Université Moulay Ismail — Année universitaire 2019-2020
Faculté des Sciences — SMA Semestre VI
Département de Mathématiques — Distributions

Cours du 15/04/2020

0.1 Opérations sur les distributions

Commençons par un résultat de l'analyse fonctionnelle, (voir Appendice 1)

Théorème. *Soient* $(\mathcal{X}_1, \tau_1)$ *et* $(\mathcal{X}_2, \tau_2)$ *deux espaces vectoriels topologiques et* A *un opérateur linéaire continu de* $(\mathcal{X}_1, \tau_1)$ *vers* $(\mathcal{X}_2, \tau_2)$*. Alors, il existe un opérateur* ${}^tA$*, dit transposé de* A*, linéaire continu de* $(\mathcal{X}_2', \tau_2^*)$ *vers* $(\mathcal{X}_1', \tau_1^*)$, où pour une topologie τ sur un espace vectoriel $\mathcal{X}$, la topologie τ^* est la topologie définie, sur $\mathcal{X}'$, par la famille de semi-normes, où $x \in \mathcal{X}$,

$$p_x : x^* \mapsto |< x, x^* >|$$

et ${}^tA$ défini pour tout $x_2^* \in \mathcal{X}_2'$ et $x_1 \in \mathcal{X}_1$ par :

$$<{}^tAx_2^*, x_1> = < x_2^*, Ax_1 >,$$

où le différents crochets étant ceux des dualités.

0.1.1 Dérivation des distributions

Comme nous allons le voir, les dérivations des distributions sont des opérations transposées à un signe près, de dérivations dans l'espace vectoriel topologique $\mathscr{D}(\Omega)$.

En effet, soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$ dans $\mathbb{R}$, elle est localement intégrable ainsi que sa dérivée. On peut leurs associer des distributions régulières Λ_f et $\Lambda_{f'}$. D'autre part, si $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, avec $\mathrm{supp}(\varphi) \subset [-r, r]$, $(r > 0)$, une intégration par parties donne

$$< \Lambda_f, \varphi' > = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int_{-r}^{r} f(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x = -\int_{-r}^{r} f'(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = -< \Lambda_{f'}, \varphi >,$$

de telle sorte que cela suggère de définir la dérivée de la distribution Λ_f par l'égalité suivante :

$$< (\Lambda_f)', \varphi > = -< \Lambda_f, \varphi' > .$$

Proposition-Définition. *Soient* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^d$, $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ *une distribution d'ordre* m *et* $j \in [\![1, d]\!]$*. Alors, en posant*

$$< \partial_j T, \varphi > := -< T, \partial_j \varphi >,$$

on définit bien une distribution $\partial_j T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ *d'ordre inférieur ou égal à* $m+1$ *appelée la dérivée partielle* j^{ieme} *de la distribution* T*, de plus, si* T *est une distribution régulière associée à une fonction* f *de classe* $\mathcal{C}^1$ *dans* Ω*,*

$$\partial_j \Lambda_f = \Lambda_{\partial_j f}.$$

Démonstration. Une première remarque est que cette proposition n'a pas besoin de démonstration vu que l'opérateur ∂_j est continu de $\mathscr{D}(\Omega)$ dans lui même, donc l'opérateur ∂_j admet un transposé ${}^t\partial_j$ continu de $\mathscr{D}'(\Omega)$ dans lui même. Il en résulte que pour toute distribution $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$, ${}^t\partial_j T$ est bien une distribution. La seule chose qu'il va falloir faire c'est d'identifié ce transposé. C'était l'objet de l'exemple introductif.
Soient $K \Subset \Omega$ un compact, T une distribution, $\varphi \in \mathcal{C}_K^\infty(\Omega)$ et $j \in [\![1, d]\!]$. Comme $\mathrm{supp}(\partial_j\varphi) \subset K$, on a :

$$| < T, \partial_j\varphi > | \leq c_K \max_{|\alpha|\leq m} \sup_{x\in K} |\partial^\alpha(\partial_j\varphi)(x)|.$$

