Exercice 24: 1) $\frac{1}{f(z)} = \sin(\pi z)$.

Comme les zéros de $\sin(\pi z)$ sont les entiers relatifs k et ils sont simples. Alors, les pôles de f sont les entiers relatifs k, et ils sont des pôles simples.

2) Soit $k \in \mathbb{Z}$.

$$\text{Res}(f,k) = \lim_{z\to k} (z-k) f(z) = \lim_{z\to k} (z-k)\frac{1}{\sin(\pi z)}$$

$$= \lim_{z\to k} \frac{1}{\pi \cos(\pi z)} \quad \text{(règle de l'Hôpital)}.$$

Donc : $\text{Res}(f,k) = \frac{(-1)^k}{\pi}$.

3) Supposons que g est holomorphe en k. Alors on a :

$$\text{Res}(f\cdot g,k) = \lim_{z\to k} (z-k)(f\cdot g)(z)$$

$$= \lim_{z\to k}(z-k) f(z) \cdot \lim_{z\to k} g(z)$$

$$= \text{Res}(f,k)\cdot g(k).$$

Donc : $\text{Res}(f\cdot g,k) = \frac{(-1)^k}{\pi} g(k)$.

Exercice 25: $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n (z-z_0)^n$ et $g(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n (z-z_0)^n$.

$\Rightarrow f(z)\cdot g(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n (z-z_0)^n$, avec $c_n = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k b_{n-k}$ $\forall n\in\mathbb{Z}$.

Donc : $\text{Res}(f\cdot g, z_0) = c_{-1} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n b_{-1-n}$.

Exercice 26: 1) $I_1 = \int_{\mathcal{C}(0,1)} \frac{z^2+3z-1}{z^2-3}\, dz$

La plus simple méthode de calculer I_1 est appliquer la formule de Cauchy généralisée à la fonction

$$f(z) = \frac{z^2+3z-1}{z^2-3}$$

qui est holomorphe à l'intérieur et sur $\mathcal{C}(0,1)$. Donc :

$$\int_{\mathcal{C}(0,1)} f(z)\, dz = 2\pi i\, f(0)$$

$$\Rightarrow \int_{\mathcal{C}(0,1)} \frac{z^2+3z-1}{z^2-3}\, dz = \frac{2\pi i}{3}$$

Notons que $\operatorname{Res}(f,0) = \frac{1}{3}$, puisqu'on a :

$$\int_{\mathcal{C}(0,1)} f(z)\, dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f,0).$$

2) $I_2 = \int_{\mathcal{C}(0,\frac{3}{2})} \frac{dz}{z(z-1)(z-2)\cdots(z-10)}$

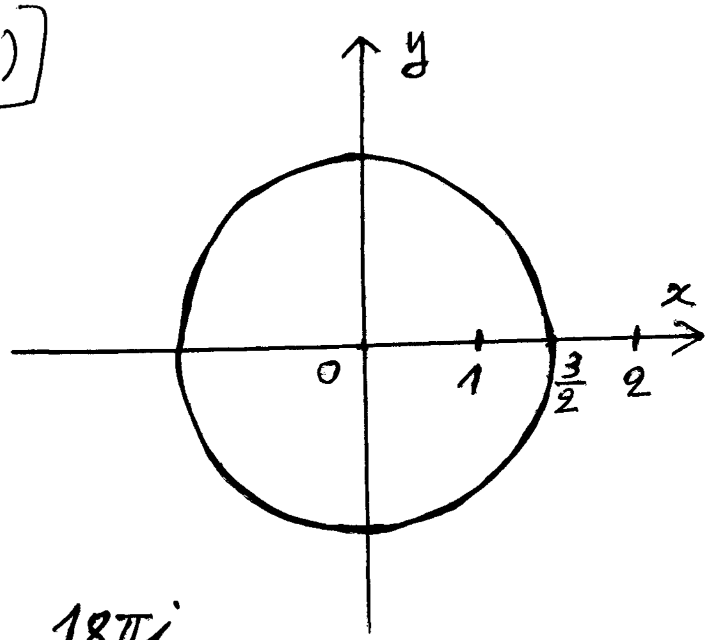
Soit $f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-2)\cdots\cdots(z-10)}$

$z_0 = 0$ et $z_1 = 1$ sont les seuls pôles de f à l'intérieur de $\mathcal{C}(0,\frac{3}{2})$, et ils sont des pôles simples. Donc :

$$\int_{\mathcal{C}(0,\frac{3}{2})} f(z)\,dz = 2\pi i\left[\mathrm{Res}(f,0)+\mathrm{Res}(f,1)\right]$$

$$\mathrm{Res}(f,0) = \lim_{z\to 0} z f(z) = \frac{1}{10!}.$$

$$\mathrm{Res}(f,1) = \lim_{z\to 1}(z-1)f(z) = \frac{-1}{9!}.$$



Et alors, on a :

$$I_2 = \int_{\mathcal{C}(0,1)} \frac{dz}{z(z-1)(z-2)\cdots(z-10)} = \frac{-18\pi i}{10!}.$$

3) $I_3 = \int_{\mathcal{C}(0,1)} \frac{e^{z^2}}{z^6}\,dz$. Posons : $f(z) := \frac{e^{z^2}}{z^6}$.

f a un pôle d'ordre 6 en 0.

Pour calculer le résidu de f en 0, on cherche le coefficient a_{-1} dans la série de Laurent de f en 0.

$$f(z) = \frac{1}{z^6}e^{z^2} = \frac{1}{z^6}\sum_{n\geq 0}\frac{(z^2)^n}{n!} = \sum_{n\geq 0}\frac{z^{2n-6}}{n!}.$$

$$\Rightarrow a_{-1} = \mathrm{Res}(f,0) = 0.$$

Donc : $\int_{\mathcal{C}(0,1)} \frac{e^{z^2}}{z^6}\,dz = 2\pi i\,\mathrm{Res}\left(\frac{e^{z^2}}{z^6},0\right) = 0.$

4) $I_4 = \int_{\mathcal{C}(0,1)} \frac{\sin z}{z^6}\,dz$. Soit $f(z) := \frac{\sin z}{z^6}$.

$$f(z) = \frac{1}{z^6} \sum_{k\geq 0} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{1}{z^6}\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots\right)$$

$$\Rightarrow a_{-1} = \operatorname{Res}(f,0) = \frac{1}{5!}.$$

Donc : $\displaystyle\int_{\mathcal{C}(0,1)} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f,0)$

$$\Rightarrow \int_{\mathcal{C}(0,1)} \frac{\sin z}{z^6}\,dz = \frac{2\pi i}{5!}.$$

<u>Exercice 27.</u> 1) $\displaystyle I_1 = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2-\cos\theta}.$

Soit $z = e^{i\theta}$. $dz = i e^{i\theta} d\theta \Rightarrow d\theta = \frac{-i}{z}\,dz.$

$\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right).$

Donc : $\displaystyle I_1 = \int_{\mathcal{C}(0,1)} \frac{\frac{-i}{z}\,dz}{2 - \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)} = -i \int_{\mathcal{C}(0,1)} \frac{dz}{-\frac{z^2}{2} + 2z - \frac{1}{2}}.$

Posons : $\displaystyle f(z) := \frac{1}{-\frac{z^2}{2} + 2z - \frac{1}{2}}$. f admet deux pôles simples :

$z_1 = 2 + \sqrt{3}$ et $z_2 = 2 - \sqrt{3}$.

Seul le pôle z_2 est à l'intérieur de $\mathcal{C}(0,1)$.

Donc, d'après le théorème des Résidus de Cauchy, on a :

$$\int_{\mathcal{C}(0,1)} f(z)\, dz = 2\pi i \,\text{Res}(f, z_2).$$

$$\text{Res}(f, z_2) = \lim_{z \to z_2} (z - z_2) f(z)$$

$$= \lim_{z \to 2-\sqrt{3}} \left[z - (2-\sqrt{3})\right] \frac{1}{-\frac{1}{2}\left(z-(2-\sqrt{3})\right)\left(z-(2+\sqrt{3})\right)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Donc : $I_1 = -i\, 2\pi i \frac{1}{\sqrt{3}}$.

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 - \cos\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

2) $I_2 = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta}{5 + 4\cos\theta}\, d\theta.$

Posons : $z = e^{i\theta}$. $dz = i e^{i\theta} d\theta \Rightarrow d\theta = \frac{-i}{z} dz.$

$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right) \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$

$\cos 2\theta = \frac{1}{2}\left(e^{i2\theta} + e^{-i2\theta}\right) \Rightarrow \cos 2\theta = \frac{1}{2}\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right)$

Donc : $I_2 = \displaystyle\int_{\mathcal{C}(0,1)} \frac{\frac{1}{2}\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right)}{5 + \frac{4}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)} \frac{-i}{z}\, dz$

$$\Rightarrow I_2 = \frac{-i}{2}\int_{\mathcal{C}(0,1)} \frac{z^4+1}{z^2(2z^2+5z+2)}\, dz$$

Posons : $f(z) := \dfrac{z^4+1}{z^2(2z^2+5z+2)}$.

f admet $z_0 = 0$ comme pôle double et $z_1 = -\frac{1}{2}$ et $z_2 = -2$ comme pôles simples.

Seuls les pôles z_0 et z_1 sont à l'intérieur de $\mathcal{C}(0,1)$.

