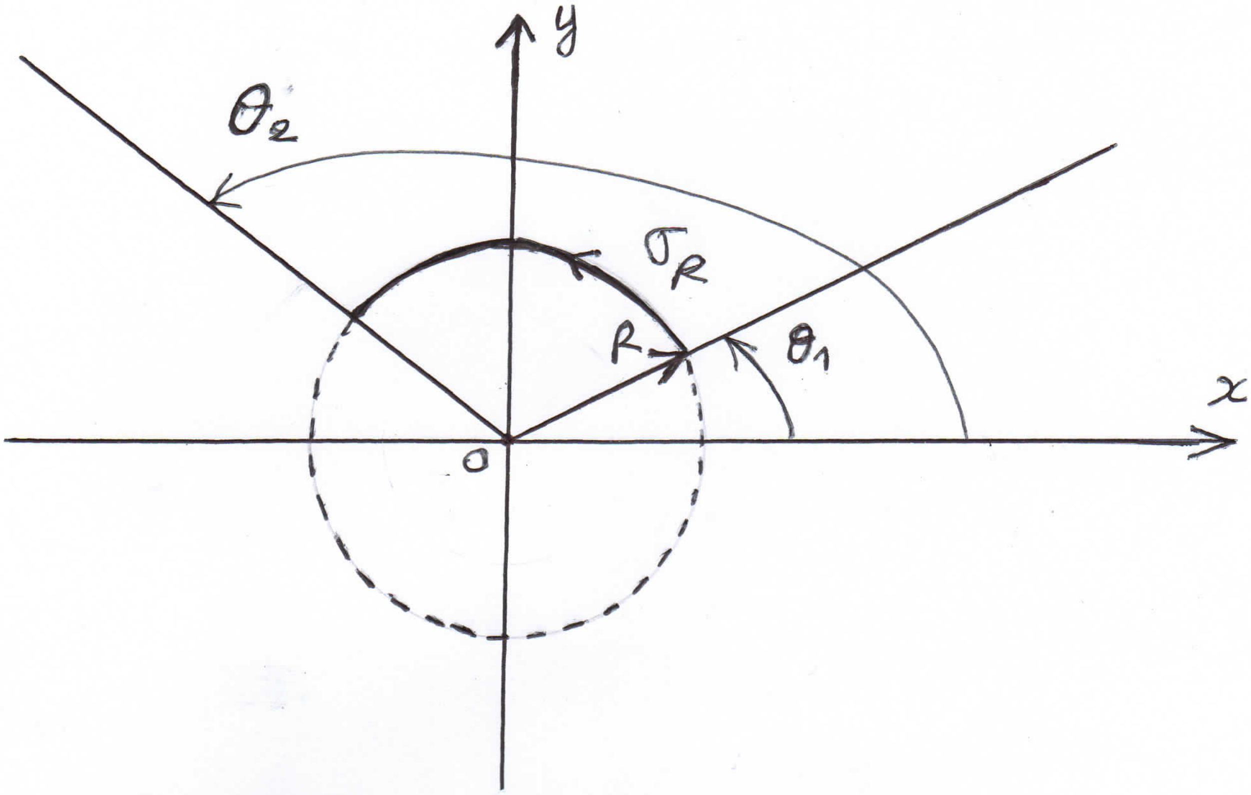
Soient $R_0 > 0$ et $\theta_1 < \theta_2 \in [0, \pi]$. Pour tout $R \geq R_0$ soit σ_R l'arc circulaire des nombres complexes $z = Re^{i\theta}$ avec $0 \leq \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \leq \pi$, orienté dans le sens direct.

Soit f une fonction complexe définie et continue sur tout arc σ_R, et soit $M(R) := \sup_{z \in \sigma_R} |f(z)|$.

Si $\lim_{R \to +\infty} M(R) = 0$, alors pour tout $a > 0$ on a:

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{\sigma_R} e^{iaz} f(z) = 0.$$

Preuve. Soit $a > 0$. On a: $|e^{iaz}| = e^{-aR\sin\theta}$ $\forall z = Re^{i\theta} \in \sigma_R$.



Comme $e^{-aR\sin\theta} > 0$, on a :

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} e^{-aR\sin\theta}\, d\theta \leq \int_0^{\pi} e^{-aR\sin\theta}\, d\theta .$$

Faisons une paramétrisation de σ_R par l'application :

$$\varphi_R : [\theta_1, \theta_2] \longrightarrow \sigma_R$$
$$\theta \longmapsto \varphi_R(\theta) := R e^{i\theta}.$$

$\varphi_R'(\theta) = R i e^{i\theta}$ et $|\varphi_R'(\theta)|\, d\theta = R\, d\theta$.

Et alors, on a :

$$\left| \int_{\sigma_R} e^{iaz} f(z)\, dz \right| \leq \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left| e^{iaz} f(z) \right| R\, d\theta .$$
$$\leq R M(R) \int_{\theta_1}^{\theta_2} e^{-aR\sin\theta}\, d\theta .$$
$$\leq R M(R) \int_0^{\pi} e^{-aR\sin\varphi}\, d\theta .$$

Or, d'après le lemme de Jordan (Théorème 4.1), on a

$$\int_0^{\pi} e^{-aR\sin\theta}\, d\theta \leq \frac{\pi}{aR}$$

Donc, $\displaystyle \left| \int_{\sigma_R} e^{iaz} f(z)\, dz \right| \leq \frac{\pi M(R)}{R} \xrightarrow[R \to +\infty]{} 0.$

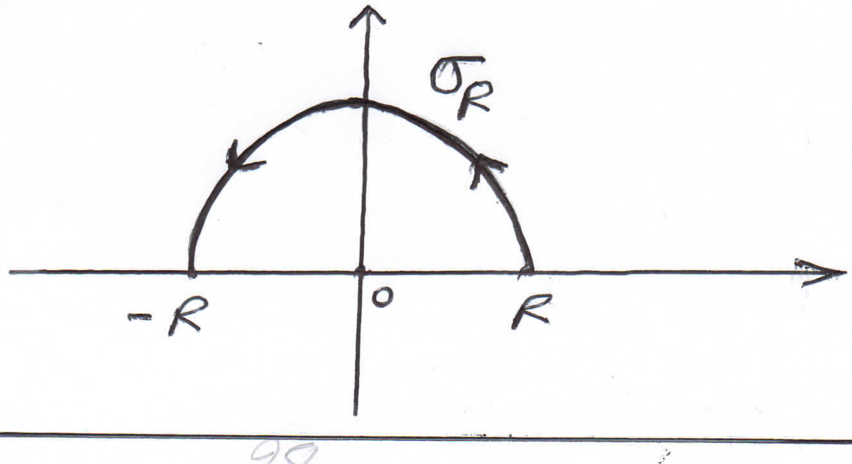
Et alors, $\displaystyle \lim_{R \to +\infty} \int_{\sigma_R} e^{iaz} f(z)\, dz = 0$ $\blacksquare$

<u>**Remarque 4.3.**</u> On a un analogue du lemme de Jordan-Version générale pour $a < 0$ en considérant σ_R dans le demi-plan complexe inférieur.

<u>**Corollaire 4.4.**</u> Soient p, q deux polynômes complexes tels que $\deg(q) \geq 1 + \deg(p)$ et σ_R le demi-cercle supérieur des nombres complexes $z = Re^{i\theta}$ $(0 \leq \theta \leq \pi)$. Alors, on a :

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{\sigma_R} e^{iaz} \frac{p(z)}{q(z)}\, dz = 0 \quad \forall a > 0$$

<u>Preuve.</u>



Soit $M(R) := \sup_{z \in \sigma_R} \left| \frac{p(z)}{q(z)} \right|$.

Comme $\deg(q) \geq 1 + \deg(p)$, $\lim_{R \to +\infty} M(R) = 0$.

Et alors, d'après le lemme de Jordan-Version générale,

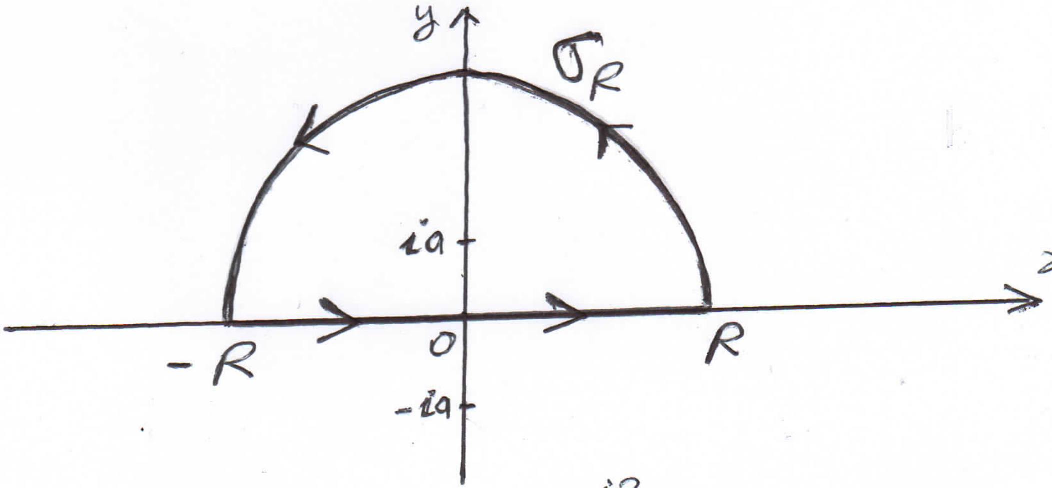
On a : $\lim_{R \to +\infty} \int_{\sigma_R} e^{iaz} \frac{p(z)}{q(z)} dz = 0 \quad \forall a > 0$ ∎

Exemple 4.5. Soit $a > 0$, calculons l'intégrale suivante :

$$I_a = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + a^2} dx.$$

Soit $R > a$, et considérons le chemin simple et fermé

$\gamma_R := \sigma_R \cup [-R, R]$ orienté dans le sens direct.



