Série n°1 : Intégrale de Riemann.

Définition : Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est dite intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$ si,

$$\forall \varepsilon > 0; \exists \psi, \phi \in \mathcal{E}([a,b]\,;\mathbb{R}) \quad \text{telles que} \quad \phi \leq f \leq \psi \quad \text{et} \quad \int_a^b (\psi - \phi)\, dx \leq \varepsilon.$$

Où $\mathcal{E}([a,b]\,;\mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a, b]$.

Théorème : Une fonction bornée $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est Riemann- intégrable ssi

$$\mathcal{I}^-(f) = \mathcal{I}^+(f) := \int_a^b f(x)\ dx.$$

Où

$$\mathcal{I}^-(f) := \sup \left\{ \int_a^b \phi(x)\, dx \ / \ \phi \in \mathcal{E}([a,b]\,;\mathbb{R})\ ,\ \phi \leq f \quad \text{sur } [a,b] \right\}$$

et

$$\mathcal{I}^+(f) := \inf \left\{ \int_a^b \psi(x)\, dx \ / \ \psi \in \mathcal{E}([a,b]\,;\mathbb{R})\ ,\ \psi \geq f \quad \text{sur } [a,b] \right\}.$$

Exercice 1. Soit n un entier naturel non nul.

1. Montrer que la fonction $f : x \to E(\frac{1}{x})$ est en escalier sur $[\frac{1}{n}, 1]$.
2. Calculer $\int_{\frac{1}{n}}^1 f(x)dx$.

Exercice 2. Montrer qu'une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$ ssi,

$$\forall \varepsilon > 0; \exists \varphi, \mu \in \mathcal{E}([a,b]\,;\mathbb{R}) \quad \text{telles que} \quad |f(x) - \varphi(x)| \leq \mu(x) \quad \text{et} \quad \int_a^b \mu(x)\ dx \leq \varepsilon.$$

Exercice 3. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée.

1. Montrer que f est Riemann-intégrable sur $[a, b]$ si et seulement si

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\exists \psi_n, \phi_n \in \mathcal{E}([a,b]\,;\mathbb{R})) \quad \text{telles que} \quad \phi_n \leq f \leq \psi_n \quad \text{et} \quad \int_a^b (\psi_n - \phi_n)(x)dx < \frac{1}{n}.$$

2. Montrer que $\int_a^b f(x)\ dx = \lim_{n \to +\infty} \int_a^b \psi_n(x)\ dx = \lim_{n \to +\infty} \int_a^b \phi_n(x)\ dx.$

Exercice 4. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{p+q} & \text{si } x = \frac{p}{q} \text{ est irréductible} ; p, q \in \mathbb{N}^*, \\ 0 & \text{si } x = 0 \text{ ou si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Montrer que f est Riemann-intégrable sur $[0,1]$ et calculer son intégrale.

$$\left(\text{Ind : Prendre} \quad \psi(x) = \begin{cases} \varepsilon & \text{si } x \notin E_n \text{ ,} \\ f(x) & \text{si } x \in E_n, \end{cases} \text{avec} \quad E_n = \left\{ x \in \mathbb{Q} \cap [0,1]; \quad f(x) \geq \frac{1}{n} \right\} \right).$$

Exercice 5. (Application de l'inégalité de Schwarz)

1. Soit f et g deux fonctions intégrables sur $[0,1]$, on suppose en outre que $fg \geq 1$. Montrer que

$$\left(\int_a^b f(x)\, dx \right) \left(\int_a^b f(x)\, dx \right) \geq 1.$$

2. Étant donné a et b tels que $0 < a < b$. Montrer que

$$\int_a^b \frac{dx}{x} \leq \frac{(b-a)}{\sqrt{ab}}.$$

3. Soient $n \in \mathbb{N}^*, (\alpha_1, ..., \alpha_n, \beta_1, ..., \beta_n) \in \mathbb{R}^{2n})$, et soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Montrer que si $f$et g sont deux fonctions intégrables sur $[a,b]$, alors

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i + \int_a^b fg \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 + \int_a^b f^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i^2 + \int_a^b g^2 \right).$$

Exercice 6 : (Première formule de la moyenne)
Soit f une fonction continue au voisinage de 0. Montrer que

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^2} \int_0^x t f(t)\, dt = \frac{f(0)}{2} \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^2} \int_x^{2x} \frac{f(t)}{t}\, dt = f(0) \ln(2).$$