Donc, d'après le théorème des Résidus de Cauchy, on a :

$$\int_{\mathcal{C}(0,1)} f(z)\, dz = 2\pi i \left[Res(f,0) + Res(f, -\tfrac{1}{2}) \right].$$

$$Res(f,0) = \lim_{z\to 0} \frac{d}{dz}\left[z f(z) \right] = \frac{-5}{4}.$$

$$Res(f,-\tfrac{1}{2}) = \lim_{z\to -\frac{1}{2}} (z+\tfrac{1}{2}) f(z) = \frac{17}{12}.$$

Donc, $I_2 = \frac{-i}{2}\, 2\pi i \left(-\frac{5}{4} + \frac{17}{12} \right)$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta}{5+4\cos\theta}\, d\theta = \frac{\pi}{6}.$$

3) $I_3 = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{7 + 2\cos\theta + 3\sin\theta}$.

Posons : $z := e^{i\theta}$. $dz = i e^{i\theta} d\theta \Rightarrow d\theta = \frac{-i}{z} dz$.

$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right) \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$

$\sin\theta = \frac{1}{2i}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right) \Rightarrow \sin\theta = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)$.

Donc, $I_3 = \displaystyle\int_{\mathcal{C}(0,1)} \frac{\frac{-i}{z}\, dz}{7 + \left(z + \frac{1}{z}\right) + \frac{3}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)}$.

$$\Rightarrow I_3 = -i \int_{\mathcal{C}(0,1)} \frac{dz}{\left(1 - \frac{3}{2}i\right) z^2 + 7z + \left(1 + \frac{3}{2}i\right)}.$$

Posons : $f(z) := \dfrac{1}{\left(1 - \frac{3}{2}i\right) z^2 + 7z + \left(1 + \frac{3}{2}i\right)}$.

f admet deux pôles simples :

$z_1 = \dfrac{-7 - \sqrt{36}}{2 - 3i} = -2 - 3i$ et $z_2 = \dfrac{-7 + \sqrt{36}}{2 - 3i} = \dfrac{-2 - 3i}{13}$.

Seul le pôle z_2 est à l'intérieur de $\mathcal{C}(0,1)$. Donc, d'après le théorème des Résidus de Cauchy, on a :

$$\int_{\mathcal{C}(0,1)} f(z)\,dz = 2\pi i \,\mathrm{Res}(f, z_2).$$

$$\mathrm{Res}(f, z_2) = \lim_{z \to z_2} (z - z_2) f(z) = \frac{1}{2\left(1 - \frac{3}{2}i\right) z_2 + 7} = \frac{1}{6}.$$

Donc, $I_3 = -i\, 2\pi i \,\frac{1}{6}$

$$\Longrightarrow \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{7 + 2\cos\theta + 3\sin\theta} = \frac{\pi}{3}.$$

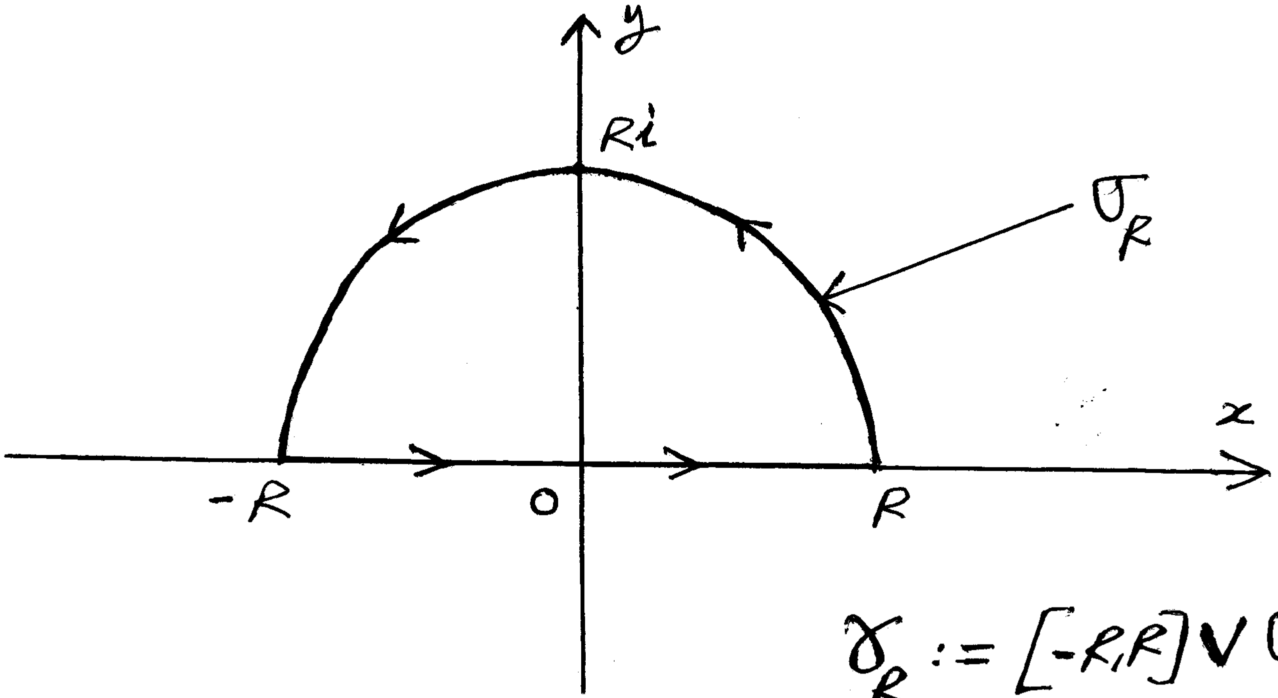
<u>Exercice 28.</u> 1) $I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1}.$

- Il est clair que l'intégrale généralisée converge.

Et alors $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1} = Vp \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1} = \lim_{R \to +\infty} \int_{-R}^{R} \frac{dx}{x^4+1}.$

- Posons : $f(z) := \frac{1}{z^4+1}.$

Pour tout $R > 0$, considérons le lacet γ_R constitué par le segment $[-R, R]$ et σ_R le demi-cercle supérieur de centre 0 et de rayon R, orienté dans le sens direct.



$$\gamma_R := [-R,R] \cup \sigma_R$$

Alors, on a :

$$I_R := \int_{\gamma_R} f(z)\,dz = \underbrace{\int_{[-R,R]} f(z)\,dz}_{J_R} + \underbrace{\int_{\sigma_R} f(z)\,dz}_{K_R}$$

$$\Rightarrow I_R = J_R + K_R \quad (*)$$

- Sur $[-R,R]$, on a $f(z) = f(x) = \dfrac{1}{x^4+1}$ et $dz = dx$.

$$\Rightarrow J_R = \int_{-R}^{R} \frac{dx}{x^4+1} \Rightarrow \lim_{R\to+\infty} I_R = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1}$$

- Soit $R > 2$. La fonction $f(z) = \dfrac{1}{z^4+1}$ admet 4 pôles simples :

$$z_1 = \frac{1+i}{\sqrt{2}},\quad z_2 = \frac{-1+i}{\sqrt{2}},\quad z_3 = \frac{-1-i}{\sqrt{2}} \text{ et } z_4 = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$$

Seuls les deux pôles z_1 et z_2 sont à l'intérieur de γ_R.
Et alors, d'après le théorème des Résidus de Cauchy, on a :

$$I_R = \int_{\gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i\left[\operatorname{Res}(f, z_1) + \operatorname{Res}(f, z_2)\right].$$

$$\operatorname{Res}(f, z_1) = \frac{1}{\frac{d}{dz}(z^4+1)\Big|_{z=z_1}} = \frac{1}{4z_1^3} = \frac{-1-i}{4\sqrt{2}}.$$

$$\operatorname{Res}(f, z_2) = \frac{1}{\frac{d}{dz}(z^4+1)\Big|_{z=z_2}} = \frac{1}{4z_2^3} = \frac{1-i}{4\sqrt{2}}.$$

Donc : $$I_R = 2\pi i\left(\frac{-1-i}{4\sqrt{2}} + \frac{1-i}{4\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

• Montrons que : $\lim\limits_{R\to+\infty} K_R = 0$.

$\forall z \in \sigma_R$, on a $|z| = R$, et alors on a :

$$|f(z)| = \left|\frac{1}{z^4+1}\right| \leq \frac{1}{R^4-1} \Rightarrow \sup_{z\in\sigma_R} |f(z)| \leq \frac{1}{R^4-1}.$$

$$|K_R| = \left|\int_{\sigma_R} f(z)\,dz\right| \leq L(\sigma_R).\sup_{z\in\sigma_R} |f(z)|$$

$$\leq \pi R\,\frac{1}{R^4-1} \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0$$

Donc : $\lim\limits_{R \to +\infty} K_R = 0$

En faisant tendre R vers $+\infty$ dans (*), on aura :

$$\frac{\pi}{\sqrt{2}} = \lim_{R \to +\infty} J_R + \lim_{R \to +\infty} K_R$$

Donc : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

2) $\displaystyle I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3}$.

. L'intégrale généralisée est convergente, et alors on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3} = V_p \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3} = \lim_{R \to +\infty} \int_{-R}^{R} \frac{dx}{(x^2+1)^3}.$$

Posons : $\displaystyle f(z) := \frac{1}{(z^2+1)^3}$.