Posons : $f(z) := \frac{z e^{iz}}{z^2 + a^2}$. On a :

$$I_R := \int_{\gamma_R} f(z) dz = \int_{\sigma_R} f(z) dz + \int_{-R}^{R} \frac{x e^{ix}}{x^2 + a^2} dx$$

$$= I_R^1 + I_R^2 \quad (*)$$

La fonction f admet un seul pôle simple $z_0 := ia$ à l'intérieur de γ_R. Et alors, d'après le théorème des Résidus de Cauchy, on a :

$$I_R = \int_{\gamma_R} f(z)\, dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, z_0)$$

$$= 2\pi i \frac{z e^{iz} \big|_{z=z_0}}{\frac{d}{dz}(z^2+a^2) \big|_{z=z_0}}$$

$$= 2\pi i \frac{ia e^{-a}}{2(ia)} = \frac{\pi}{e^a} i.$$

D'autre part, d'après le Corollaire 4.4.1 on a :

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\sigma_R} \frac{z}{z^2+a^2} e^{iz} = 0 \Rightarrow \lim_{R\to+\infty} I'_R = 0$$

Et alors, en faisant tendre R vers $+\infty$ dans $(*)$, on aura

$$\frac{\pi}{e^a} i = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x e^{ix}}{x^2+a^2}\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos x}{x^2+a^2}\, dx + i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2+a^2}\, dx$$

Donc, $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2+a^2}\, dx = \pi e^{-a}.$$

§5. Calcul d'Intégrales par Méthode des Résidus

a) Intégrales Définies des Fractions Trigonométriques.

On considère les intégrales de type :

$$\int_0^{2\pi} F(\cos\theta, \sin\theta)\, d\theta \qquad (1)$$

où $F(\cos\theta, \sin\theta)$ est une fraction rationnelle réelle en cos et sin, et telle que le dénominateur ne s'annule pas sur $[0, 2\pi]$.

Alors, le but est de transformer l'intégrale (1) en une intégrale complexe sur un chemin qu'on peut calculer en utilisant le théorème des Résidus de Cauchy.

Pour cela, on rappelle les identités suivantes :

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right) \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{1}{2i}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right).$$

Comme θ varie de 0 à 2π, le nombre complexe $z = e^{i\theta}$ décrit le cercle unité $C(0,1)$ dans le sens direct.

Notons que $\frac{1}{z} = \frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$. Et alors, on a :

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)$$

De même, on a : $dz = ie^{i\theta}d\theta \iff d\theta = -i\frac{dz}{z}$.

Maintenant, donnons quelques exemples.

i) Calculons l'intégrale : $I_1 = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{10 + 8\cos\theta}$.

Soit $z := e^{i\theta}$. Quand θ varie de 0 à 2π, z parcourt le cercle $\mathcal{C}(0,1)$ dans le sens direct. Alors, on a :

$$I_1 = \int_{\mathcal{C}(0,1)} \frac{-i\,\frac{dz}{z}}{10 + \frac{8}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)} = -i \int_{\mathcal{C}(0,1)} \frac{dz}{4z^2 + 10z + 4}.$$

$$4z^2 + 10z + 4 = 4(z+2)\left(z + \frac{1}{2}\right).$$

Donc, la seule singularité isolée dans $B(0,1)$ est $z_0 = -\frac{1}{2}$, qui est en fait un pôle simple, et alors on a :

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{4z^2+10z+4}, -\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\frac{d}{dz}\left(4z^2+10z+4\right)\Big/_{z=-\frac{1}{2}}} = \frac{1}{6}.$$

Et d'après le théorème des Résidus de Cauchy, on a :

$$\int_{\mathcal{C}(0,1)} \frac{dz}{4z^2+10z+4} = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{1}{4z^2+10z+4}, -\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi i}{3}$$

Donc, $$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{10 + 8\cos\theta} = \frac{\pi}{3}.$$

ii) Calculons l'intégrale. $I_2 = \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta}{2 + \cos\theta}\, d\theta.$

Posons $z := e^{i\theta}$. Quand θ varie de 0 à 2π, z décrit le cercle $\mathcal{C}(0,1)$ dans le sens direct.

$$z^2 = e^{2i\theta} = \cos 2\theta + i \sin 2\theta.$$

$$\frac{1}{z^2} = e^{-2i\theta} = \cos 2\theta - i \sin 2\theta.$$

Donc, $\cos 2\theta = \frac{1}{2}\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right)$ et $\sin 2\theta = \frac{1}{2i}\left(z^2 - \frac{1}{z^2}\right)$.

Et de même, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\cos(n\theta) = \frac{1}{2}\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right) \text{ et } \sin(n\theta) = \frac{1}{2i}\left(z^n - \frac{1}{z^n}\right).$$

Alors, on a :

$$I_2 = \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta}{2+\cos\theta}\,d\theta = -i\int_{C(0,1)} \frac{\frac{1}{2}\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)}{2+\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)}\,\frac{dz}{z}.$$

$$= -i\int_{C(0,1)} \frac{z^4+1}{z^2(z^2+4z+1)}\,dz.$$

$z^2+4z+1 = 0 \iff z = -2-\sqrt{3}$ ou $z = -2+\sqrt{3}$.

Donc, les singularités isolées qui sont à l'intérieur de $C(0,1)$ sont : 0 et $-2+\sqrt{3}$.

Et alors, d'après le théorème des Résidus de Cauchy, on a :

$$\int_{C(0,1)} \frac{z^4+1}{z^2(z^2+4z+1)}\,dz = 2\pi i\left[\operatorname{Res}(g(z),0) + \operatorname{Res}(g(z),-2+\sqrt{3})\right]$$

où $g(z) := \dfrac{z^4+1}{z^2(z^2+4z+1)}$.

. Comme 0 est un pôle d'ordre 2 de g, on a :

$$\operatorname{Res}(g(z),0) = \lim_{z\to 0} \frac{d}{dz}(g(z))$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{4z^3(z^2+4z+1)-(z^4+1)(2z+4)}{(z^2+4z+1)^2} = -4$$

• Comme $-2+\sqrt{3}$ est un pôle simple de g, on a :

$$\operatorname{Res}\left(g(z), -2+\sqrt{3}\right) = \frac{(-2+\sqrt{3})^4+1}{(-2+\sqrt{3})^2} \frac{1}{\frac{d}{dz}(z^2+4z+1)\Big|_{z=-2+\sqrt{3}}}$$

$$= \frac{(-2+\sqrt{3})^4+1}{(-2+\sqrt{3})^2} \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{7}{\sqrt{3}}.$$

Donc, $$\int_{C(0,1)} \frac{z^4+1}{z^2(z^2+4z+1)} dz = 2\pi i\left(-4+\frac{7}{\sqrt{3}}\right)$$

Et alors, on a :

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta}{2+\cos\theta} d\theta = 2\pi\left(-4+\frac{7}{\sqrt{3}}\right).$$

b) Intégrales Généralisées des Fonctions Rationnelles

On va donner des techniques qui servent à calculer des intégrales généralisées des fonctions rationnelles.

Définition 5.1. On définit **la valeur principale** de l'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ par :

$$V_p \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\,dx.$$

Remarque 5.2. $V_p \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ peut exister sans que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ existe. Par exemple, $V_p \int_{-\infty}^{+\infty} x\,dx$ existe et vaut 0, par contre $\int_{-\infty}^{+\infty} x\,dx$ n'existe pas.

Cependant, si $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ converge, alors $V_p\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ existe et $V_p\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$.

Et alors, on peut calculer les intégrales généralisées $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ qui convergent en calculant simplement $V_p\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$.

i) Calculons l'intégrale généralisée : $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+1}\,dx$.

. Montrons d'abord que l'intégrale est convergente. Il suffit de montrer que l'intégrale est convergente à l'extérieur d'un intervalle borné, par exemple $[-1,1]$.