Exercice 7 : : (Lemme de Riemenn-Lebesgue)

1. Montrer que pour toute fonction en escalier $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, on a

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b f(x) \cos(nx)\, dx = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \to +\infty} \int_a^b f(x) \sin(nx)\, dx = 0.$$

2. En déduire le resultat pour toute fonction intégrable sur $[a,b]$.

Exercice 8 : (Sommes de Riemann)

1. Montrer que les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ et $g(x) = e^x$ sont intégrables sur tout intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ puis calculer les deux intégrales $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ et $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,dx$.
2. Calculer les limites des suites définies par le terme géneral suivant :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}\sqrt{\frac{k}{2n+k}}, \qquad v_n = \left(\prod_{k=1}^{n}(1+\frac{k^2}{n^2})\right)^{\frac{1}{n}}, \qquad w_n = \frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n} E(\sqrt{k}).$$

Exercice 9 :

1. En utilisant l'intégration par parties, calculer les intégrales suivantes :

$$A = \int_1^e \frac{\ln(t)}{t^2}\,dt, \qquad B = \int_0^\pi e^t\cos(2t)\,dt.$$

2. En utilisant l'intégration par changement de variable, déterminer les primitives suivantes :

$$E(x) = \int \frac{dx}{x(\ln^2(x)-4)}, \quad F(x) = \int \frac{\sin(x)\,dx}{(\cos^2 x + 2\cos x + 5)^2}, \quad G(x) = \int \frac{e^{3x}+6e^{2x}-e^x}{(e^x-3)^2(e^x-1)}\,dx.$$

Exercice 10 : (Intégrale de Wallis)

Soit $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$ et $J_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx$

1. Montrer que $I_n = J_n$.
2. Établir une relation de récurrence entre I_n et I_{n+2}.
3. En déduire I_{2p} et I_{2p+1}.
4. Montrer que $(n+1)I_{n+1}I_n = \dfrac{\pi}{2}$ pour tout entier n.
5. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{I_{n+1}}{I_n} = 1$. En déduire qu'au voisinage de l'infini $I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$

Exercice 11 : On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^4+t^2}}\,dt$.

1. Montrer que f est bien définie et impaire.
2. Montrer que $0 \le f(x) \le \dfrac{1}{2x}$, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ et en déduire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
3. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, calculer sa dérivée et en déduire les variations de f sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Montrer que $f(x) \le \ln(2)$, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ et en déduire que f admet une limite finie à droite en 0.

Exercice 12.

1. Prouver que si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) - \int_0^1 f(x)dx\right) = \frac{f(1)-f(0)}{2}.$$

2. Calculer
$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1^k+2^k+\ldots+n^k}{n^{k+1}}-\frac{1}{k+1}\right),\quad k\geq 0.$$

3. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$. Prouver que
$$\lim_{n\to+\infty} n^2\left[\int_0^1 f(x)dx-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{2i-1}{2n}\right)\right]=\frac{f'(1)-f'(0)}{24}.$$

4. En déduire que
$$\lim_{n\to+\infty} n^2\left(\frac{2}{2n+1}+\frac{2}{2n+3}+\ldots+\frac{2}{4n-1}-\ln 2\right)=\frac{1}{32}.$$

Exercice 13 (facultatif). Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction bornée. On suppose qu'il existe deux suites (ψ_n) et (ϕ_n) de fonctions Riemann-intégrables sur $[a,b]$ telles que, pour tout $x\in[a,b]$, on ait
$$\phi_n\leq f\leq\psi_n \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty}\int_a^b(\psi_n-\phi_n)(x)dx=0.$$
Montrer que f est Riemann-intégrable sur $[a,b]$ et
$$\int_a^b f(x)\ dx=\lim_{n\to+\infty}\int_a^b\psi_n(x)\ dx=\lim_{n\to+\infty}\int_a^b\phi_n(x)\ dx.$$

Exercice 14 (facultatif).

1. Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ une fonction intégrable et soit $g:E\to\mathbb{R}$ (où $f([0,1])\subset E\subset\mathbb{R}$) une fonction $k-$lipschitzienne. Montrer que la fonction composée gof est intégrable sur $[0,1]$.
2. Soient $a,b\in\mathbb{R}$ tels que $a<b$, et soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}^+$ une fonction intégrable sur $[a,b]$, montrer que $\sqrt{f}$ est intégrable sur $[a,b]$. (Indication : montrer que $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}^+,\quad |\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}|\leq\sqrt{|\alpha-\beta|}$.)