Pour tout $R > 0$, considérons $\gamma_R = [-R,R] \vee \sigma_R$ le lacet donné dans 1). On a :

$$I_R := \int_{\gamma_R} f(z)\, dz = \int_{[-R,R]} f(z)\, dz + \int_{\sigma_R} f(z)\, dz := J_R + K_R \quad (*)$$

• Sur $[-R,R]$, on a $z=x$ et $dz=dx$, et alors on a :

$$J_R=\int_{-R}^{R}\frac{dx}{(x^2+1)^3}$$

• Calculons I_R par le théorème des Résidus de Cauchy.

Soit $R>2$. La fonction $f(z)=\dfrac{1}{(z^2+1)^3}$ admet deux pôles d'ordre 3 qui sont : $-i$ et i.

Seul le pôle i est à l'intérieur de γ_R ; et alors, d'après le théorème des Résidus de Cauchy, on a :

$$I_R := \int_{\gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i \,\mathrm{Res}(f,i)$$

$$\mathrm{Res}(f,i)=\frac{1}{(3-1)!}\lim_{z\to i}\frac{d^2}{dz^2}\left[(z-i)^3 f(z)\right]$$

$$=\frac{6}{(i+i)^5}=\frac{6}{32i}=\frac{3}{16i}.$$

$$\Rightarrow I_R=\frac{3\pi}{8}.$$

• Montrons que : $\lim\limits_{R\to+\infty} K_R=0$.

$\forall z\in\sigma_R$, $|z|=R$, et alors on a :

$$|f(z)|=\left|\frac{1}{(z^2+1)^3}\right|\leq\frac{1}{(R^2-1)^3}\Rightarrow \sup_{z\in\sigma_R}|f(z)|\leq\frac{1}{(R^2-1)^3}.$$

Donc, $|K_R| = \left|\int_{\sigma_R} f(z)\,dz\right| \leq L(\sigma_R) \cdot \sup_{z\in\sigma_R} |f(z)|$

$$\leq \pi R \frac{1}{(R^2-1)^3} \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0$$

$$\Rightarrow \lim_{R\to+\infty} K_R = 0.$$

En faisant tendre R vers $+\infty$ dans $(*)$, on aura :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3} = \frac{3\pi}{8}.$$

3) $I_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^{n+1}} \quad (n \in \mathbb{N}).$

• Il est évident que l'intégrale généralisée converge.

Et alors, $I_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^{n+1}} = V_p \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^{n+1}} = \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} \frac{dx}{(x^2+1)^{n+1}}$

Posons : $f(z) := \frac{1}{(z^2+1)^{n+1}}.$

Pour tout $R>0$, considérons le lacet $\gamma_R := [-R,R] \vee \sigma_R$ donné dans 1). Alors, on a :

$$I_R := \int_{\gamma_R} f(z)\,dz = \int_{[-R,R]} f(z)\,dz + \int_{\sigma_R} f(z)\,dz := J_R + K_R \quad (*)$$

• Sur $[-R,R]$, $z = x$ et $dz = dx$, et alors on a :

$$J_R = \int_{-R}^{R} \frac{dx}{(x^2+1)^{n+1}}.$$

• Pour tout $R > 2$, la fonction $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^{n+1}}$ admet deux pôles $-i$ et i qui sont d'ordre $(n+1)$. Et seul le pôle i est intérieur à γ_R.

Donc, d'après le théorème des Résidus de Cauchy, on a :

$$I_R := \int_{\gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f,i).$$

$$\operatorname{Res}(f,i) = \frac{1}{n!} \lim_{z\to i} \frac{d^n}{dz^n}\left[(z-i)^{n+1} f(z)\right]$$

Posons : $g(z) := (z-i)^{n+1} f(z) = \frac{1}{(z+i)^{n+1}}$

Alors, on a : $\operatorname{Res}(f,i) = \frac{1}{n!}\, g^{(n)}(z)\Big|_{z=i}$

$$\Rightarrow \operatorname{Res}(f,i) = \frac{1}{n!} \frac{(-1)^n (n+1)(n+2)\cdots\cdots 2n}{(z+i)^{2n+1}}\Bigg|_{z=i}$$

$$= \frac{1}{n!} \frac{(-1)^n (2n)!}{n!} \frac{1}{2^{2n+1} \cdot i^{2n+1}}$$

$\Rightarrow \operatorname{Res}(f,i) = \dfrac{1}{n!} \dfrac{-i(2n)!}{2^{2n+1} \cdot n!}$

Donc : $I_R = 2\pi i \dfrac{1}{n!} \dfrac{-i(2n)!}{2^{2n+1} \cdot n!} = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \pi$

. Montrons que : $\lim\limits_{R \to +\infty} K_R = 0$

$\forall z \in \sigma_R$, $|z| = R$, et on a :

$|f(z)| = \left| \dfrac{1}{(z^2+1)^{n+1}} \right| \leq \dfrac{1}{(R^2-1)^{n+1}} \Rightarrow \sup\limits_{z \in \sigma_R} |f(z)| \leq \dfrac{1}{(R^2-1)^{n+1}}$

$|K_R| = \left| \int_{\sigma_R} f(z)\, dz \right| \leq L(\sigma_R) \sup\limits_{z \in \sigma_R} |f(z)| \leq \pi R \dfrac{1}{(R^2-1)^{n+1}} \xrightarrow[R \to +\infty]{} 0$

Donc : $\lim\limits_{R \to +\infty} K_R = 0$

En faisant tendre R vers $+\infty$ dans (*), on aura :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^{n+1}} = \frac{(2n)!}{2^{2n} \cdot (n!)^2} \pi .$$

<u>Exercice 29</u>. 1) $I_1 = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{e^{bx}+1}\, dx$.

. D'abord l'intégrale généralisée est convergente :

* en $+\infty$ puisque $a < b$.
* en $-\infty$ car $\dfrac{e^{ax}}{e^{bx}+1} \leqslant e^{ax}$.

Posons : $f(z) := \dfrac{e^{az}}{e^{bz}+1}$.

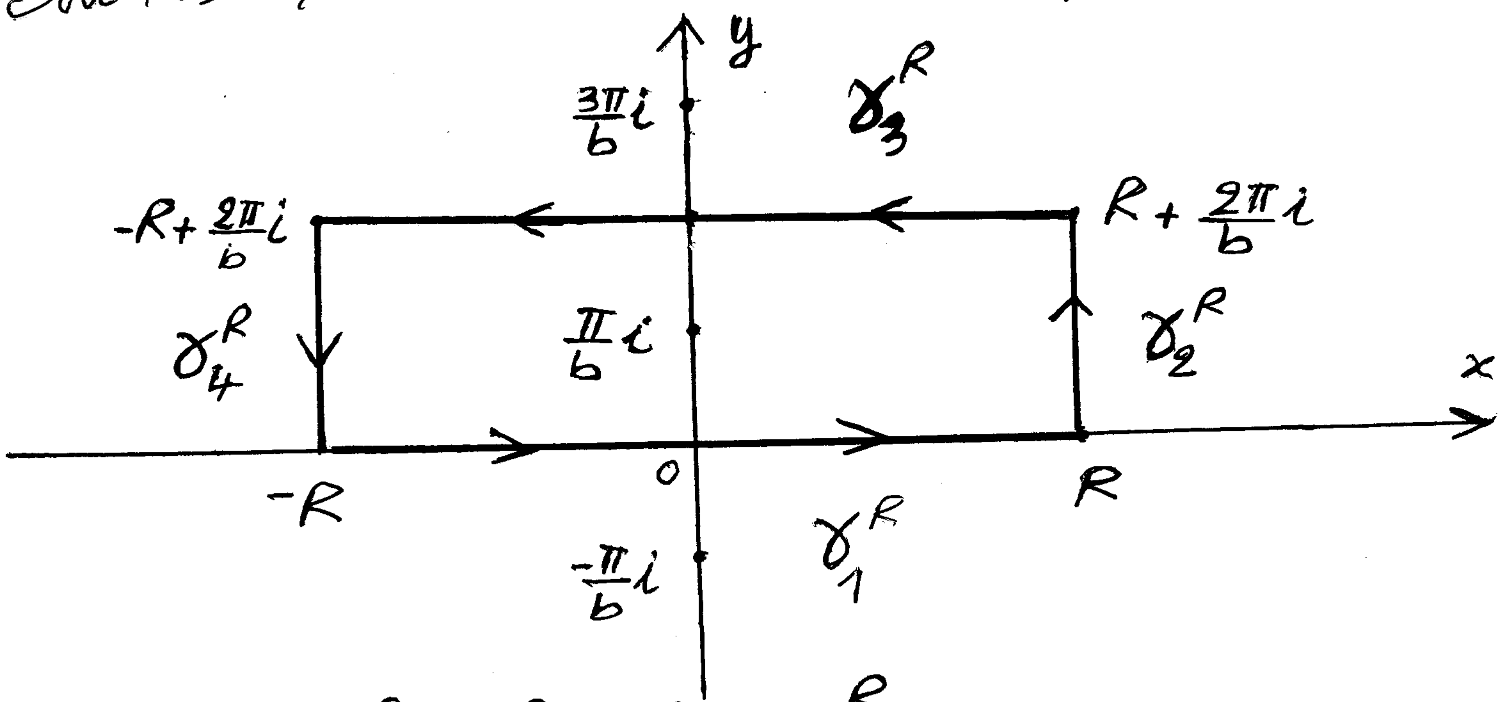
Les pôles de f sont les racines de l'équation :

$$e^{bz}+1=0 \iff e^{bz}=-1=e^{i\pi}$$
$$\iff bz = i\pi + 2k\pi i \quad (k\in\mathbb{Z})$$
$$\iff z = (2k+1)\frac{\pi}{b}i \quad (k\in\mathbb{Z})$$