$\forall |x| \geq 1$, on a $\frac{x^2}{x^4+1} \leq \frac{1}{x^2}$, et alors $\int_{1}^{+\infty} \frac{x^2}{x^2+1}\,dx$ converge. Et de même pour l'intégrale $\int_{-\infty}^{-1} \frac{x^2}{x^2+1}\,dx$.

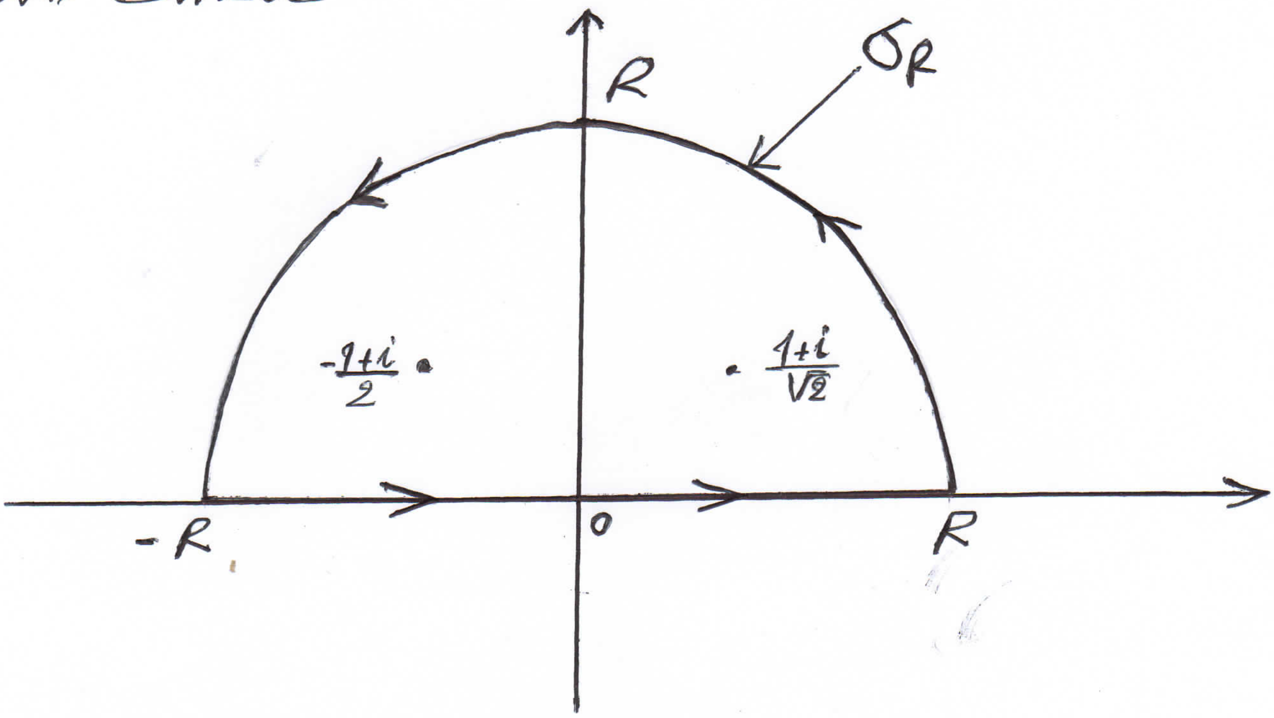
Donc, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+1}\,dx$ converge.

Et alors, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+1}\,dx = V_p\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+1}\,dx$.

$$= \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} \frac{x^2}{x^4+1}\,dx.$$

. Posons : $f(z) := \frac{z^2}{z^4+1}$.

Pour tout $R>0$, considérons γ_R le chemin simple fermé constitué par $[-R,R]$ et σ_R le demi-cercle supérieur de centre 0 et de rayon R, orienté dans le sens direct.



Alors, on a :

$$I_R := \int_{\gamma_R} f(z)\,dz = \int_{[-R,R]} f(z)\,dz + \int_{\sigma_R} f(z)\,dz := J_R + K_R .$$

Sur $[-R,R]$, on a $f(z) = f(x) = \dfrac{x^2}{x^4+1}$, et alors on a :

$$J_R = \int_{-R}^{R} \frac{x^2}{x^4+1}\,dx .$$

$$\lim_{R\to+\infty} I_R = \lim_{R\to+\infty} J_R + \lim_{R\to+\infty} K_R .$$

. Calculons I_R par le théorème des Résidus de Cauchy.

Soit $R>1$. $z^4+1=0 \iff z^4=-1 \iff z^4=e^{i\pi}$.

Donc, cette équation admet 4 racines :

$z_1 := \frac{1+i}{\sqrt{2}}$, $z_2 := \frac{-1+i}{\sqrt{2}}$, $z_3 := \frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ et $z_4 := \frac{1-i}{\sqrt{2}}$.

Donc, $f(z)$ admet 4 pôles simples dont deux seulement sont à l'intérieur de γ_R, qui sont z_1 et z_2 :

Et alors, d'après le théorème des Résidus de Cauchy,

$$\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i\left(\operatorname{Res}(f, z_1) + \operatorname{Res}(f, z_2)\right)$$

$$\operatorname{Res}(f, z_1) = \left.\frac{z^2}{\frac{d}{dz}(z^4+1)}\right|_{z=z_1} = \left.\frac{z^2}{4z^3}\right|_{z=z_1} = \frac{1-i}{4\sqrt{2}}.$$

$$\operatorname{Res}(f, z_2) = \left.\frac{z^2}{\frac{d}{dz}(z^4+1)}\right|_{z=z_2} = \left.\frac{z^2}{4z^3}\right|_{z=z_2} = \frac{-1-i}{4\sqrt{2}}.$$

Donc, $$I_R = \int_{\gamma_R} \frac{z^2}{z^4+1}\,dz = 2\pi i\left(\frac{1-i}{4\sqrt{2}} + \frac{-1-i}{4\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

- Montrons que : $\lim\limits_{R\to+\infty} K_R = 0$.

$\forall z \in \sigma_R$, on a $|z| = R$, et alors :

$$\left|\frac{z^2}{z^4+1}\right| \leq \frac{R^2}{R^4-1}.$$ Et on a :

$$|K_R| = \left|\int_{\sigma_R} \frac{z^2}{z^4+1}\,dz\right| \leq L(\sigma_R) \sup_{z\in\sigma_R} \left|\frac{z^2}{z^4+1}\right|$$

$$\leq \pi R \frac{R^2}{R^4-1} \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0.$$

Donc, $\lim_{R \to +\infty} K_R = 0$.

Et alors, $I = \lim_{R \to +\infty} I_R$.

Donc, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+1}\, dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

__Proposition 5.3.__ Soient p et q deux polynômes de la variable réelle tels que $\deg(q) \geq \deg(p) + 2$ et q ne possède aucune racine réelle. Et soit l'arc $\sigma_R := \{Re^{i\theta} / 0 \leq \theta \leq \pi\}$. Alors, on a :

$$\lim_{R \to +\infty} \left| \int_{\sigma_R} \frac{p(z)}{q(z)}\, dz \right| = 0.$$

En plus, si $z_1, \dots, z_N$ sont tous les pôles de $\frac{p}{q}$ dans le demi-plan supérieur, alors on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p(x)}{q(x)}\, dx = 2\pi i \sum_{j=1}^{N} Res\left(\frac{p}{q}, z_j\right).$$

__Preuve.__ Posons :

$$p(x) := a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$$
$$q(x) := b_m x^m + \dots + b_1 x + b_0$$

avec $a_n \neq 0$, $b_m \neq 0$ et $m \geq n+2$.

Soit $z := Re^{i\theta}$. Pour R suffisamment grand, on a :

$$\left| \int_{\sigma_R} \frac{p(z)}{q(z)}\, dz \right| \leq \frac{|a_n|R^n + \dots\dots + |a_1|R + |a_0|}{|b_m|R^m - \dots\dots - |b_1|R - |b_0|}\, \pi R \xrightarrow[R \to +\infty]{} 0.$$

Donc, $\displaystyle\lim_{R \to +\infty} \int_{\sigma_R} \frac{p(z)}{q(z)}\, dz = 0$.

Tous les pôles de $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ sont à l'intérieur du chemin fermé $\sigma_R \cup [-R, R]$ pour R assez grand. Et alors, d'après le théorème des Résidus de Cauchy, on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p(x)}{q(x)}\, dx = 2\pi i \sum_{j=1}^{N} \mathrm{Res}\left(\frac{p}{q}, z_j\right) \blacksquare$$

ii) Calculons l'intégrale généralisée :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)}\, dx.$$

$\dfrac{1}{(x^2+1)(x^2+4)}$ vérifie les conditions de la proposition 5.3., et ses pôles sont : $z_1 = i$, $z_2 = 2i$, $z_3 = -i$ et $z_4 = -2i$.