où c_K est une constante positive et m est l'ordre de la distribution T. Comme par définition

$$| < \partial_j T, \varphi > | = | < T, \partial_j\varphi > |$$

de l'inégalité précédente on déduit que pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_K^\infty(\Omega)$, on a :

$$| < \partial_j T, \varphi > | \leq c_K \max_{|\alpha|\leq m+1} \sup_{x\in K} |\partial^\alpha\varphi(x)|,$$

qui implique que $\partial_j T$ est une distribution et que son ordre est inférieur ou égal à $m + 1$.

Proposition 1. *Soient $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ et $j, k \in [\![1, d]\!]$, alors*

$$\partial^2_{j,k} T = \partial^2_{k,j} T,$$

où

$$\partial^2_{j,k} T = \partial_j\partial_k T.$$

Démonstration. Soient $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ et $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$. On a :

$$< \partial_j\partial_k T, \varphi >= - < \partial_k T, \partial_j\varphi >=< T, \partial_k\partial_j\varphi > .$$

Or, φ étant de classe $\mathcal{C}^\infty$, le théorème de Schwarz implique que l'on a :

$$\partial_k\partial_j\varphi = \partial_j\partial_k\varphi,$$

donc,

$$< \partial_j\partial_k T, \varphi >=< T, \partial_j\partial_k\varphi >= - < \partial_j T, \partial_k\varphi >=< \partial_k\partial_j T, \varphi > .$$

Comme φ est quelconque dans $\mathscr{D}(\Omega)$, nous obtenons :

$$\partial_j\partial_k T = \partial_k\partial_j T.$$

Proposition 2. *Soient $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ et $\alpha \in I\!N^d$ un multi-indice. Alors, l'application $\partial^\alpha T$ définie pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ par :*

$$< \partial^\alpha T, \varphi >:= (-1)^{|\alpha|} < T, \partial^\alpha\varphi >$$

est une distribution et si T est d'ordre k, $\partial^\alpha T$ est d'ordre inférieur ou égale à $k + |\alpha|$.
Démonstration. Elle se fait par récurrence sur la longueur du multi-indice α.
Si $|\alpha| = 1$, c'est la proposition-définition. Supposons la proposition vraie pour tout multi-indice

α de longueur n et soit β un multi-indice de longueur $n+1$. Il existe alors $k \in [\![1, d]\!]$ et α multi-indice de longueur n tels que pour tout $\varphi \in \mathcal{C}^{n+1}(\Omega)$ on ait :

$$\partial^\beta \varphi = \partial_k \partial^\alpha \varphi.$$

On a donc pour tout $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ et $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$

$$< \partial^\beta T, \varphi >=< \partial_k \partial^\alpha T, \varphi >= - < \partial^\alpha T, \partial_k \varphi >= -(-1)^{|\alpha|} < T, \partial^\alpha \partial_k \varphi >,$$

les deux premières égalités d'après les propositions précédentes, tandis que la dernière d'après l'hypothèse de récurrence. Donc, pour tous $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$, $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ et si β est un multi-indice de longueur $n+1$.

$$< \partial^\beta T, \varphi >= (-1)^{|\beta|} < T, \partial^\beta \varphi >$$

Il en résulte que la première partie de la proposition est démontrée.
Soit $K \Subset \Omega$ un compact et $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ d'ordre m. T étant une distribution d'ordre m, il existe c_K telle que

$$< T, \partial^\alpha \varphi > | \leq c_k \max_{|\beta| \leq m} \sup_{x \in K} |\partial^\beta \partial^\alpha \varphi(x)| \leq c_K \max_{|\beta| \leq m+|\alpha|} \sup_{x \in K} |\partial^\beta \varphi(x)|,$$

or

$$|\partial^\alpha T, \varphi > | =< T, \partial^\alpha \varphi > |,$$

donc $\partial^\alpha T$ est d'ordre inférieur ou égal à $m + |\alpha|$.