Donc, f admet une infinité de pôles :

$$z_k = (2k+1)\frac{\pi}{b}i \quad (k\in\mathbb{Z}).$$

• Soit $R>1$, et considérons le lacet γ_R suivant :



$\gamma_R := \gamma_1^R \vee \gamma_2^R \vee \gamma_3^R \vee \gamma_4^R$. Et alors, on a :

$$I_R := \int_{\gamma_R} f(z)\,dz = \underbrace{\int_{\gamma_1^R} f(z)\,dz}_{I_1^R} + \underbrace{\int_{\gamma_2^R} f(z)\,dz}_{I_2^R} + \underbrace{\int_{\gamma_3^R} f(z)\,dz}_{I_3^R} + \underbrace{\int_{\gamma_4^R} f(z)\,dz}_{I_4^R}$$

$$\Rightarrow I_R = I_1^R + I_2^R + I_3^R + I_4^R \quad (*)$$

• Sur γ_1^R, $z = x$ et $dz = dx$, et alors on a :

$$I_1^R = \int_{\gamma_1^R} f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} f(x)\,dx \Rightarrow \lim_{R\to+\infty} I_1^R = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$$

• Sur γ_3^R, on a $z = x + \frac{2\pi}{b} i$ où x varie de R à $-R$.

$dz = dx$, et comme e^z est $2\pi i$-périodique, on a :

$$I_3^R = \int_{\gamma_3^R} f(z)\,dz = \int_{R}^{-R} \frac{e^{ax + a\frac{2\pi}{b} i}}{e^{bx + b\frac{2\pi}{b} i} + 1}\,dx$$

$$= -e^{\frac{2a\pi}{b} i} \int_{-R}^{R} \frac{e^{ax}}{e^{bx}+1}\,dx = -e^{\frac{2a\pi}{b} i} I_1^R$$

$$\Rightarrow \lim_{R\to+\infty} I_3^R = -e^{\frac{2a\pi}{b} i} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$$

• Sur γ_2^R, on a $z = R + yi$ où y varie de 0 à $\frac{2\pi}{b}$.

$$|e^{bz}| = |e^{bR} e^{iby}| = e^{bR}$$

$$|e^{bz}+1| \geq |e^{bz}| - 1 = e^{bR} - 1$$

$$\Rightarrow |f(z)| = \frac{|e^{az}|}{|e^{bz}+1|} \leq \frac{e^{aR}}{e^{bR}-1}$$

Donc : $\sup_{z \in \gamma_2^R} |f(z)| \leq \frac{e^{aR}}{e^{bR}-1}$. Et alors, on a :

$$|I_2^R| = \left| \int_{\gamma_2^R} f(z)\, dz \right| \leq L(\gamma_2^R) \sup_{z \in \gamma_2^R} |f(z)|$$

$$\leq \frac{2\pi}{b} \frac{e^{aR}}{e^{bR}-1} \xrightarrow[R \to +\infty]{} 0 \quad (b>a)$$

Donc : $\lim_{R \to +\infty} I_2^R = 0$.

- De la même façon, on montre que :

$$\lim_{R \to +\infty} I_4^R = 0$$

- D'autre part, le seul pôle de f à l'intérieur de γ_R est $z_0 = \frac{\pi}{b} i$. Et alors, d'après le théorème des Résidus de Cauchy, on a :

$$I_R = \int_{\gamma_R} f(z)\, dz = 2\pi i \operatorname{Res}\left(f, \frac{\pi}{b} i\right).$$

Et comme $z_0 = \frac{\pi}{b} i$ est un pôle simple de f, on a :

$$\operatorname{Res}\left(f, \frac{\pi}{b} i\right) = \frac{e^{az}\big|_{z=\frac{\pi}{b}i}}{\frac{d}{dz}(e^{bz}+1)\big|_{z=\frac{\pi}{b}i}} = -\frac{e^{\frac{a}{b}\pi i}}{b}.$$

$$\Rightarrow I_R = \frac{-2\pi i}{b} e^{\frac{a}{b}\pi i}.$$

En faisant tendre R vers $+\infty$ dans $(*)$, on aura :

$$-\frac{2\pi i}{b} e^{\frac{a}{b}\pi i} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx - e^{\frac{2a\pi}{b}i}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \frac{\frac{2\pi i}{b} e^{\frac{a}{b}\pi i}}{e^{\frac{2a\pi}{b}i} - 1} = \frac{2\pi i}{b} \frac{1}{e^{i\frac{a}{b}\pi} - e^{-i\frac{a}{b}\pi}}$$

$$= \frac{2\pi i}{b} \frac{1}{2i\sin\left(\frac{a}{b}\pi\right)}$$

Donc : $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{e^{bx}+1}\,dx = \frac{\pi}{b\sin\left(\frac{a}{b}\pi\right)}.$$

2) $I_2 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{(x+1)^2}\,dx \qquad (-1 < \alpha < 1).$

D'abord, il est évident que l'intégrale généralisée converge.

Posons : $x := e^t$, $dx = e^t\,dt$. Et alors, on a :

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\alpha t}}{(e^t+1)^2} e^t\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{(\alpha+1)t}}{(e^t+1)^2}\,dt.$$

Posons : $f(z) := \dfrac{e^{(\alpha+1)z}}{(e^z+1)^2}.$

Les pôles de f sont les racines de l'équation :

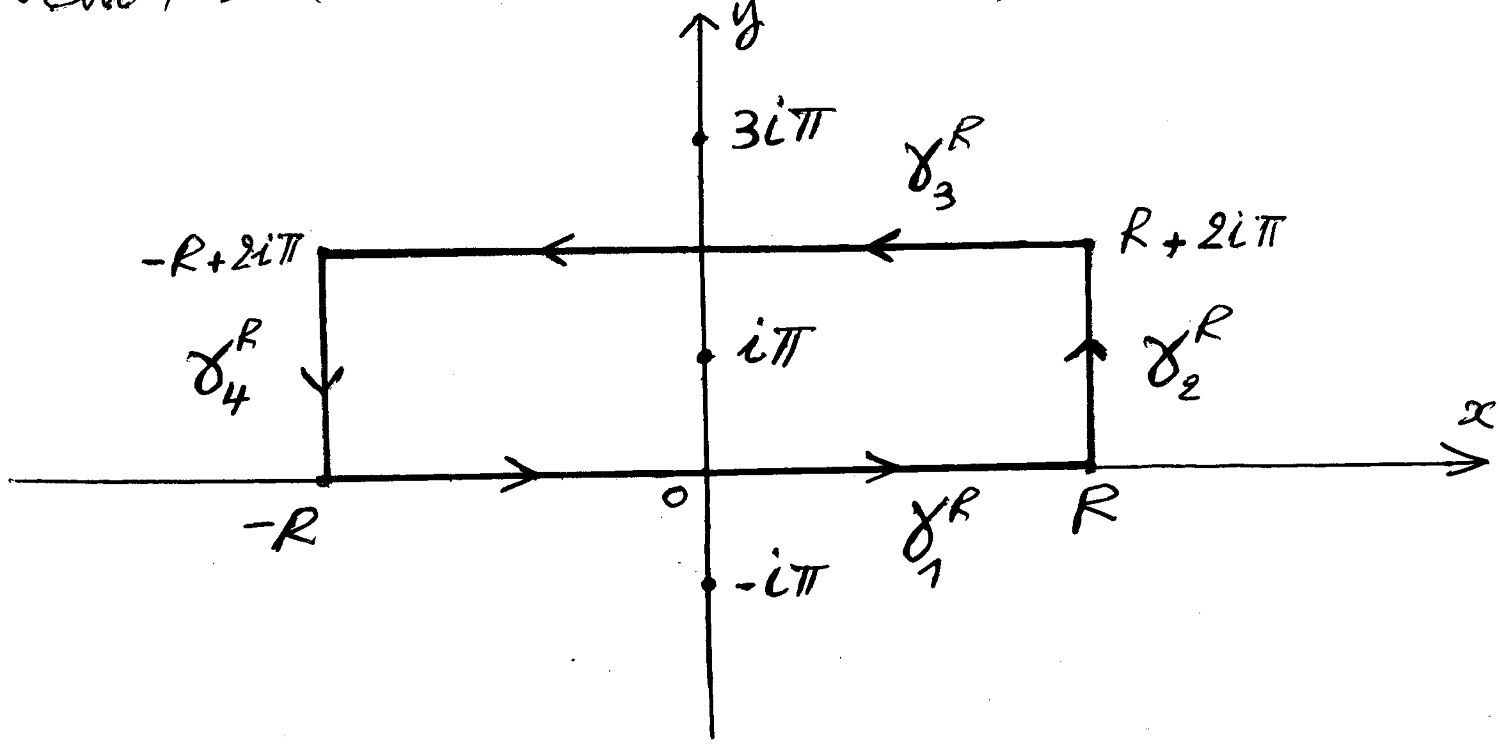
$$e^{z}+1=0 \iff e^{z}=-1=e^{i\pi} \iff z=i\pi+2k\pi i \quad (k\in\mathbb{Z})$$

Donc, f admet une infinité de pôles :

$$z_k := i\pi + 2k\pi i \quad (k\in\mathbb{Z})$$

Tous les pôles sont d'ordre 2.