Et alors, d'après la proposition 5.3., on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)} = 2\pi i \left[\operatorname{Res}\left(\frac{1}{(z^2+1)(z^2+4)}, i\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{1}{(z^2+1)(z^2+4)}, 2i\right) \right]$$

Et comme i et $2i$ sont des pôles simples, on a :

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{(z^2+1)(z^4+1)}, i\right) = \lim_{z \to i} (z-i) \frac{1}{(z^2+1)(z^2+4)} = \frac{-i}{6}$$

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{(z^2+1)(z^2+4)}, 2i\right) = \lim_{z \to 2i} (z-2i) \frac{1}{(z^2+1)(z^2+4)} = \frac{i}{12}$$

Et alors, on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{\pi}{6}.$$

c) Intégrales Généralisées des Fonctions en Exponentielles

On considère les intégrales généralisées de la forme :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{e^{bx}+c}\, dx \quad \text{avec } 0<a<b \text{ et } c>0.$$

Comme $c>0$ et $e^{bx}>0$, $e^{bx}+c \neq 0$.

D'autre part, comme $a<b$ l'intégrale généralisée est convergente en $+\infty$. Et comme $\frac{e^{ax}}{e^{bx}+c}$ est bornée par $\frac{e^{ax}}{c}$ l'intégrale généralisée est convergente en $-\infty$.

i) Soit $\alpha>1$. Calculons l'intégrale généralisée :

$$I_\alpha := \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{x}}{e^{\alpha x}+1}\, dx.$$

• Posons $f(z) := \dfrac{e^z}{e^{\alpha z}+1}$. Les pôles de f sont les racines de l'équation $e^{\alpha z}+1=0$.

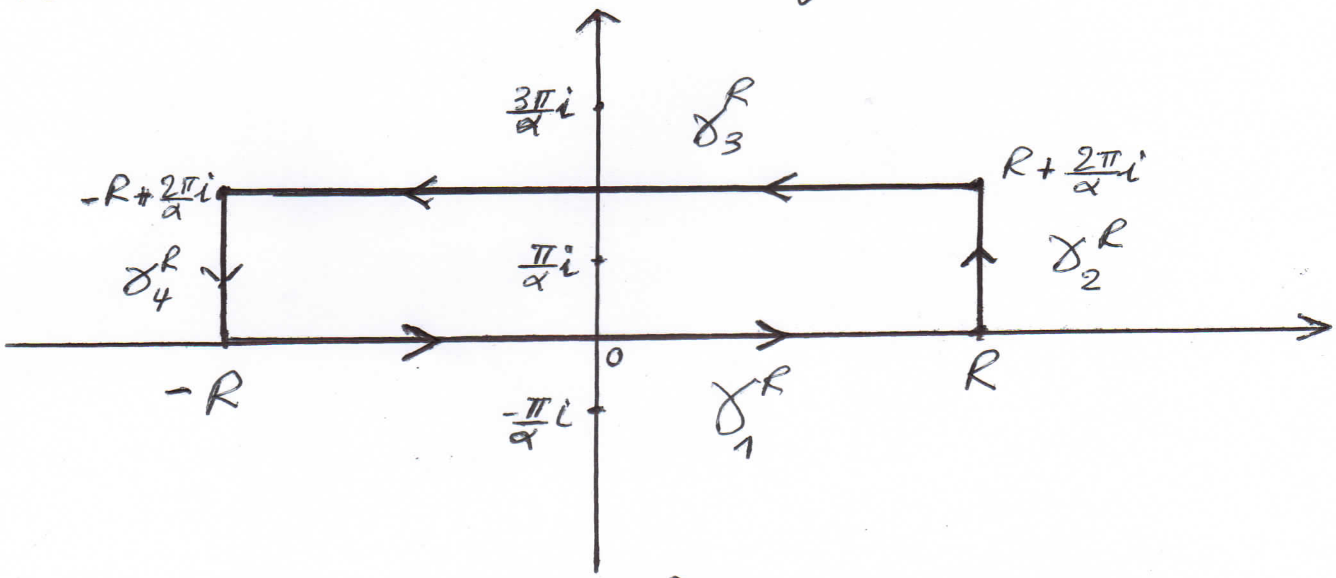
Comme la fonction exponentielle est $2\pi i$-périodique, on a : $e^{\alpha z}=-1=e^{i\pi} \Longleftrightarrow \alpha z = i\pi + 2k\pi i \ (k\in\mathbb{Z})$

$$\Longleftrightarrow z_k = (2k+1)\frac{\pi}{\alpha} i \quad (k\in\mathbb{Z}).$$

Donc, f admet une infinité de pôles z_k $(k\in\mathbb{Z})$.

Tous ces pôles sont sur l'axe des imaginaires.

• Soit $R>1$, et choisissons le chemin fermé suivant :



$\gamma_R := \gamma_1^R \vee R_2^R \vee \gamma_3^R \vee \gamma_4^R$. Et alors, on a :

$$\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1^R} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2^R} f(z)\,dz + \int_{\gamma_3^R} f(z)\,dz + \int_{\gamma_4^R} f(z)\,dz$$

$$= I_1^R + I_2^R + I_3^R + I_4^R \quad (*).$$

• Sur γ_1^R, on a $z=x$ et $dz=dx$; donc :

$I_1^R := \int_{\gamma_1^R} f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} f(x)\,dx \Longrightarrow I_\alpha = \lim\limits_{R\to+\infty} I_1^R.$

• Sur γ_3^R, on a $z = x + i\frac{2\pi}{\alpha}$ et $dz = dx$ (avec : x varie de R à $-R$).

Et comme e^z est $2\pi i$-périodique, on a :

$$I_3^R := \int_{\gamma_3^R} f(z)\,dz = \int_R^{-R} \frac{e^{x+\frac{2\pi}{\alpha}i}}{e^{\alpha(x+\frac{2\pi}{\alpha}i)}+1}\,dx$$

$$= -e^{\frac{2\pi}{\alpha}i}\int_{-R}^{R}\frac{e^x}{e^{\alpha x}+1}\,dx$$

$$= -e^{\frac{2\pi}{\alpha}i}\, I_1^R.$$

• Sur γ_2^R, on a $z = R + yi$ (avec $0 \leq y \leq \frac{2\pi}{\alpha}$).

Donc, $|e^{\alpha z}| = |e^{\alpha R}e^{i\alpha y}| = e^{\alpha R}$

$|e^{\alpha z}+1| \geq |e^{\alpha z}| - 1 = e^{\alpha R} - 1$.

Et alors, $\frac{1}{|e^{\alpha z}+1|} \leq \frac{1}{e^{\alpha R}-1}$.

Donc, pour tout $z \in \gamma_2^R$, on a :

$$|f(z)| = \left|\frac{e^z}{e^{\alpha z}+1}\right| \leq \frac{|e^{R+iy}|}{e^{\alpha R}-1} = \frac{1}{e^{(\alpha-1)R} - e^{-R}}$$

$$\Rightarrow |I_2^R| = \left|\int_{\gamma_2^R}\frac{e^z}{e^{\alpha z}+1}\,dz\right| \leq L(\gamma_2^R)\sup_{z\in\gamma_2^R}\left|\frac{e^z}{e^{\alpha z}+1}\right|$$

$$\Rightarrow |I_2^R| \leq \frac{2\pi}{\alpha}\,\frac{1}{e^{(\alpha-1)R}-e^{-R}} \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0$$

Donc, $\lim\limits_{R\to+\infty} I_2^R = 0$.

• De la même façon, on montre que :

$$\lim_{R \to +\infty} I_4^R = 0.$$

• Le seul pôle de f à l'intérieur du chemin γ_R est $z_0 := \frac{\pi}{\alpha} i$. Et alors, d'après le théorème des Résidus de Cauchy, on a :

$$\int_{\gamma_R} f(z)\, dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, z_0).$$

Comme z_0 est un pôle simple de f, on a :

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{e^{z}/_{z=z_0}}{\frac{d}{dz}\left(e^{\alpha z}+1\right)/_{z=z_0}} = \frac{e^{\frac{\pi}{\alpha} i}}{\alpha e^{\alpha \frac{\pi}{\alpha} i}} = -\frac{e^{\frac{\pi}{\alpha} i}}{\alpha}.$$

Donc, $\displaystyle\int_{\gamma_R} f(z)\, dz = -2\pi i \frac{e^{\frac{\pi}{\alpha} i}}{\alpha}.$

En faisant tendre R vers $+\infty$ dans $(*)$, on aura :

$$-2\pi i \frac{e^{\frac{\pi}{\alpha} i}}{\alpha} = I_\alpha - e^{\frac{2\pi}{\alpha} i} I_\alpha$$

$$\Rightarrow I_\alpha \left(1 - e^{\frac{2\pi}{\alpha} i}\right) = -2\pi i \frac{e^{\frac{\pi}{\alpha} i}}{\alpha}$$

$$\Rightarrow I_\alpha = \frac{2\pi i}{\alpha\left(e^{\frac{\pi}{\alpha} i} - e^{-\frac{\pi}{\alpha} i}\right)} = \frac{\pi}{\alpha \sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)}$$

Donc, $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{x}}{e^{\alpha x}+1}\, dx = \frac{\pi}{\alpha \sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)}.$$

ii) Calculons l'intégrale généralisée suivante :

$$J_\alpha := \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha+1} \qquad (\alpha > 1)$$

. Montrons d'abord que l'intégrale est convergente. Il suffit de montrer que l'intégrale converge sur $[1,+\infty[$. Pour tout $x \in [1,+\infty[$, on a $\frac{1}{x^\alpha+1} \leq \frac{1}{x^\alpha}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ converge, donc $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha+1}\,dx$ converge.