Exemples.

Donnons quelques exemples de dérivées de distributions

1. La dérivée de la distribution régulière associée à la fonction de Heaviside est la distribution de Dirac. En effet, comme la fonction de Heaviside est définie par

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 & \text{si} \quad x \geq 0, \end{cases}$$

   en notant Λ_H la distribution associée, on a par définition, pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(I\!R)$,

$$< (\Lambda_H)', \varphi >= - < \Lambda_H, \varphi' >= - \int_0^\infty \varphi'(x) \mathrm{d}x = \varphi(0) =< \delta, \varphi > .$$

2. Nous avons vu dans la série 2 que la fonction $x \mapsto \ln x$ est localement intégrable dans $I\!R$, de telle sorte que nous avons pu lui associée une distribution régulière que l'on a noté $\Lambda_{\ell n}$ et nous avons montré que $\Lambda'_{\ell n} = \mathrm{Vp}(\frac{1}{x})$.

3. (Exercice) Calculer la dérivée (au sens des distributions) de $\mathrm{Vp}(\frac{1}{x})$.

4. (Exercice) Soient f et g deux fonctions continues dans $I\!R$, on suppose que $\Lambda'_f = \Lambda_g$, montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$.

0.1.2 Multiplication par une application de classe $\mathcal{C}^\infty$

Formule de Leibnitz. *Soient $\psi, \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$. Alors, pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^d$ on a la formule de Leibnitz suivante :*

$$\partial^\alpha(\psi\varphi) = \sum_{\beta \le \alpha} \mathrm{C}_\alpha^\beta \partial^{\alpha-\beta}\psi\partial^\beta\varphi,$$

où si $\alpha = (\alpha_1, , \alpha_2, \dots, \alpha_d)$ et $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_d)$, la notation $\beta \le \alpha$ signifie que pour tout entier k, $1 \le k \le d$, $\beta_k \le \alpha_k$ et $\mathrm{C}_\alpha^\beta = \prod_{k=1}^{d} \frac{\alpha_k!}{(\alpha_k - \beta_k)!\beta_k!}$.

Démonstration. Elle se fait par récurrence (Exercice).

Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^d$. Commençons par une proposition, où pour $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$, M_ψ est l'opération qui consiste à multiplier une fonction φ par ψ.

Proposition 3. *Soit $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$. L'application $\mathrm{M}_\psi : \mathscr{D}(\Omega) \to \mathscr{D}(\Omega)$ est continue.*

Démonstration. Soient $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ et $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$. Il est clair que le produit $\psi\varphi$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans Ω. D'autre part, comme $\{x \in \Omega \mid \psi(x)\varphi(x) \neq 0\} \subset \{x \in \Omega \mid \varphi(x) \neq 0\}$, on trouve que $\mathrm{supp}(\psi\varphi) \subset \mathrm{supp}\varphi$. Donc, $\psi\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$. Soit maintenant une suite $(\varphi_n)_{n\ge1}$ d'éléments de $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ qui converge vers φ dans $\mathscr{D}(\Omega)$. Rappelons que ceci signifie que

1. Il existe un compact K de Ω tel que $\mathrm{supp}\varphi \subset K$ et pour tout $n \ge 1$, $\mathrm{supp}\varphi_n \subset K$.

2. Pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^d$, la suite $(\partial^\alpha\varphi_n)_{n\ge1}$ converge uniformément vers $\partial^\alpha\varphi$.

Montrons que la suite $(\psi\varphi_n)_{n\ge1}$ converge vers $\psi\varphi$ dans $\mathscr{D}(\Omega)$.
Cela résulte de l'utilisation de la formule de Leibnitz, de l'inégalité suivante valable pour tout $n \ge 1$ et pour tous les multi-indices α et β tels que $\beta \le \alpha$:

$$\sup_{x\in K} |\partial^{\alpha-\beta}\psi(x)\partial^\beta\varphi_n(x) - \partial^{\alpha-\beta}\psi(x)\partial^\beta\varphi(x)| \le c_{\alpha,\beta,\psi} \sup_{x\in K} |\partial^\beta\varphi_n(x) - \partial^\beta\varphi(x)|,$$

et de la convergence de $(\varphi_n)_{n\ge1}$ vers φ dans $\mathscr{D}(\Omega)$.