• Soit $R>1$, et considérons le lacet γ_R suivant :



$\gamma_R := \gamma_1^R \vee \gamma_2^R \vee \gamma_3^R \vee \gamma_3^R$. Et alors, on a :

$$I_R := \int_{\gamma_R} f(z)\,dz = \underbrace{\int_{\gamma_1^R} f(z)\,dz}_{I_1^R} + \underbrace{\int_{\gamma_2^R} f(z)\,dz}_{I_2^R} + \underbrace{\int_{\gamma_3^R} f(z)\,dz}_{I_3^R} + \underbrace{\int_{\gamma_3^R} f(z)\,dz}_{I_3^R}$$

$$\Rightarrow I_R = I_1^R + I_2^R + I_3^R + I_4^R \quad (*)$$

• Sur γ_1^R, $z = x$ et $dz = dx$, et alors on a :

$$I_1^R = \int_{\gamma_1^R} f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} f(x)\,dx \Rightarrow \lim_{R\to+\infty} I_1^R = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

• Sur γ_3^R, $z = x + 2i\pi$, où x varie de R à $-R$, donc :

$$I_3^R = \int_{R}^{-R} \frac{e^{(\alpha+1)(x+2i\pi)}}{\left(e^{x+2i\pi}+1\right)^2}\,dx = -e^{i2(\alpha+1)\pi}\int_{-R}^{R} \frac{e^{(\alpha+1)x}}{\left(e^{x}+1\right)^2}\,dx$$

$$\Rightarrow \lim_{R\to+\infty} I_3^R = -e^{i2(\alpha+1)\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

• Sur γ_2^R, $z = R + yi$, où y varie de 0 à 2π.

$$\left|(e^z+1)^2\right| \geq \left(|e^z|-1\right)^2 = \left(e^R-1\right)^2$$

$$\Rightarrow |f(z)| = \frac{\left|e^{(\alpha+1)z}\right|}{|e^z+1|^2} \leq \frac{e^{(\alpha+1)R}}{(e^R-1)^2}$$

Donc, $$\sup_{z\in\gamma_2^R} |f(z)| \leq \frac{e^{(\alpha+1)R}}{(e^R-1)^2}.$$

Et alors, on a :

$$|I_2^R| = \left|\int_{\gamma_2^R} f(z)\,dz\right| \leq L(\gamma_2^R)\cdot \sup_{z\in\gamma_2^R}|f(z)|$$

$$\Rightarrow |I_2^R| \leq 2\pi \frac{e^{(\alpha+1)R}}{(e^R-1)^2} \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0 \quad (\alpha \in]-1,1[)$$

Donc : $\lim\limits_{R \to +\infty} I_2^R = 0$.

- De la même on montre que : $\lim\limits_{R \to +\infty} I_4^R = 0$.
- D'autre part, le seul pôle de f à l'intérieur de γ_R est $z_0 = i\pi$. Et alors, d'après le théorème des résidus de Cauchy, on a : $I_R = \int_{\gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i \, \mathrm{Res}(f, i\pi)$

Et comme $z_0 = i\pi$ est un pôle **double** de f, on a :

$$\mathrm{Res}(f, i\pi) = \lim_{z \to i\pi} \frac{d}{dz}\left[(z - i\pi)^2 f(z)\right]$$

Soit $g(z) := (z - i\pi)^2 f(z) = \dfrac{e^{(\alpha+1)z}(z - \pi i)^2}{(e^z + 1)^2}$

$$g'(z) = \frac{(\alpha+1)e^{(\alpha+1)z}}{\left(\frac{e^z+1}{z-\pi i}\right)^2} - \frac{2e^{(\alpha+1)z}\left(\frac{e^z+1}{z-\pi i}\right)'}{\left(\frac{e^z+1}{z-\pi i}\right)^3}$$

$$\Rightarrow \lim_{z \to \pi i} g'(z) = (\alpha+1)e^{i\pi(\alpha+1)} - 2\,\frac{1}{2}\,e^{i\pi(\alpha+1)}$$
$$= \alpha e^{i\pi(\alpha+1)} \qquad \left(\lim_{z \to \pi i} \left(\frac{e^z+1}{z-\pi i}\right)' = \frac{1}{2} \right)$$

$$\Rightarrow \mathrm{Res}(f, i\pi) = \alpha e^{i\pi(\alpha+1)}$$

$$\Rightarrow I_R = 2\pi i \alpha e^{i\pi(\alpha+1)}$$

En faisant tendre R vers $+\infty$ dans $(*)$, on aura :

$$2\pi i\alpha\, e^{i\pi(\alpha+1)} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx - e^{i2(\alpha+1)\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \frac{2\pi i\alpha\, e^{i\pi(\alpha+1)}}{1-e^{2i\pi(\alpha+1)}}$$

$$= -2\pi i\alpha\,\frac{1}{e^{i\pi(\alpha+1)}-e^{-i\pi(\alpha+1)}}$$

$$= -2\pi i\alpha\,\frac{1}{2i\sin(\alpha+1)\pi}$$

Donc : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{(\alpha+1)x}}{(e^x+1)^2}\,dx = \frac{\pi\alpha}{\sin(\pi\alpha)}$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty}\frac{x^\alpha}{(x+1)^2}\,dx = \frac{\pi\alpha}{\sin(\pi\alpha)}.$$

3) $\displaystyle I_3 = \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{Log}(ax)}{x^2+b^2}\,dx \qquad (a,b>0)$

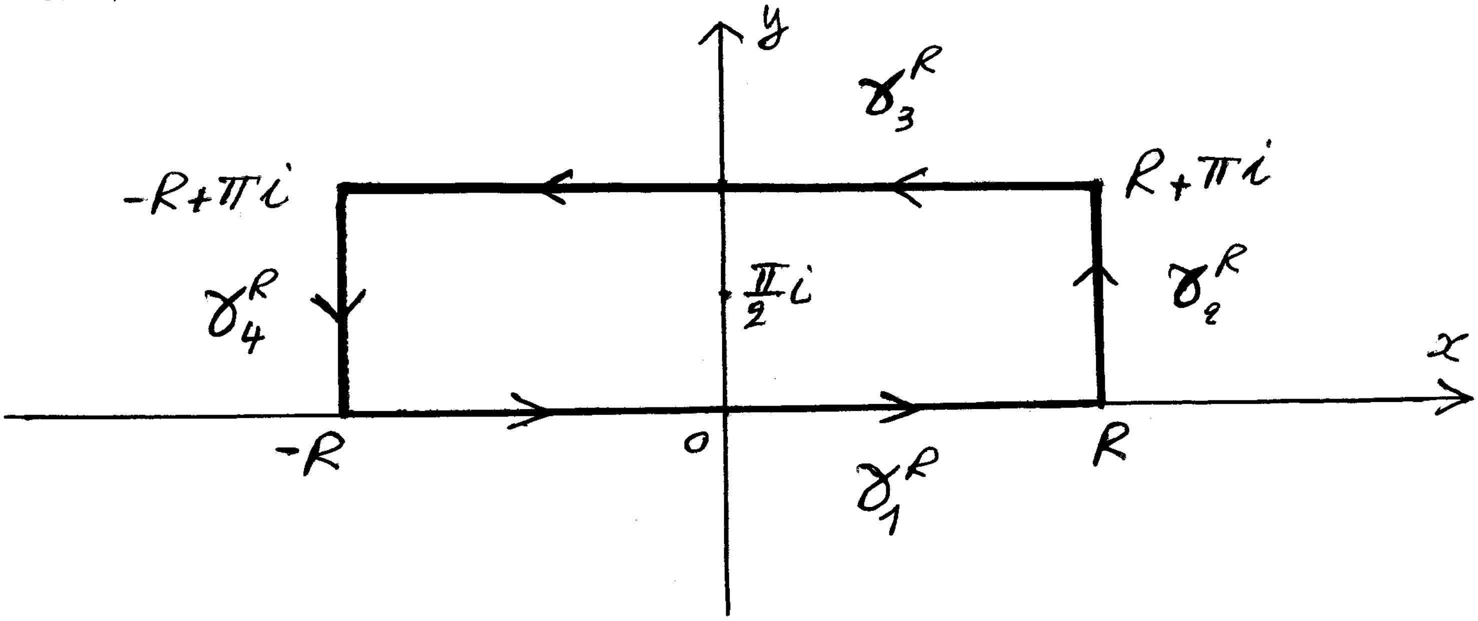
On vérifie facilement que l'intégrale généralisée converge.

Posons : $ax = e^t \Rightarrow a\,dx = e^t\,dt$. Et alors, on a :

$$I_3 = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{\frac{e^{2t}}{a^2}+b^2}\, e^t\, dt = a\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t\, e^t}{e^{2t}+a^2b^2}\, dt$$

Posons : $f(z) := \dfrac{z\, e^z}{e^{2z}+a^2b^2}$.