. Posons $x := e^t$; $dx = e^t dt$. Et on a :

$$J_\alpha = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha+1} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^t}{e^{\alpha t}+1}\,dt \Rightarrow J_\alpha = I_\alpha$$

Donc,
$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha+1} = \frac{\pi}{\alpha \sin(\frac{\pi}{\alpha})} \quad \forall \alpha > 1.$$

d) Intégrales Généralisées des Fonctions en Logarithme

Calculons l'intégrale généralisée suivante :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\log(x)}{x^4+1}\,dx$$

. Montrons d'abord que l'intégrale converge.

$*$ en 0, $\frac{\log(x)}{x^4+1} \sim \log(x)$ donc, on a convergence en 0.

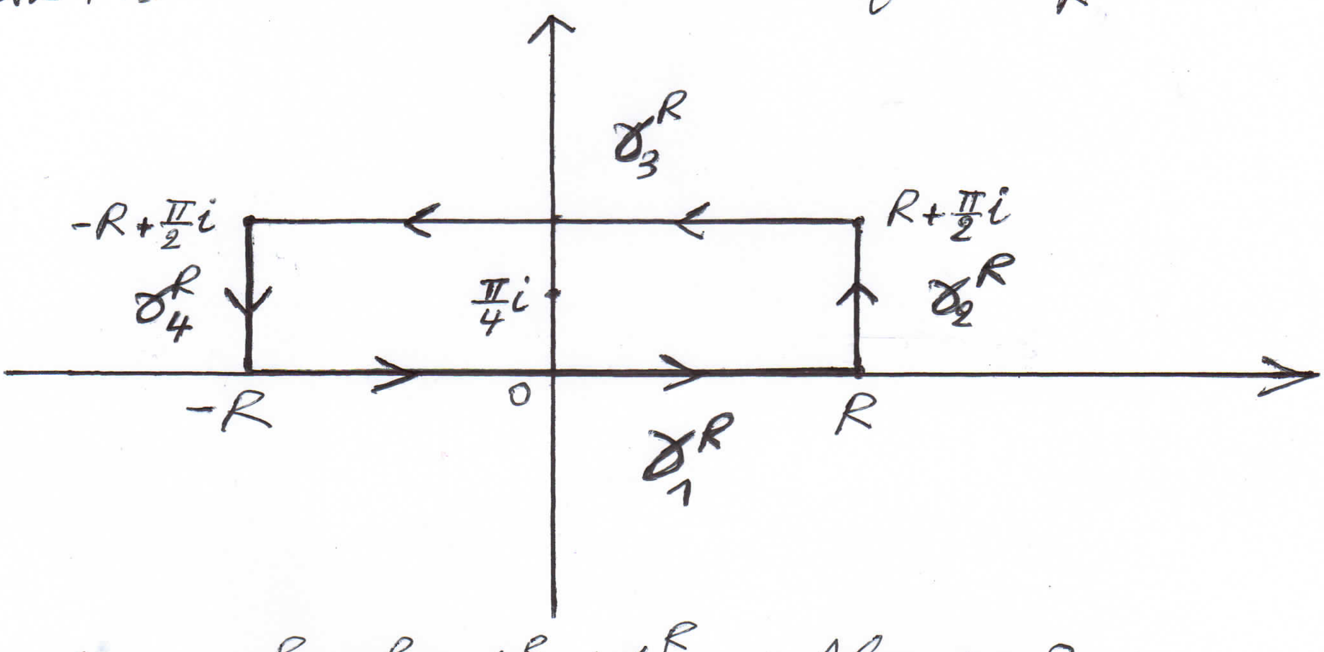
* en $+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\operatorname{Log}(x)}{x^4+1} = 0$, et alors on a convergence en $+\infty$.

- Faisons le changement de variable $x = e^t$. Alors, on a: $t = \operatorname{Log} x$ et $dx = e^t dt$. Donc:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{e^{4t}+1} e^t dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{te^t}{e^{4t}+1} dt.$$

Posons alors: $f(z) := \dfrac{ze^z}{e^{4z}+1}$,

Soit $R>0$ et choisissons le chemin fermé γ_R suivant:



$\gamma_R := \gamma_1^R \vee \gamma_2^R \vee \gamma_3^R \vee \gamma_4^R$. Alors, on a:

$$I_R := \int_{\gamma_R} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1^R} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2^R} f(z)\,dz + \int_{\gamma_3^R} f(z)\,dz + \int_{\gamma_4^R} f(z)\,dz$$

$$= I_1^R + I_2^R + I_3^R + I_4^R \quad (*)$$

- Sur γ_1^R, $z = x$ et $dz = dx$, et alors on a:

$$I_1^R := \int_{\gamma_1^R} f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} \frac{xe^x}{e^{4x}+1} dx$$

• Sur γ_3^R, $z = x + \frac{\pi}{2}i$ et $dz = dx$, et alors on a :

$$I_3^R := \int_{\gamma_3^R} f(z)\,dz = \int_R^{-R} \frac{(x+\frac{\pi}{2}i)e^x e^{i\frac{\pi}{2}}}{e^{4x}+1}\,dx$$ (avec : x varie de R à $-R$)

$$= -i\int_{-R}^{R} \frac{xe^x}{e^{4x}+1}\,dx + \frac{\pi}{2}\int_{-R}^{R} \frac{e^x}{e^{4x}+1}\,dx$$

$$= -i\, I_1^R + \frac{\pi}{2}\int_{-R}^{R} \frac{e^x}{e^{4x}+1}\,dx$$

• Sur γ_2^R, $z = R + yi$ $(0 \leq y \leq \frac{\pi}{2})$.

$|z| \leq R + y \leq R + \frac{\pi}{2}$. Et alors, on a :

$$|f(z)| = \left|\frac{ze^z}{e^{4z}+1}\right| = |z|\left|\frac{e^z}{e^{4z}+1}\right|$$

$$\leq \left(R+\frac{\pi}{2}\right)\frac{e^R}{e^{4R}-1} = \frac{R+\frac{\pi}{2}}{e^{3R}-e^{-R}}.$$

Et par suite, on a :

$$|I_2^R| = \left|\int_{\gamma_2^R} f(z)\,dz\right| \leq L(\gamma_2^R) \sup_{z\in\gamma_2^R} |f(z)|$$

$$\Rightarrow |I_2^R| \leq \frac{\pi}{2}\,\frac{R+\frac{\pi}{2}}{e^{3R}-e^{-R}} \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0.$$

Donc, $\lim\limits_{R\to+\infty} I_2^R = 0$.

• De la même façon, on montre que :

$$\lim_{R\to+\infty} I_4^R = 0.$$

En faisant tendre R vers $+\infty$ dans $(*)$, on aura :

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = \lim_{R\to+\infty} I_1^R + \lim_{R\to+\infty} I_3^R .$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx - i\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx + \frac{\pi}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^x}{e^{4x}+1}\,dx$$

$$= (1-i)I + \frac{\pi}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^x}{e^{4x}+1}\,dx$$

Or, d'après c) i), on a : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^x}{e^{4x}+1}\,dx = \frac{\pi}{4\sin(\frac{\pi}{4})} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$

Donc, $\displaystyle\lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = (1-i)I + \frac{\pi^2}{4\sqrt{2}} \quad (**)$.

. Calculons $\displaystyle\int_{\gamma_R} f(z)\,dz$.

La fonction $f(z) = \dfrac{z e^z}{e^{4z}+1}$ a un seul pôle à l'intérieur de γ_R, c'est $z_0 := \frac{\pi}{4}i$. Et alors, d'après le théorème des Résidus de Cauchy, on a :

$$\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i \,\mathrm{Res}(f, z_0).$$

$$\mathrm{Res}(f,z_0) = \mathrm{Res}\left(\frac{z e^z}{e^{4z}+1}, z_0\right)$$

$$= \frac{z e^z\big|_{z=z_0}}{\frac{d}{dz}\left(e^{4z}+1\right)\Big|_{z=z_0}} = \frac{i\frac{\pi}{4}e^{i\frac{\pi}{4}}}{4e^{i\pi}} = -\frac{i\pi(1+i)}{16\sqrt{2}}$$

Donc, $\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = \frac{\pi^2(1+i)}{8\sqrt{2}}$.

Et alors, d'après (**), on a :

$$\frac{\pi^2(1+i)}{8\sqrt{2}} = (1-i)I + \frac{\pi^2}{4\sqrt{2}} \Rightarrow I = \frac{-\pi^2}{8\sqrt{2}}.$$

Donc, $$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Log}(x)}{x^4+1}\,dx = -\frac{\pi^2}{8\sqrt{2}}.$$

e) Intégrales Généralisées des Fonctions Produits des Fonctions rationnelles et des Fonctions Trigonometriques.