Proposition 4. *Pour tout $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$, l'application* $\mathrm{M}_\psi : \mathscr{D}'(\Omega) \to \mathscr{D}'(\Omega)$ qui à T fait correspondre ψT, où pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$

$$< \psi T, \varphi > := < T, M_\psi(\varphi) >,$$

est bien définie et continue.

Démonstration. Soient $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$, $K \Subset \Omega$ et $\varphi \in \mathcal{C}_K^\infty(\Omega)$. On a :

$$| < M_\psi(T), \varphi > = < T, \psi\varphi > |$$

et comme T est une distribution, il existe $c_K > 0$ et $m \in \mathbb{N}$ tels que si $\mathrm{supp}(\psi\varphi) \subset K$ on ait :

$$| < M_\psi(T), \varphi > = < T, \psi\varphi > | \le c_K \max_{0\le|\alpha|\le m} \sup_{x\in K} |\partial^\alpha(\psi\varphi)(x)|.$$

Or $\mathrm{supp}(\psi\varphi) \subset \mathrm{supp}\varphi \subset K$ et

$$\sup_{x\in K} |\partial^\alpha(\psi\varphi)(x)| \leq c_{\alpha,\psi} \sup_{x\in K} |\partial^\alpha \varphi(x)|.$$

Il en résulte que $\mathrm{M}_\psi(T)$ est une distribution.

Proposition 5. *Soient Ω un ouvert non vide de $I\!R^d$, $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$ et $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$, alors pour tout $j \in [\![1, d]\!]$,*

$$\partial_j(\psi T) = (\partial_j \psi)T + \psi \partial_j T.$$

Démonstration. Soit $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$. On a

$$< \partial_j(\psi T), \varphi >= - < \psi T, \partial_j \varphi >= - < T, \psi \partial_j \varphi > .$$

Maintenant, comme $\psi\partial_j\varphi = \partial_j(\psi\varphi) - (\partial_j\psi)\varphi$, nous obtenons

$$\begin{aligned} < \partial_j(\psi T), \varphi >= & \ - < T, \partial_j(\psi\varphi) - (\partial_j\psi)\varphi > \\ = & \ < \partial_j T, \psi\varphi > + < T, (\partial_j)\varphi > \\ = & \ < \psi\partial_j T + (\partial_j\psi)T, \varphi >, \end{aligned}$$

et comme φ est quelconque dans $\mathscr{D}(\Omega)$ dans les dernières égalités, nous obtenons que

$$\partial_j(\psi T) = \psi\partial_j T + (\partial_j\psi)T.$$

Exemples.

1. Soient Ω un ouvert de $I\!R^d$, $f \in \mathscr{L}^1_{loc}(\Omega)$ et Λ_f la distribution régulière associée. Alors pour tout $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$,

   $$\psi\Lambda_f = \Lambda_{\psi f}.$$

   En effet, par définition, pour tout $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_c(\Omega)$, on a :

   $$< \psi\Lambda_f, \varphi >=< \Lambda_f, \psi\varphi >= \int_\Omega f(x)\psi(x)\varphi(x)\mathrm{d}x,$$

   mais comme $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$, pour tout compact $K \subset \Omega$,

   $$\int_K |\psi(x)f(x)|\mathrm{d}x \leq (\sup_{x\in K} |\psi(x)) \int_K |f(x)|\mathrm{d}x.$$

   Donc, $\psi f \in \mathcal{L}^1_{loc}(\Omega)$ et

   $$\int_\Omega f(x)\psi(x)\varphi(x)\mathrm{d}x =< \Lambda_{\psi f}, \varphi > .$$

   Il en résulte que $\Lambda_{\psi f} = \psi\Lambda_f$.