Pour tout $R>0$, considérons le lacet γ_R suivant :



$\gamma_R := \gamma_1^R \vee \gamma_2^R \vee \gamma_3^R \vee \gamma_4^R$. Et alors, on a :

$$I_R := \int_{\gamma_R} f(z)\, dz = \underbrace{\int_{\gamma_1^R} f(z)\, dz}_{I_1^R} + \underbrace{\int_{\gamma_2^R} f(z)\, dz}_{I_2^R} + \underbrace{\int_{\gamma_3^R} f(z)\, dz}_{I_3^R} + \underbrace{\int_{\gamma_4^R} f(z)\, dz}_{I_4^R}$$

$$\Rightarrow I_R = I_1^R + I_2^R + I_3^R + I_4^R \quad (*)$$

• Sur γ_1^R, $z = x$ et $dz = dx$, et alors on a :

$$I_1^R = \int_{-R}^{R} f(x)\, dx \Rightarrow \lim_{R\to+\infty} I_1^R = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx.$$

• Sur γ_3^R, $z = x + i\pi$ (x varie de R à $-R$) et $dz = dx$,

Donc, $$I_3^R = \int_R^{-R} \frac{(x+\pi i)e^{x+\pi i}}{e^{2(x+\pi i)} + a^2b^2}\,dx = -\int_{-R}^{R} \frac{(x+\pi i)\,e^x(-1)}{e^{2x} + a^2b^2}\,dx$$

$$= \int_{-R}^{R} \frac{x e^x}{e^{2x}+a^2b^2}\,dx + i\pi \underbrace{\int_{-R}^{R} \frac{e^x}{e^{2x}+a^2b^2}\,dx}_{J_R}$$

$$\Rightarrow \lim_{R\to+\infty} I_3^R = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx + i\pi \lim_{R\to+\infty} J_R$$

• Sur γ_2^R, $z = R + yi$ (y varie de 0 à π), et alors on a :

$$|f(z)| = \left|\frac{z e^z}{e^{2z}+a^2b^2}\right| = |z|\left|\frac{e^z}{e^{2z}+a^2b^2}\right| \leq (R+\pi)\frac{e^R}{e^{2R}-a^2b^2}$$

$$\Rightarrow \sup_{z\in\gamma_2^R} |f(z)| \leq \frac{e^R(R+\pi)}{e^{2R}-a^2b^2}.$$ Et donc on a :

$$|I_2^R| = \left|\int_{\gamma_2^R} f(z)\,dz\right| \leq L(\gamma_2^R)\cdot \sup_{z\in\gamma_2^R}|f(z)|$$

$$\leq \pi \frac{e^R(R+\pi)}{e^{2R}-a^2b^2} \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0$$

Donc : $$\lim_{R\to+\infty} I_2^R = 0.$$

• De la même façon, on montre que : $\lim_{R\to+\infty} I_4^R = 0$.

• D'autre part, les pôles de la fonction $f(z) = \dfrac{z e^z}{e^{2z}+a^2b^2}$ sont les racines de l'équation :

$$e^{2z}+a^2b^2 = 0 \iff e^{2z} = e^{2\operatorname{Log}(ab)+i\pi}$$

$$\iff 2z = 2\operatorname{Log}(ab) + i\pi + 2k\pi i \quad (k\in\mathbb{Z})$$

$$\iff z = \operatorname{Log}(ab) + i(2k+1)\frac{\pi}{2} \quad (k\in\mathbb{Z}).$$

Donc, les pôles de f sont :

$$z_k := \operatorname{Log}(ab) + i(2k+1)\frac{\pi}{2} \quad (k\in\mathbb{Z}).$$

Et ils sont tous des pôles simples.

Le seul pôle de f à l'intérieur de γ_R est :

$$z_0 = \operatorname{Log}(ab) + \frac{\pi}{2}i.$$

Et alors, d'après le théorème des Résidus de Cauchy, on a :

$$I_R = \int_{\gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, z_0).$$

$$\operatorname{Res}(f,z_0) = \frac{z e^z\big|_{z=z_0}}{\frac{d}{dz}\left(e^{2z}+a^2b^2\right)\Big|_{z=z_0}} = \frac{1}{2bi}\left[\operatorname{Log}(ab) + \frac{\pi}{2}i\right].$$

$$\Rightarrow I_R = \frac{\pi}{b}\left[\operatorname{Log}(ab) + \frac{\pi}{2}i\right]$$

En faisant tendre R vers $+\infty$ dans (*), on aura :

$$\frac{\pi}{b}\left(\log(ab)+\frac{\pi}{2}i\right)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx+\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx+i\pi\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^x}{e^{2x}+a^2b^2}\,dx$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{xe^x}{e^{2x}+a^2b^2}\,dx=\frac{\pi}{2b}\operatorname{Log}(ab). \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^x}{e^{2x}+a^2b^2}\,dx=\frac{\pi}{2b} \end{cases}$$

Donc : $$\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{Log}(ax)}{x^2+a^2b^2}\,dx=\frac{\pi a}{2b}\operatorname{Log}(ab).$$

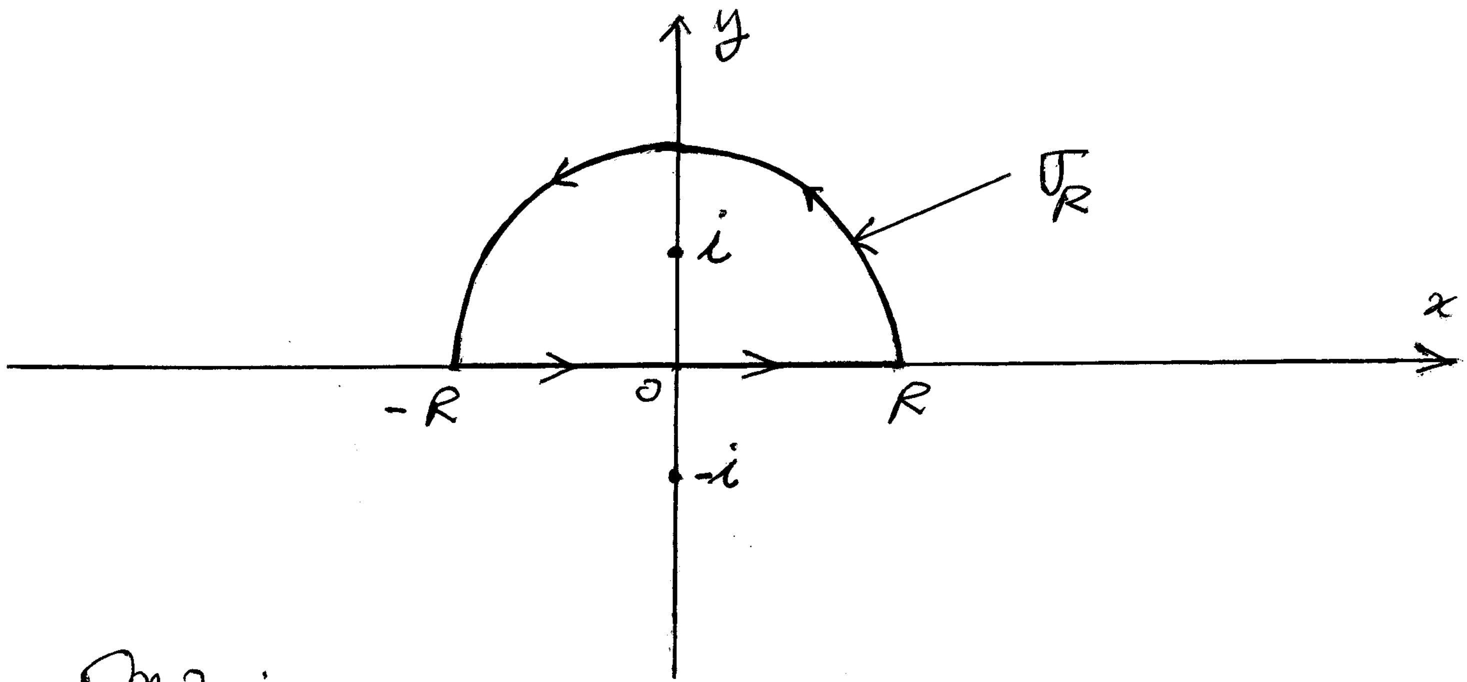
<u>Exercice 30.</u> 1) $$I_1=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(4x)}{x^2+1}\,dx$$

$$I_1=\operatorname{Re}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{4ix}}{x^2+1}\,dx\right).$$

Posons : $$f(z):=\frac{e^{4iz}}{z^2+1}.$$

Pour tout $R>0$, soit γ_R le lacet formé par le segment $[-R,R]$ et le demi-cercle supérieur σ_R de centre 0 et de rayon R, orienté dans le sens direct.

$$\gamma_R:=[-R,R]\vee\sigma_R.$$



On a :

$$I_R := \int_{\sigma_R} f(z)\,dz = \underbrace{\int_{[-R,R]} f(z)\,dz}_{I_1^R} + \underbrace{\int_{\sigma_R} f(z)\,dz}_{I_2^R}$$

$$\Rightarrow I_R = I_1^R + I_2^R \quad (*)$$

- Sur $[-R,R]$, $z = x$ et $dz = dx$; et alors on a :

$$I_2^R = \int_{-R}^{R} \frac{e^{4ix}}{x^2+1}\,dx \Rightarrow \lim_{R\to+\infty} I_1^R = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{4ix}}{x^2+1}\,dx$$

- Sur σ_R, $\forall z \in \sigma_R$, $\exists \theta \in [0,\pi]$ tel que : $z = R(\cos\theta + i\sin\theta)$

$$\Rightarrow |e^{4iz}| = |e^{4iR(\cos\theta + i\sin\theta)}| = e^{-4R\sin\theta} \leq 1$$

(car $\sin\theta \geq 0$)

Donc, $$|f(z)| = \frac{|e^{4iz}|}{|z^2+1|} \leq \frac{1}{|z|^2-1} = \frac{1}{R^2-1}$$

$\Rightarrow \sup\limits_{z\in\sigma_R} |f(z)| \leq \dfrac{1}{R^2-1}$. Et alors, on a :

$$|I_2^R| = \left|\int_{\sigma_R} f(z)\,dz\right| \leq L(\sigma_R)\cdot \sup_{z\in\sigma_R}|f(z)| \leq \frac{\pi R}{R^2-1} \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0$$

Donc : $\lim\limits_{R\to+\infty} I_2^R = 0$

<u>Remarque</u> : On peut aussi appliquer directement l'exercice 23 pour déduire que $\lim\limits_{R\to+\infty} I_2^R = 0$

- D'autre part, la fonction $f(z) = \dfrac{e^{4iz}}{z^2+1}$ a deux pôles simples $-i$ et i.