Exercice 15 (facultatif). Calculer la limite des suites de terme géneral suivant :
$$u_n=n^{\frac{-3}{2}}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{k},\quad v_n=n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2+k^2},\quad w_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}ke^{\frac{-k}{n}},\quad x_n=\left(\prod_{k=0}^{n-1}(1+\frac{k}{n})\right)^{\frac{1}{n}},\quad y_n=\left(\frac{(2n)!}{n!n^n}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Exercice 16 (facultatif). Calculer les primitives suivantes sur leurs ensembles de définition :
$$\int\frac{x^4+3x^3+x}{(x-1)^3(x^2-x+1)^2}dx,\quad \int\frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}},\quad \int\frac{x}{(2x+1)\sqrt{x+1}}dx,\quad \int\tan x\,dx,$$
$$\int\frac{1}{\cos^4 x}dx,\quad \int\frac{\cos^3 x}{\sin^5 x}dx,\quad \int\frac{dx}{5\cosh x+3\sinh x+4},\quad \int\frac{\cosh x}{2\cosh x+\sinh x}dx$$

$$\int \frac{\cosh x - 1}{\cosh x + 1} e^x dx, \quad \int \frac{dx}{1+\tanh x}, \quad \int x\sqrt{-x^2+3x-2}\, dx, \quad \int \frac{x}{\sqrt{x^2+x+2}} dx.$$

Exercice 17 (facultatif). Soit F la fonction définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par

$$F(x) = \int_x^{2x} e^{-t^2} dt.$$

1. Calculer $F'(x)$.
2. Calculer $F(0)$ et montrer que la fonction F est impaire.
3. Étudier les variations de F.
4. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} F(x) = 0$.
5. Calculer le développement limité de F en 0 à l'ordre 3 et dessiner la courbe de F.

Exercice 18 (facultatif).

1. Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^n x^n e^{-nx} dx, \quad \lim_{x\to 0} \int_{3x}^{x} \frac{\cos t}{t} dt, \quad \lim_{R\to+\infty} \int_0^{\frac{\Pi}{2}} e^{-R\sin x} dx.$$

2. Soit f une fonction continue sur $[0,1]$. Calculer

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{f(x)}{x+n} dx, \quad \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 x^n f(x) dx, \quad \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{f(x)}{1+nx} dx.$$

Corrigé de la Série n°1

Exercice 13 (facultatif). Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. On suppose qu'il existe deux suites (ψ_n) et (ϕ_n) de fonctions Riemann-intégrables sur $[a,b]$ telles que, pour tout $x \in [a,b]$, on ait

$$\phi_n \leq f \leq \psi_n \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \int_a^b (\psi_n - \phi_n)(x)dx = 0.$$

– Montrer que f est Riemann-intégrable sur $[a,b]$: Soit $\varepsilon > 0$. Il s'agit de montrer qu'il existe deux fonctions en escalier ψ et ϕ sur $[a,b]$ vérifiant :

$$\phi \leq f \leq \psi \quad \text{et} \quad \int_a^b (\psi - \phi)(x)dx \leq \varepsilon. \tag{1}$$

Par hypothèse, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\int_a^b (\psi_m - \phi_m)(x)dx \leq \varepsilon$ pour tout $m > n$. Fixons un tel entier n. Comme ψ_n est intégrable sur $[a,b]$, il existe deux fonctions en escalier c_n et d_n telles que

$$c_n \leq \psi_n \leq d_n \quad \text{et} \quad \int_a^b (d_n - c_n)(x)dx \leq \varepsilon,$$

donc a fortiori $\displaystyle\int_a^b (d_n - \psi_n)(x)dx \leq \varepsilon.$
De même, puisque ϕ_n est intégrable sur $[a,b]$, il existe deux fonctions en escalier a_n et b_n telles que

$$a_n \leq \phi_n \leq b_n \quad \text{et} \quad \int_a^b (b_n - a_n)(x)dx \leq \varepsilon,$$

donc a fortiori $\displaystyle\int_a^b (d_n - \psi_n)(x)dx \leq \varepsilon.$
On a ainsi trouvé des fonctions en escalier a_n et d_n sur $[a,b]$ vérifiant :

$$a_n \leq \phi_n \leq f \leq \psi_n \leq d_n,$$

et

$$\int_a^b (d_n - a_n)(x)\ dx = \int_a^b (d_n - \psi_n)(x)\ dx + \int_a^b (\psi_n - \phi_n)(x)\ dx + \int_a^b (\phi_n - a_n)(x)\ dx \leq 3\varepsilon.$$