On s'intéresse à calculer des intégrales généralisées de la forme :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p(x)}{q(x)} \cos(ax)\,dx \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p(x)}{q(x)} \sin(bx)\,dx.$$

où p, q sont des polynômes réels et a, b sont des réels.

$\cos(ax) = \operatorname{Re}(e^{iax})$ et $\sin(bx) = \operatorname{Im}(e^{ibx})$

Et alors, on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p(x)}{q(x)} \cos(ax)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p(x)}{q(x)} \operatorname{Re}(e^{iax})\,dx$$

$$= \operatorname{Re}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p(x)}{q(x)} e^{iax}\,dx\right).$$

Et de même, on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p(x)}{q(x)} \sin(bx)\,dx = \operatorname{Im}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p(x)}{q(x)} e^{ibx}\,dx\right).$$

Maintenant, donnons un exemple pour le calcul de ce type d'intégrales généralisées.

Soient $a>0$ et $b\geq 0$ des nombres réels.

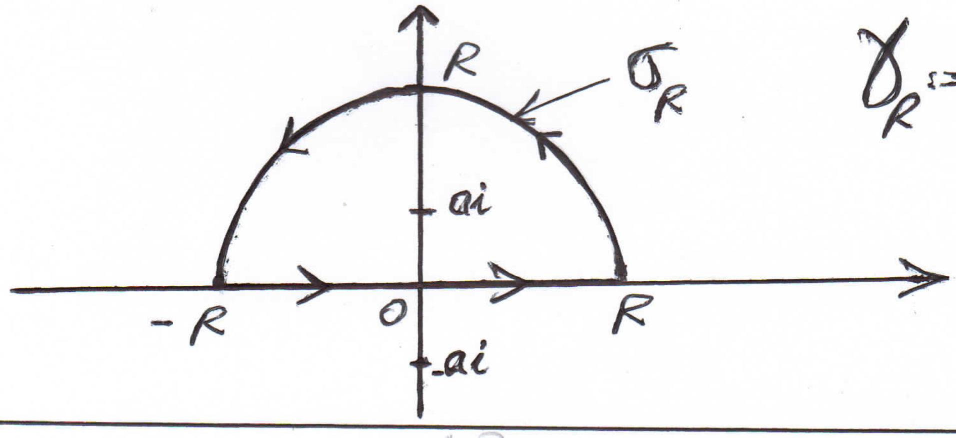
Calculons l'intégrale généralisée suivante :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(bx)}{x^2+a^2}\,dx.$$

. Montrons d'abord que l'intégrale converge.

$\left|\dfrac{\cos(bx)}{x^2+a^2}\right| \leq \dfrac{1}{x^2+a^2}$, et comme $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+a^2}$ est convergente, alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(bx)}{x^2+a^2}$ converge.

. Soit $R>a$, et considérons le chemin fermé γ_R orienté dans le sens direct formé par le demi-cercle supérieur σ_R de centre 0 et de rayon R et le segment $[-R,R]$.



$$\gamma_R := \sigma_R \cup [-R,R]$$

• $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(bx)}{x^2+a^2} dx = Re\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ibx}}{x^2+a^2} dx\right)$.

Considérons alors l'intégrale complexe suivante :

$$I_R := \int_{\gamma_R} f(z)\, dz \quad \text{où} \quad f(z) := \frac{e^{ibz}}{z^2+a^2}.$$

$$I_R = \int_{\sigma_R} f(z)\, dz + \int_{-R}^{R} \frac{e^{ibx}}{x^2+a^2} dx = I_1^R + I_2^R \quad (*)$$

• Pour $R > a$, $f(z) = \frac{e^{ibz}}{z^2+a^2}$ admet un pôle simple intérieur à γ_R en $z_0 := ai$. Et alors, d'après le théorème des Résidus de Cauchy, on a :

$$I_R = \int_{\gamma_R} f(z)\, dz = 2\pi i \, Res(f, z_0).$$

$$Res(f, z_0) = Res\left(\frac{e^{ibz}}{z^2+a^2}, z_0\right)$$

$$= \frac{e^{ibz}\big/_{z=z_0}}{\frac{d}{dz}(z^2+a^2)\big/_{z=z_0}} = \frac{e^{ibz_0}}{2z_0} = \frac{e^{-ba}}{2ia}.$$

Donc, $I_R = \frac{\pi e^{-ab}}{a}$.

• Montrons que $\lim_{R\to+\infty} I_1^R = 0$.

$\forall \theta \in [0,\pi]$, $-bR\sin\theta \leq 0 \Rightarrow e^{-bR\sin\theta} \leq 1$.

$\forall z \in \sigma_R$, $z = Re^{i\theta}$ pour un certain $\theta \in [0,\pi]$.

$$|e^{ibz}| = \left|e^{ibR(\cos\theta + i\sin\theta)}\right| = e^{-bR\sin\theta} \leq 1.$$

$$\Rightarrow \left|\frac{e^{ibz}}{z^2+a^2}\right| \leq \frac{1}{|z^2+a^2|} \leq \frac{1}{|z|^2-a^2} = \frac{1}{R^2-a^2}.$$

Donc, $\displaystyle\sup_{z\in\sigma_R} |f(z)| \leq \frac{1}{R^2-a^2}$.

Et alors, on a :

$$|I_1^R| = \left|\int_{\sigma_R} f(z)\,dz\right| \leq L(\sigma_R) \sup_{z\in\sigma_R}|f(z)|$$

$$\leq \pi R \frac{1}{R^2-a^2} \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0.$$

Donc, $\displaystyle\lim_{R\to+\infty} I_1^R = 0$.

En faisant tendre R vers $+\infty$ dans $(*)$, on aura :

$$\frac{\pi e^{-ab}}{a} = 0 + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ibx}}{x^2+a^2}\,dx$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ibx}}{x^2+a^2}\,dx = \frac{\pi e^{-ab}}{a}.$$

Et comme $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(bx)}{x^2+a^2}\,dx = \mathrm{Re}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ibx}}{x^2+a^2}\,dx\right)$,

On a : $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(bx)}{x^2+a^2}\,dx = \frac{\pi e^{-ab}}{a}.$$

Exercices du Chapitre V

Exercice 1. Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$, $z_0 \in U$ et f une fonction holomorphe sur U. Et soit $B(z_0, R)$ la plus grande boule ouverte contenue dans U.
Montrer que f possède le développement de Taylor unique sur $B(z_0,R)$ suivant :

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n \quad \forall z \in B(z_0,R).$$

Exercice 2. Soient $f(x) = \sum_{n\geq 0} c_n x^n$ une série de Taylor qui converge sur $]-R,R[$ et g une fonction holomorphe sur $B(0,R)$ et telle que $g(x) = f(x)$ sur un certain intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant 0.
Montrer que la série de Taylor de g est :

$$g(z) = \sum_{n\geq 0} c_n z^n \quad \forall z \in B(0,R).$$

Exercice 3. Trouver la série de Taylor de la fonction f en z_0 dans les cas suivants :

1) $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$, $z_0 = i$

2) $f(z) = \dfrac{1}{4-iz}$, $z_0 = 3$

3) $f(z) = \dfrac{z}{1-z}$, $z_0 = 0$

4) $f(z) = z e^{z}$, $z_0 = 1$.

Exercice 4. Déterminer de deux façons différentes la série de Taylor de $f(z) = \dfrac{1}{(1-z)(2-z)}$ en $z_0 = 0$.

Exercice 5. Soient $f(z) = \text{Log}(z)$ et $z_0 = -1+i$.

Déterminer la série de Taylor de f en z_0 et son rayon de convergence.

Quelle remarque peut-on faire ?

Exercice 6. Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$, $z_0 \in U$ et f une fonction holomorphe sur U. On définit la fonction g sur U par :

$$g(z) := \begin{cases} \dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} & \text{si } z \neq z_0 \\ f'(z_0) & \text{si } z = z_0 \end{cases}$$

Montrer que g est holomorphe sur U.

Exercice 7. **(Les Nombres de Bernoulli)**

Soit $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par :

$$f(z) := \begin{cases} \dfrac{z}{e^{z}-1} & \text{si } z \neq 0 \\ 1 & \text{si } z = 0 \end{cases}$$

1) Montrer que f est holomorphe en 0.

2) Montrer que le rayon de convergence de la série

de Taylor de f en 0 est $R = 2\pi$.

3) Ecrire la série de Taylor de f en 0 sous la forme : $f(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{B_n}{n!} z^n \quad \forall z \in B(0,R)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, B_n s'appelle le $n^{\underline{\text{ième}}}$ nombre de Bernoulli.

a) Montrer que : $\begin{cases} B_0 = 1 \\ B_n = \frac{-1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} C_{n+1}^{k} B_k \quad \forall n \geq 1 \end{cases}$

b) Montrer que : $B_{2n+1} = 0 \quad \forall n \geq 1$.