Et comme le seul pôle de f à l'intérieur de γ_R est i, d'après le théorème des Résidus de Cauchy, on a :

$$I_R = \int_{\gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i \,\text{Res}(f,i)$$

$$\text{Res}(f,i) = \lim_{z\to i}(z-i)f(z) = \frac{e^{4i(i)}}{i+i} = \frac{e^{-4}}{2i}.$$

Donc : $I_R = \pi e^{-4}$.

En faisant tendre R vers $+\infty$ dans $(*)$, on aura :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{4ix}}{x^2+1}\,dx = \pi e^{-4}.$$

$$\Rightarrow \quad Re\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{4ix}}{x^2+1}\,dx\right) = \pi e^{-4}.$$

Donc : $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(4x)}{x^2+1}\,dx = \pi e^{-4}.$$

<u>Remarque</u> : On peut aussi en déduire que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(4x)}{x^2+1}\,dx = 0 \quad \text{puisqu'on a :}$$

$$Im\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{4ix}}{x^2+1}\,dx\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(4x)}{x^2+1}\,dx.$$

Et cela est évident aussi puisque $\dfrac{\sin(4x)}{x^2+1}$ est une fonction impaire.

2) $$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2\cos(2x)}{(x^2+1)^2}\,dx$$

- D'abord l'intégrale généralisée est convergente puisqu'elle est absolument convergente :

$$\left|\frac{x^2\cos(2x)}{(x^2+1)^2}\right| \leqslant \frac{x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{(x^2+1)-1}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{(x^2+1)^2}$$

$$\leqslant \frac{1}{x^2+1}.$$ Et l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1}$ Converge.

- Comme la fonction $\dfrac{x^2\sin(2x)}{(x^2+1)^2}$ est impaire, on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 \sin(2x)}{(x^2+1)^2}\,dx = 0 \text{ , et par suite :}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 \cos(2x)}{(x^2+1)^2}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 e^{2ix}}{(x^2+1)^2}\,dx .$$

Posons alors : $f(z) := \dfrac{z^2 e^{2iz}}{(z^2+1)^2}$.

Pour tout $R > 1$, considérons le lacet γ_R de 1).

$\gamma_R := [-R,R] \vee \sigma_R$. Alors, on a :

$$I_R := \int_{\gamma_R} f(z)\,dz = \underbrace{\int_{[-R,R]} f(z)\,dz}_{I_1^R} + \underbrace{\int_{\sigma_R} f(z)\,dz}_{I_2^R} .$$

$$\Rightarrow \quad I_R = I_1^R + I_2^R \quad (*) .$$

- Sur $[-R,R]$, $z = x$ et $dz = dx$, et alors, on a :

$$I_1^R = \int_{-R}^{R} \frac{x^2 e^{2ix}}{(x^2+1)^2}\,dx \Rightarrow \lim_{R\to+\infty} I_1^R = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 e^{2ix}}{(x^2+1)^2}\,dx .$$

- Sur σ_R, pour tout $z \in \sigma_R$, il existe $\theta \in [0,\pi]$: $z = Re^{i\theta}$.

$$|f(z)| = \left| \frac{z^2 e^{2iz}}{(z^2+1)^2} \right| \leqslant \left| \frac{z^2}{(z^2+1)^2} \right| = \left| \frac{(z^2-1)+1}{(z^2+1)^2} \right|$$

$$\leq \left|\frac{1}{z^2+1}\right| + \left|\frac{1}{(z^2+1)^2}\right| \leq \frac{1}{R^2-1} + \frac{1}{(R^2-1)^2}$$

Donc, $\sup_{z\in \sigma_R} |f(z)| \leq \frac{1}{R^2-1} + \frac{1}{(R^2-1)^2}$. Et on a :

$$|I_2^R| = \left|\int_{\sigma_R} f(z)\,dz\right| \leq L(\sigma_R) \sup_{z\in\sigma_R} |f(z)| \leq \pi R\left(\frac{1}{R^2-1} + \frac{1}{(R^2-1)^2}\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{R\to+\infty} I_2^R = 0$$

(On peut aussi appliquer l'exercice 23).

• D'autre part, la fonction $f(z) = \frac{z^2 e^{2iz}}{(z^2+1)^2}$ a deux pôles $-i$ et i, et seul le pôle i est à l'intérieur de γ_R.

Donc, d'après le théorème des Résidus de Cauchy, on a :

$$I_R = \int_{\gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, i)$$

Et comme i est un pôle double de f, on a :

$$\operatorname{Res}(f,i) = \lim_{z\to i} \frac{d}{dz}\left[(z-i)^2 f(z)\right] = i\,\frac{e^{-2}}{4}.$$

Donc, $I_R = -\pi \frac{e^{-2}}{2}$.

En faisant tendre R vers $+\infty$ dans $(*)$, on aura :

$$-\pi \frac{e^{-2}}{2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 e^{2ix}}{(x^2+1)^2}\, dx$$

Donc : $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 \cos(2x)}{(x^2+1)^2}\, dx = -\frac{\pi e^{-2}}{2}.$$

3) $$I_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos(\pi x)}{x^2+x+9}\, dx \;;\; I_4 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin(\pi x)}{x^2+x+9}\, dx.$$

- Il est clair que les intégrales généralisées convergent.
- $x^2+x+9=0 \iff x = \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{35}}{2} i$ ou $x = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{35}}{2} i$.

Donc, on n'a pas de racines sur l'axe réel.

Et alors, on va appliquer le lemme de **Jordan**.

Posons : $$f(z) := \frac{z}{z^2+z+9}$$

Pour tout $R>0$, soit γ_R le lacet de 1) :

$$\gamma_R := [-R, R] \vee \sigma_R.$$

D'après le cours (Corollaire V. 4.4), on a :

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{\sigma_R} f(z) e^{i\pi z}\, dz = 0$$

- La fonction $f(z)e^{i\pi z}$ a deux pôles :

$z_1 := \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{35}}{2} i$ et $z_2 := \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{35}}{2} i$

Pour R assez grand, le seul pôle de $f(z)e^{i\pi z}$ à l'intérieur de γ_R est z_2. Et alors, d'après le théorème des Résidus de Cauchy, on a :

$$\int_{\gamma_R} f(z)e^{i\pi z}\,dz = 2\pi i \,\mathrm{Res}\left(f(z)e^{i\pi z}, z_2\right)$$

Et comme le pôle z_2 est simple, on a :

$$\mathrm{Res}\left(f(z)e^{i\pi z}, z_2\right) = \left.\frac{z e^{i\pi z}}{\frac{d}{dz}\left(z^2+z+9\right)}\right|_{z=z_2}$$

$$= \frac{z_2\, e^{i\pi z_2}}{2z_2+1} = \frac{-\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{35}}{2}i\right)}{\sqrt{35}}\, e^{-\pi\frac{\sqrt{35}}{2}}$$

$$= -\frac{e^{-\pi\frac{\sqrt{35}}{2}}}{2\sqrt{35}} - \frac{e^{-\pi\frac{\sqrt{35}}{2}}}{2}\, i$$

Et alors, on a :

$$\int_{\gamma_R} f(z)e^{i\pi z}\,dz = 2\pi i\left[-\frac{e^{-\pi\frac{\sqrt{35}}{2}}}{2\sqrt{35}} - \frac{e^{-\pi\frac{\sqrt{35}}{2}}}{2}\, i\right]$$

$$= \pi e^{-\pi\frac{\sqrt{35}}{2}} + \pi\,\frac{e^{-\pi\frac{\sqrt{35}}{2}}}{\sqrt{35}}\, i$$

or $$\lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_R} f(z)e^{i\pi z}\,dz = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\cos(\pi x)}{x^2+x+9}\,dx + \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin(\pi x)}{x^2+x+9}\,dx\; i$$

Alors, on a :