2. Soient δ la distribution de Dirac et ψ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans $I\!R^d$, alors

   $$\psi\delta = \psi(0)\delta.$$

Multiplication par x.

On se place en dimension 1. Alors, comme on l'a vu précédemment, et comme l'application $x \mapsto x$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$, la multiplication d'une distribution T par "x" est encore une distribution et il se trouve "encore" que c'est l'opérateur transposé de l'opérateur $\varphi \mapsto x\varphi$. Relativement à cet opérateur on a

Proposition 6.

1. *L'application linéaire $\varphi \mapsto x\varphi$ est continue et injective de $\mathscr{D}(I\!R)$ dans $\mathscr{D}(I\!R)$, son image est le sous-espace vectoriel fermé $\mathcal{N}(\delta) = \{ \varphi \in \mathscr{D}(I\!R) \mid \varphi(0) = 0 \}$*

2. *L'application $T \mapsto xT$ est surjective de $\mathscr{D}'(I\!R)$ sur $\mathscr{D}'(I\!R)$, son noyau est le sous-espace vectoriel engendré par la distribution de Dirac δ.*

Démonstration.

1. L'application $\varphi \mapsto x\varphi$ est injective. En effet si pour tout $x \in I\!R, x\varphi(x) = 0$, alors pour tout $x \in I\!R^*$, $\varphi(x) = 0$ et la continuité de φ implique que $\varphi(0) = 0$. Donc, φ est la fonction nulle et ceci montre que l'application $\varphi \mapsto x\varphi$ est injective de $\mathscr{D}(I\!R)$ dans $\mathscr{D}(I\!R)$.

   Il est clair que pour tout ψ dans l'image de l'application précédente, on a $\psi(0) = 0$. Montrons que si $\varphi \in \mathscr{D}(I\!R)$ est telle que $\varphi(0) = 0$, alors il existe $\psi \in \mathscr{D}(I\!R)$ tel que pour tout $x \in I\!R$, $\varphi(x) = x\psi(x)$. D'après la formule des accroissements finis, pour tout $x \in I\!R$ il existe $\psi \in \mathcal{C}^\infty(I\!R)$ tel que $\varphi(x) = x\psi(x)$ et on montre sans peine que suppφ =suppψ.

2. Soit $\varphi_0 \in \mathcal{C}_c^\infty(I\!R)$ vérifiant $\varphi_0 \notin \mathcal{N}(\delta)$. Quitte à diviser la fonction φ_0 par $\varphi_0(0)$, on peut supposer que $\varphi_0(0) = 1$. Soient maintenant $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(I\!R)$, $\lambda = \varphi(0)$ et S une distribution quelconque élément de $\mathscr{D}'(I\!R)$. Posons $\varphi_1 = \varphi - \lambda\varphi_0$ et soit T la forme linéaire définie pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(I\!R)$ par
   $$< T, \varphi >=< S, \psi >,$$
   où pour tout $x \in I\!R$, $\psi(x) = \int_0^1 \varphi_1(tx)\mathrm{d}t$. (Vérifier que T est bien une distribution).

   Pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(I\!R)$, on a :
   $$< xT, \varphi >=< T, x\varphi >=< S, \chi >,$$
   où pour tout $x \in I\!R$, $\chi(x) = \int_0^1 ... = \varphi(x)$. Donc, pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(I\!R)$,
   $$< xT, \varphi >=< S, \varphi >$$
   et l'application $T \mapsto xT$ est bien surjective de $\mathscr{D}'(I\!R)$.

Primitives d'une distribution sur $I\!R$.

Proposition 7.

1. *L'application $\varphi \mapsto \varphi'$ de $\mathscr{D}(I\!R)$ dans $\mathscr{D}(I\!R)$ est injective, son image est le sous-espace vectoriel fermé $\mathscr{D}_m(I\!R) = \{ \varphi \in \mathscr{D}(I\!R) \mid \int_{I\!R} \varphi(x)dx = 0 \}$. Cette application est un isomorphisme topologique de $\mathscr{D}(I\!R)$ sur $\mathscr{D}_m(I\!R)$.*

2. L'application $T \mapsto T'$ est surjective de $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$ sur $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$, son noyau est le sous-espace vectoriel engendré par la distribution associée à la fonction constante $x \mapsto 1$.