En prenant $\phi = a_n$ et $\psi = d_n$ on a bien les relations (1), ce qui montre que f est Riemann-intégrable sur $[a,b]$.
– Calculons l'intégrable de f sur $[a,b]$: D'après l'exercice 3, on a

$$\int_a^b f(x)\ dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b a_n(x)\ dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b d_n(x)\ dx,$$

et comme

$$\int_a^b a_n(x)\ dx \leq \int_a^b \phi_n(x)\ dx \leq \int_a^b \psi_n(x)\ dx \leq \int_a^b d_n(x)\ dx,$$

par passage à la limite, on déduit le resultat dérisé :

$$\int_a^b f(x)\ dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \psi_n(x)\ dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \phi_n(x)\ dx.$$

Exercice 14 (facultatif).

1. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque, f est intégrable sur $[0,1]$, on peut trouver des fonctions φ et μ en escalier sur $[0,1]$ telles que
$$|f-\varphi| \leq \mu \quad \text{et} \quad \int_0^1 \mu(x)\ dx \leq \varepsilon.$$
Or, $go\varphi$ est une fonction en escalier sur $[0,1]$ puisque, si $(a_i)_{0\leq i\leq n}$ est une subdivision quelconque de $[0,1]$ telle que $\varphi(x) = \lambda_i$ pour tout $x \in]a_{i-1}, a_i[$, alors
$$(go\varphi)(x) = g(\lambda_i)$$
pour tout $x \in]a_{i-1}, a_i[$ et tout $i \in \{1, ..., n\}$. D'autre part, puisque g est $k-$lipschitzienne, on a
$$|(gof)(x) - (go\varphi)(x)| \leq k|f(x) - \varphi(x)| \leq k\mu(x),$$
avec
$$\int_0^1 k\mu\ dx \leq k\varepsilon.$$
On en conclut que la fonction gof est intégrable sur $[0,1]$.
2. $-$ Montrons que $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+, \quad |\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}| \leq \sqrt{|\alpha-\beta|}$: On sait que pour tous $x, y \in \mathbb{R}^+$, on a
$$\sqrt{x+y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y} \tag{2}$$
$*$ Si $\alpha \geq \beta$. En prenant $x = \beta$ et $y = \alpha - \beta$ dans (2), on obtient :
$$\sqrt{\alpha} \leq \sqrt{\beta} + \sqrt{\alpha-\beta}.$$
$*$ Si $\alpha \leq \beta$. En prenant $x = \alpha$ et $y = \beta - \alpha$ dans (2), on obtient :
$$\sqrt{\beta} \leq \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta-\alpha}.$$
On a démontrer donc le résultat désiré.
$-$ Montrons que $\sqrt{f}$ est intégrable sur $[a,b]$: Puisque, f est intégrable sur $[a,b]$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe des fonctions φ et μ en escalier sur $[a,b]$ telles que
$$|f-\varphi| \leq \mu \quad \text{et} \quad \int_a^b \mu(x)\ dx \leq \varepsilon.$$
Or $|\varphi|$ est une fonction en escalier sur $[a,b]$, d'après l'inégalité précédente, on a
$$|\sqrt{f} - \sqrt{|\varphi|}| \leq \sqrt{|f - |\varphi||}.$$
Comme de plus
$$|f - |\varphi|| \leq |f-\varphi| \leq \mu,$$
on déduit que
$$|\sqrt{f} - \sqrt{|\varphi|}| \leq \sqrt{\mu},$$
où $\sqrt{\mu}$ est une fonction en escalier sur $[a,b]$, d'après l'inégalité de Schwarz,
$$\int_a^b \sqrt{\mu}(x)\ dx \leq \left(\int_a^b 1\ dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b \mu(x)\ dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{\varepsilon}.$$
On a donc démontré que $\sqrt{f}$ est intégrable sur $[a,b]$.