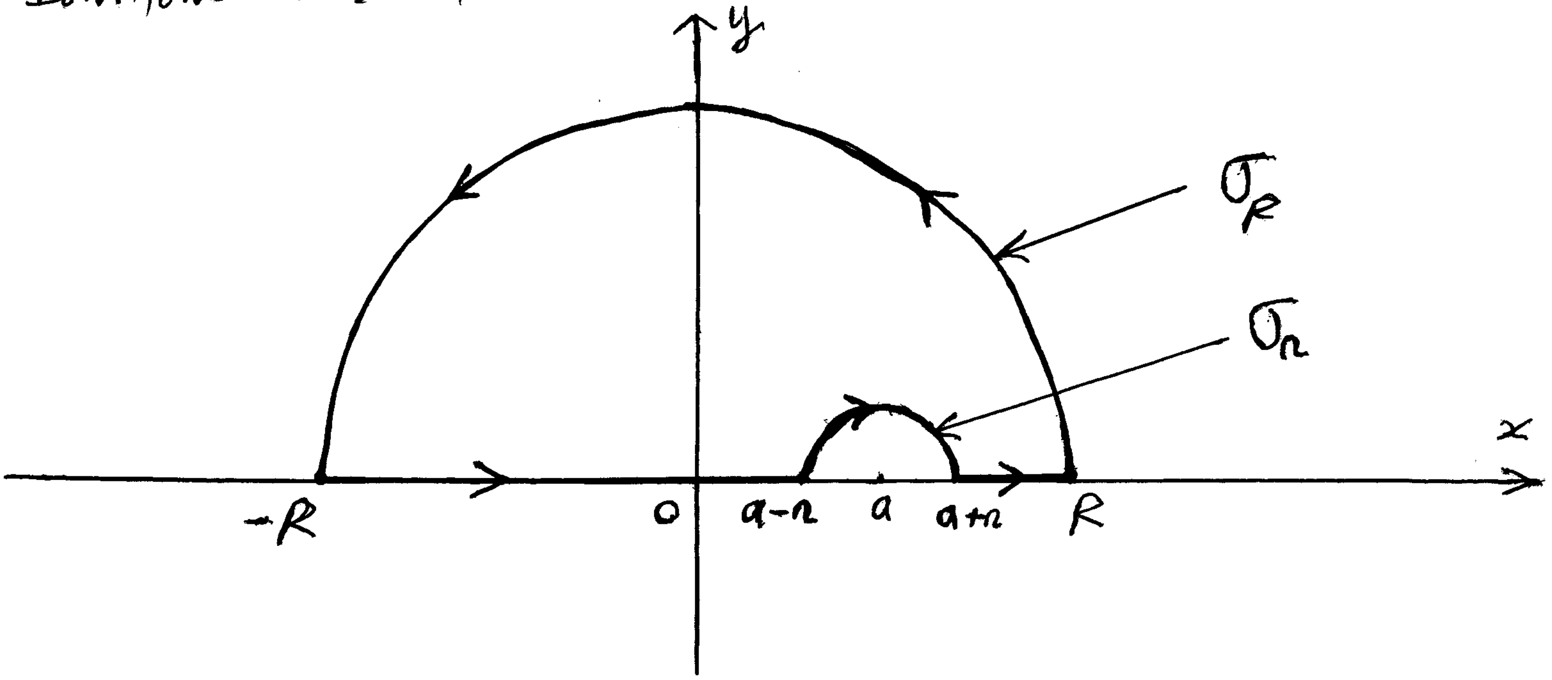
$$\begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos(\pi x)}{x^2+x+9}\,dx = \pi e^{-\pi\frac{\sqrt{35}}{2}} \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin(\pi x)}{x^2+x+9}\,dx = \pi\frac{e^{-\pi\frac{\sqrt{35}}{2}}}{\sqrt{35}} \end{cases}$$

<u>Exercice 31.</u> 1) $I_1 = \mathrm{Vp}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x-a}\,dx$

$$I_1 = \lim_{\substack{r\to 0^+\\ R\to+\infty}} \left[\int_{-R}^{a-r} \frac{\sin x}{x-a}\,dx + \int_{a+r}^{R} \frac{\sin x}{x-a}\,dx\right]$$

Posons : $f(z) := \dfrac{e^{iz}}{z-a}$.

Pour tous $r, R > 0$, considérons le lacet γ_{rR} suivant :



$$\gamma_{rR} := [-R, a-r] \vee \sigma_r \vee [a+r, R] \vee \sigma_R .$$

On remarque ici que σ_r est orienté dans le sens indirect.

Et alors on a :

$$I_{rR} := \int_{\gamma_{rR}} f(z)\,dz = \underbrace{\int_{[-R,a-r]} f(z)\,dz}_{I_1^{rR}} + \underbrace{\int_{\sigma_r} f(z)\,dz}_{I_2^{r}} + \underbrace{\int_{[a+r,R]} f(z)\,dz}_{I_3^{rR}} + \underbrace{\int_{\sigma_R} f(z)\,dz}_{I_4^{R}}$$

$$\Rightarrow I_{rR} = I_1^{rR} + I_2^{r} + I_3^{rR} + I_4^{R} \quad (*)$$

• Comme f est holomorphe sur γ_{rR} et sur son intérieur,

on a : $$I_{rR} = \int_{\gamma_{rR}} f(z)\,dz = 0 \qquad \forall r, R > 0 .$$

• D'après le lemme du chemin rétréci (Voir exercice 33),

on a : $$\lim_{r\to 0} I_2^{r} = \lim_{r \to 0} \int_{\sigma_r} \frac{e^{iz}}{z-a}\,dz = -i\pi e^{ia} .$$

(Notons que le signe $-$ est dû au fait que σ_r est orienté dans le sens indirect)

• D'après le lemme de Jordan, on a :

$$\lim_{R\to+\infty} I_4^R = \lim_{R\to+\infty} \int_{\sigma_R} \frac{e^{iz}}{z-a}\,dz = 0 .$$

En faisant tendre r vers 0 et R vers $+\infty$ dans $(*)$, on aura :

$$\lim_{\substack{r\to 0\\ R\to+\infty}} \left(I_1^{rR} + I_3^{rR} \right) + \lim_{r\to 0} I_2^r + \lim_{R\to+\infty} I_4^R = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{\substack{r\to 0\\ R\to+\infty}} \left(\int_{-R}^{a-r} \frac{e^{ix}}{x-a}\,dx + \int_{a+r}^{R} \frac{e^{ix}}{x-a}\,dx \right) = i\pi e^{ia}$$

$$\Rightarrow \lim_{\substack{r\to 0\\ R\to+\infty}} \left(\int_{-R}^{a-r} \frac{\cos x}{x-a}\,dx + \int_{a+r}^{R} \frac{\cos x}{x-a}\,dx \right) +$$

$$\lim_{\substack{r\to 0\\ R\to+\infty}} \left(\int_{-R}^{a-r} \frac{\sin x}{x-a}\,dx + \int_{a+r}^{R} \frac{\sin x}{x-a}\,dx \right) i = -\pi \sin a + \pi \cos a\, i$$

$$\Rightarrow \left(V_p \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x-a}\,dx \right) + \left(V_p \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x-a}\,dx \right) i = -\pi \sin a + \pi \cos a\, i$$

Et alors, on a :

$$\begin{cases} V_p \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x-a}\,dx = -\pi \sin a . \\ V_p \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x-a}\,dx = \pi \cos a . \end{cases}$$

En particulier, pour $a=0$, on a la formule intéressante suivante : $V_p\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx = \pi$.

2) $I_3 = V_p\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1-\cos x}{x^2}\,dx$

Posons : $f(z) := \frac{1-e^{iz}}{z^2}$.

Pour tous $r, R > 0$, Considérons le lacet γ_{rR} de 1), avec $a=0$.

f possède un unique pôle en 0. Au voisinage de 0, on a :

$$f(z) = \frac{1}{z^2}\left[1-\left(1+iz+\frac{1}{2!}(iz)^2+\cdots\right]\right.$$

$$= -i\frac{1}{z}+\frac{1}{2!}+\frac{i}{3!}z+\cdots$$

$$\Rightarrow \operatorname{Res}(f,0) = -i.$$

• D'après le résultat démontré dans l'exercice 34, on a : $\lim_{r\to 0^+}\int_{\sigma_r} f(z)\,dz = -i\pi\operatorname{Res}(f,0) = -\pi$

(ici σ_r est orienté dans le sens indirect, c'est pourquoi on fait le signe $-$)

• $\left|\int_{\sigma_R} f(z)\,dz\right| \leq L(\sigma_R)\cdot \sup_{z\in\sigma_R}|f(z)| = \frac{\pi R}{R^2}\sup_{z\in\sigma_R}|1-e^{iz}|$

or $|e^{iz}|\leq 1$ $\forall z\in\sigma_R$, donc $|1-e^{iz}|\leq 2$

$\Rightarrow \left|\int_{\sigma_R} f(z)\,dz\right| \leq \frac{2\pi}{R} \Rightarrow \lim_{R\to+\infty}\int_{\sigma_R} f(z)\,dz = 0$

. D'autre part, comme f est holomorphe sur γ_{rR} et sur son intérieur, on a : $\int_{\gamma_{rR}} f(z)\,dz = 0$

$\Rightarrow \int_{\sigma_R} f(z)\,dz + \int_{\sigma_r} f(z)\,dz + \int_{[-R,-r]} f(z)\,dz + \int_{[r,R]} f(z)\,dz = 0$

Et en faisant tendre r vers 0^+ et R vers $+\infty$, on aura :

$$-\pi + \lim_{\substack{r\to 0^+\\ R\to+\infty}}\left[\int_{-R}^{-r}\frac{1-e^{ix}}{x^2}\,dx + \int_{r}^{R}\frac{1-e^{ix}}{x^2}\,dx\right] = 0$$

$$\Rightarrow \left(V_p\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1-\cos x}{x^2}\,dx\right) + \left(V_p\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1-\sin x}{x^2}\,dx\right)i = \pi$$

Donc : $V_p\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1-\cos x}{x^2}\,dx = \pi$.