Exercice 8. Déterminer le développement de Laurent de $f(z) = \frac{1}{1-z^2} + \frac{1}{3-z}$ dans :

1) $B(0,1) = \{ z \in \mathbb{C} / |z| < 1 \}$;

2) $\mathcal{C}(0,1,3) = \{ z \in \mathbb{C} / 1 < |z| < 3 \}$;

3) $\mathcal{C}(0,3,\infty) = \{ z \in \mathbb{C} / |z| > 3 \}$.

Exercice 9. Trouver le développement de Laurent de f en z_0 dans les cas suivants :

1) $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$, $z_0 = 0$.

2) $f(z) = \frac{1}{1-z}$, $z_0 = 0$.

3) $f(z) = \frac{1}{z-6}$, $z_0 = 4$.

4) $f(z) = \dfrac{3z^2 - 2z + 4}{z - 6}$, $z_0 = 4$.

Exercice 10. Trouver tous les développements de Laurent de $f(z) = \dfrac{3}{(1+z)(2-z)}$ en $z_0 = 0$.

Exercice 11. Déterminer la plus grande couronne centrée en $z_0 = i$ sur laquelle la fonction $f(z) = \dfrac{1}{1+z^2}$ admet un développement de Laurent en z_0.

Exercice 12. Déterminer le développement de Laurent de $f(z) = \dfrac{1}{(1-z)^3}$ en 0 dans la couronne $\mathcal{C}(0, 1, +\infty)$.

Exercice 13. Trouver les développements de Laurent des fonctions suivantes sur les couronnes correspondantes :

1) $f(z) = \dfrac{1}{1+z}$, $\mathcal{C}(0, 1, +\infty)$.

2) $f(z) = \dfrac{1}{1+z^2}$, $\mathcal{C}(0, 1, +\infty)$.

3) $f(z) = z + \dfrac{1}{z}$, $\mathcal{C}(1, 1, +\infty)$.

4) $f(z) = \dfrac{z}{(z+2)(z+3)}$, $\mathcal{C}(0, 2, 3)$

5) $f(z) = \dfrac{z^2 + (1-i)z + 2}{(z-i)(z+2)}$, $\mathcal{C}(0, 1, 2)$.

Exercice 14. Soit $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z+i)}$

Trouver tous les développements de Laurent de f en $z_0=-1$.

Exercice 15. Déterminer le développement de Laurent de chacune des fonctions suivantes au voisinage du point singulier indiqué et préciser la nature du point singulier en question :

1) $f(z) = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2z}$, $z_0 = 0$.

2) $f(z) = \dfrac{1}{z^2(z+1)}$, $z_0 = 0$.

3) $f(z) = z^2 \cos\left(\frac{1}{z}\right)$, $z_0 = 0$.

Exercice 16. En utilisant des développements de Laurent appropriés, calculer les intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_{C(0,1)} \sin\left(\frac{1}{z}\right) dz$.

2) $\displaystyle\int_{C(0,4)} \mathrm{Log}\left(1+\frac{1}{z}\right) dz$.

Exercice 17. Calculer les intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_{C(0,1)} \frac{e^{\frac{1}{z}}}{z}\, dz$.

2) $\displaystyle\int_{C(0,1)} e^{z+\frac{1}{z}}\, dz$.

Exercice 18. Trouver les résidus en toutes les singularités isolées des fonctions suivantes :

1) $f(z) = \dfrac{1+z}{z}$ 2) $g(z) = \dfrac{(z-1)^3}{(z+3i)^3}$ 3) $h(z) = \dfrac{1}{\sin(\pi z)} \dfrac{z+1}{z-1}$

4) $k(z) = \dfrac{1}{z^3 - z^5}$ 5) $\ell(z) = \dfrac{z^{2m}}{(1+z)^m}$ $(m \in \mathbb{N})$

6) $m(z) = \dfrac{z^2+z-1}{z^2(z-1)}$ 7) $n(z) = \dfrac{e^z}{z^2(z^2+9)}$

Exercice 19. Trouver les résidus en tous les pôles des fonctions suivantes :

1) $f(z) = \dfrac{z^2 - 2z}{(z+1)^2(z^2+4)}$ 2) $g(z) = \dfrac{e^z}{\sin^2 z}$

Exercice 20. Trouver le résidu de la fonction

$$f(z) = \frac{\cot g(z) \cdot \coth(z)}{z^3} \quad \text{en } z_0 = 0 .$$

Exercice 21. Soient $z_0 \in \mathbb{C}$ et f une fonction complexe définie au voisinage de z_0 sauf peut être en z_0.

On pose : $g(z) := \dfrac{f'(z)}{f(z)}$.

Calculer $\mathrm{Res}(g, z_0)$ dans les cas suivants :

1) z_0 est un zéro d'ordre m de f.

2) z_0 est un pôle d'ordre m de f.

Exercice 22. 1) Montrer que pour tous $m \in \mathbb{N}$ et $k \leq m$ on a : $\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{(1+z)^m}{z^{k+1}} dz = C_m^k$

où γ est un lacet contenant 0 à l'intérieur.

2) En déduire que : $C_{2m}^m \leq 4^m \quad \forall m \in \mathbb{N}$.

3) Calculer : $\sum_{m \geq 0} \frac{1}{7^m} C_{2m}^m$.

Exercice 23. Soient $R>0$ et σ_R le demi-cercle supérieur de centre O et de rayon R orienté dans le sens direct. Et soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction telle que $|f(Re^{i\theta})| \leq \frac{M}{R^k}$ $\forall R>0$ et $\forall \theta \in [0, \pi]$, où $M>0$ et $k \in \mathbb{N}^*$.

Montrer que : $\lim_{R \to +\infty} \int_{\sigma_R} e^{imz} f(z)\, dz = 0 \quad \forall m \geq 0$.

Exercice 24. Soit $f(z) = \frac{1}{\sin(\pi z)}$.

1) Montrer que f admet des pôles en k ($k \in \mathbb{Z}$).

2) Montrer que $Res(f, k) = \frac{(-1)^k}{\pi} \quad \forall k \in \mathbb{Z}$.

3) Soit g une fonction holomorphe en $k \in \mathbb{Z}$. Montrer que :
$Res(gf, k) = \frac{(-1)^k}{\pi} g(k)$.

Exercice 25. Soient f et g deux fonctions ayant les développements de Laurent en z_0 suivants :

$$f(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n (z-z_0)^n \text{ et } g(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n(z-z_0)^n \quad \forall z\in \mathcal{C}(z_0,r,R)$$

avec $r\in\,]0,R[$.

Montrer que : $\mathrm{Res}(f\cdot g, z_0)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n b_{-n-1}$

Exercice 26. Calculer les intégrales suivantes :

1) $I_1=\displaystyle\int_{\mathcal{C}(0,1)} \frac{z^2+3z-1}{z(z^2-3)}\,dz$

2) $I_2=\displaystyle\int_{\mathcal{C}(0,\frac{3}{2})} \frac{dz}{z(z-1)(z-2)\cdots(z-10)}$

3) $I_3=\displaystyle\int_{\mathcal{C}(0,1)} \frac{e^{z^2}}{z^6}\,dz$.

4) $I_4=\displaystyle\int_{\mathcal{C}(0,1)} \frac{\sin(z)}{z^6}\,dz$

Exercice 27. Calculer les intégrales suivantes :

1) $I_1=\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2-\cos\theta}$

2) $I_2=\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos(2\theta)}{5+4\cos\theta}\,d\theta$

3) $I_3 = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{7 + 2\cos\theta + 3\sin\theta}$.

Exercice 28. Calculer les intégrales généralisées suivantes:

1) $I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4 + 1}$

2) $I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3}$

3) $I_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}}$ $(n \in \mathbb{N})$.

Exercice 29. Calculer les intégrales généralisées suivantes:

1) $I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{e^{bx}+1}\, dx$ $(0 < a < b)$.

2) $I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{(x+1)^2}\, dx$ $(-1 < \alpha < 1)$.

3) $I_3 = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{Log}(ax)}{x^2+b^2}\, dx$ $(a, b > 0)$

Exercice 30. Calculer les intégrales généralisées suivantes:

1) $I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(4x)}{x^2+1}\, dx$

2) $I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2\cos(2x)}{(x^2+1)^2}\, dx$

3) $I_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos(\pi x)}{x^2+x+9}\,dx$ et

$I_4 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin(\pi x)}{x^2+x+9}\,dx$.