Démonstration.

1. Soit $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) = 0$. Alors, φ est constante. Comme elle est à support compact, elle s'annule pour x suffisamment grand, donc elle est identiquement nulle. Maintenant, comme

$$\mathscr{D}_m(\mathbb{R}) = \{\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}) \mid \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\mathrm{d}x = 0 \} = \{\varphi' \mid \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}) \},$$

$\mathscr{D}_m(\mathbb{R})$ est le noyau de la forme linéaire $\varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\mathrm{d}x$, cette forme linéaire étant continue, (c'est la distribution associée à la fonction constante $x \mapsto 1$), $\mathscr{D}_m(\mathbb{R})$ est donc un hyperplan fermé. D'autre part, si $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ qui converge dans $\mathbb{D}(\mathbb{R})$ vers un élément $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, alors $(\varphi_n')_{n\geq 1}$ converge vers φ' dans $\mathscr{D}(\mathbb{R})$. Donc, l'application $\varphi \mapsto \varphi'$ est continue de $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ dans $\mathscr{D}(\mathbb{R})$.

2. La démonstration du *2.* est laissée comme exercice.

0.1.3 Restriction des distributions

Soient Ω et $\tilde{\Omega}$ deux ouverts de $\mathbb{R}^d$ tels que $\Omega \subset \tilde{\Omega}$. On peut alors plonger $\mathscr{D}(\Omega)$ dans $\mathscr{D}(\tilde{\Omega})$ en associant à tout élément $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ son prolongement par zéro hors de Ω. On notera $\tilde{\varphi}$ ce prolongement. Il est facile de voir que cette opération définit un opérateur linéaire continu de $\mathscr{D}(\Omega)$ vers $\mathscr{D}(\tilde{\Omega})$ et par conséquent, le transposé de cet opérateur est linéaire continu de $\mathscr{D}'(\tilde{\Omega})$ vers $\mathscr{D}'(\Omega)$. Comme précédemment, il s'agit d'identifier l'opérateur transposé.

Proposition 8. *Soient Ω et $\tilde{\Omega}$ deux ouverts de $\mathbb{R}^d$ tels que $\Omega \subset \tilde{\Omega}$.*

1. L'application $\varphi \mapsto \tilde{\varphi}$ de $\mathscr{D}(\Omega)$ dans $\mathscr{D}(\tilde{\Omega})$ est continue et injectif

2. L'application $T \mapsto T_{|\Omega}$ de $\mathscr{D}'(\tilde{\Omega})$ sur $\mathscr{D}'(\Omega)$ définie pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ par

$$< T_{|\Omega}, \varphi > = < T, \tilde{\varphi} >$$

est continue et surjective, $T_{|\Omega}$ est appelée la restriction à Ω de la distribution T.

Démonstration. Soient $T \in \mathscr{D}'(\tilde{\Omega})$ et $K \subset \Omega$ un compact de Ω. On sait qu'il existe $c_K > 0$ et $m \in \mathbb{N}$ tels que si $\tilde{\varphi} \in \mathcal{C}_K^\infty(\tilde{\Omega})$ on ait :

$$| < T, \tilde{\varphi} > | \leq c_K \max_{|\alpha|\leq m} \sup_{x\in K} |\partial^\alpha \tilde{\varphi}(x)|.$$

Or, si $\varphi \in \mathcal{C}_K^\infty(\Omega)$ et $\tilde{\varphi}$ son prolongement par zéro à $\tilde{\Omega}$, $\sup_{x\in K} |\partial^\alpha \tilde{\varphi}(x)| = \sup_{x\in K} |\partial^\alpha \varphi(x)|$.