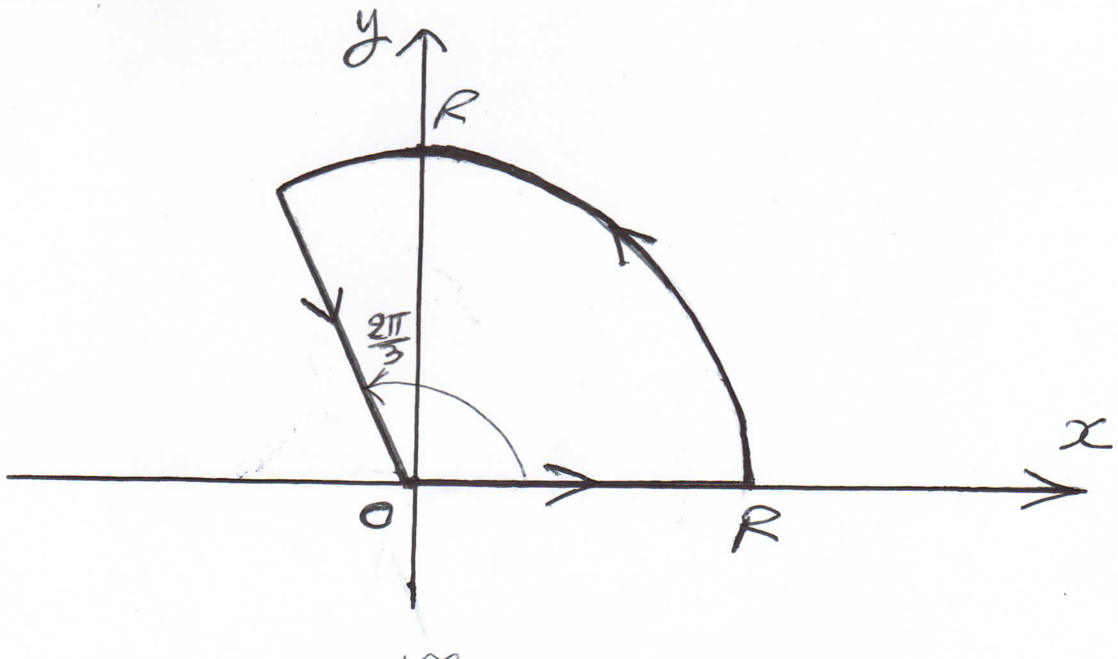
Exercice 31. Calculer les intégrales suivantes :

1) $I_1 = Vp\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x-a}\,dx$ et

$I_2 = Vp\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x-a}\,dx$.

2) $I_3 = Vp\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx$.

Exercice 32. En utilisant le lacet γ_R suivant



Calculer : $\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x^3+1}$.

Exercice 33: (Lemme du Chemin Rétréci)

Soit f une fonction complexe continue sur $\overline{B}(z_0, R_0)$.
Et soient $r \in]0, R_0[$ et θ_0, α des nombres réels fixés avec $\alpha \neq 0$.
On considère σ_r l'arc circulaire orienté dans le sens direct constitué des nombres complexes
$z = z_0 + re^{i\theta}$ $(\theta \in [\theta_0, \theta_0 + \alpha])$.

Montrer que : $\displaystyle \lim_{r \to 0^+} \frac{1}{i\alpha} \int_{\sigma_r} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = f(z_0)$.

Exercice 34. Soit g une fonction holomorphe sur un voisinage épointé de z_0 et avec un pôle simple en z_0.
Soient $R_0 > 0$ et pour tout $r \in]0, R_0[$ σ_r le chemin circulaire de l'exercice 33.

Montrer que : $\displaystyle \lim_{r \to 0^+} \int_{\sigma_r} g(z)\, dz = i\alpha \operatorname{Res}(g, z_0)$.

Exercice 35. **1)** Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$, $a \in U$, $V := U \setminus \{a\}$ et f une fonction holomorphe sur V.

a) Supposons que $f = \frac{g}{h}$, avec g et h sont holomorphes sur U, $g(a) \neq 0$ et a un zéro simple de h.

Montrer que : $\mathrm{Res}(f,a) = \dfrac{g(a)}{h'(a)}$.

b) Supposons que $f(z) = \dfrac{g(z)}{(z-a)^m}$; avec $m \in \mathbb{N}^*$; g une fonction holomorphe sur U et $g(a) \neq 0$.

Montrer que : $\mathrm{Res}(f,a) = \dfrac{1}{(m-1)!}\, g^{(m-1)}(a)$.

2) Calculer les résidus aux pôles de la fonction

$$f(z) = \frac{z^2+z+1}{z(z^2+1)^2}.$$

<u>Exercice 36.</u> (Résidu à l'infini)

Soient $r>0$ et $R>0$ assez grand ; et soient $U := \{z \in \mathbb{C} / |z| > r\}$, $V := \{z \in \mathbb{C} / 0 < |z| < \frac{1}{r}\}$ et f une fonction holomorphe sur U.

On considère la fonction g holomorphe sur V définie par : $g(z) := \dfrac{1}{z^2} f\left(\dfrac{1}{z}\right)$ $\forall z \in V$.

On suppose que $W := \{z \in \mathbb{C} / |z| > R\}$ on a des développements de Laurent de f :

$$f(z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \alpha_m (z-a)^m = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \beta_m (z-b)^m.$$

où a et b sont deux nombres complexes.

1) Montrer que : $\alpha_{-1} = \beta_{-1}$.

On appelle $-\alpha_{-1}$ le résidu de f à l'infini, et on pose : $Res(f,\infty) := -\alpha_{-1}$.

2) Montrer que : $Res(f,\infty) = -Res(g,0)$.

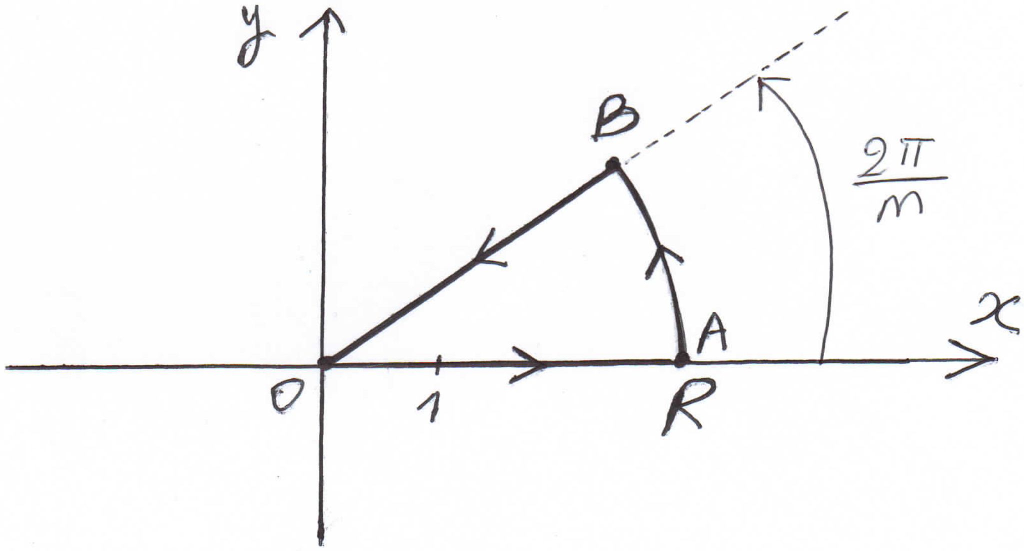
Exercice 37. Calculer les intégrales suivantes :

1) $$I_1 = \int_0^{2\pi} \frac{\cos x}{a+\cos x}\,dx \quad (a>1)$$

2) $$I_2 = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{b+\cos x+\sin x} \quad (b>\sqrt{2}).$$

Exercice 38. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère l'intégrale généralisée $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n}$.

Calculer I_n pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$ en utilisant le lacet suivant :



Exercice 39. Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}_+^*$.

Calculer l'intégrale généralisée suivante :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(\alpha x)}{ch(x) + ch(a)}\, dx$$

Exercice 40. Calculer les intégrales généralisées suivantes :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{Log(x)}{\sqrt{x}(1+x^2)}\, dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x^2)}.$$

Exercice 41. En utilisant $K := \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$,

Calculer les intégrales généralisées suivantes :

$$I = \int_0^{+\infty} \cos(x^2)\, dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^{+\infty} \sin(x^2)\, dx.$$

Exercice 42. Calculer les intégrales suivantes :

1) $$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+9)}\, dx$$

2) $$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2ix+2-4i}$$

3) $$I_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2+2x+2}\, dx$$

4) $$I_4 = \int_0^{2\pi} \frac{\cos(n\theta)}{5+3\cos\theta} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Exercice 43. Calculer les intégrales suivantes :

1) $$I_1 = \int_{\mathcal{C}(0,3)} \frac{e^{\alpha z}}{z^2(z^2+2z+2)}\, dz \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

2) $$I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^6+1}$$

3) $$I_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2(x^2+2x+2)}\, dx$$

Exercice 44. Calculer les intégrales suivantes :

1) $$I_1 = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3-2\cos\theta+\sin\theta}$$

2) $$I_2 = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+b\sin\theta} \quad (a>|b|)$$

3) $$I_3 = \int_0^{2\pi} \frac{\cos(3\theta)}{5-4\cos\theta}\, d\theta$$

4) $$I_4 = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(5-3\sin\theta)^2}$$

5) $$I_5 = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(mx)}{x^2+1}\, dx \quad (m>0)$$

6) $$I_6 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin(\pi x)}{x^2+2x+5}\, dx.$$