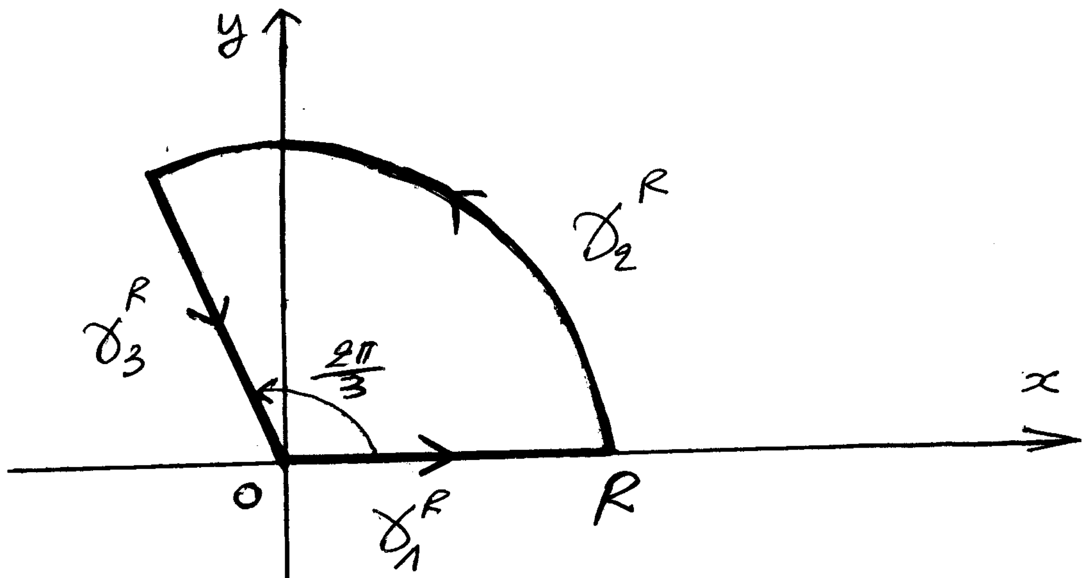
Exercice 32. D'abord, il est clair que l'intégrale généralisée est convergente.

Posons : $f(z) = \dfrac{1}{z^3+1}$.



Pour tout $R > 1$, soit

$$\gamma_R := \gamma_1^R \vee \gamma_2^R \vee \gamma_3^R \quad \text{et} \quad I_R := \int_{\gamma_R} f(z)\,dz.$$

$$\Rightarrow I_R = \underbrace{\int_{\gamma_1^R} f(z)\,dz}_{I_1^R} + \underbrace{\int_{\gamma_2^R} f(z)\,dz}_{I_2^R} + \underbrace{\int_{\gamma_3^R} f(z)\,dz}_{I_3^R}$$

Donc : $I_R = I_1^R + I_2^R + I_3^R \quad (*)$

- Sur γ_1^R, $z = x$ et $dz = dx$, et alors on a :

$$I_1^R = \int_0^R f(x)\,dx \Rightarrow \lim_{R\to+\infty} I_1^R = \int_0^{+\infty} f(x)\,dx.$$

• γ_2^R est paramétré par :

$$\gamma : \left[0, \frac{2\pi}{3}\right] \longrightarrow \gamma_2^R$$
$$t \longmapsto Re^{it}$$

$$|I_2^R| = \left|\int_{\gamma_2^R} f(z)\, dz\right| \leq L(\gamma_2^R) \cdot \sup_{z \in \gamma_2^R} |f(z)|$$

or $\forall z \in \gamma_2^R$, $\exists t \in \left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$: $z = Re^{it}$.

$$|f(z)| = \frac{1}{|R^3 e^{3it} + 1|} \leq \frac{1}{R^3 - 1}.$$

Donc : $\sup_{z \in \gamma_2^R} |f(z)| \leq \frac{1}{R^3-1}$.

Et alors, on a : $|I_2^R| \leq \frac{2\pi}{3} R \frac{1}{R^3-1} \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0$.

$$\Rightarrow \lim_{R\to+\infty} I_2^R = 0.$$

• γ_3^R est paramétré par $t \longmapsto te^{i\frac{2\pi}{3}}$ où t varie de R à 0. Et alors, on a :

$$I_3^R = \int_{\gamma_3^R} f(z)\, dz = \int_R^0 \frac{1}{\left(te^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^3 + 1}\, d\left(te^{i\frac{2\pi}{3}}\right)$$

$$= -e^{i\frac{2\pi}{3}} \int_0^R \frac{dt}{t^3+1}$$

$$\Rightarrow \lim_{R\to+\infty} I_3^R = -e^{i\frac{2\pi}{3}} \int_0^{+\infty} f(x)\, dx.$$

• D'autre part, les pôles de $f(z) = \frac{1}{z^3+1}$ sont les racines cubiques de $-1 = e^{i\pi}$:

$z_0 := e^{i\frac{\pi}{3}}$, $z_1 := e^{i\pi}$ et $z_2 := e^{i\frac{5\pi}{3}}$.

Et le seul pôle de f à l'intérieur de γ_R est z_0.

Donc, d'après le théorème des Résidus de Cauchy, on a :

$$I_R = \int_{\gamma_R} f(z)\, dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, z_0).$$

Et comme z_0 ~~est~~ un pôle simple de f, on a :

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = \frac{1}{(z_0 - z_1)(z_0 - z_2)}$$

$$= \frac{1}{\left(e^{i\frac{\pi}{3}} - e^{i\pi}\right)\left(e^{i\frac{\pi}{3}} - e^{i\frac{5\pi}{3}}\right)}$$

$$= \frac{1}{e^{i\frac{2\pi}{3}} - e^{i2\pi} - e^{i\frac{4\pi}{3}} + e^{i\frac{2\pi}{3}}}$$

$$= \frac{1}{2e^{i\frac{2\pi}{3}} + \left(-1 + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)}$$

$$= \frac{1}{2e^{i\frac{2\pi}{3}} + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)} = \frac{1}{3e^{i\frac{2\pi}{3}}}.$$

Donc : $I_R = \dfrac{2\pi i}{3e^{i\frac{2\pi}{3}}}$

En faisant tendre R vers $+\infty$ dans $(*)$, on aura :

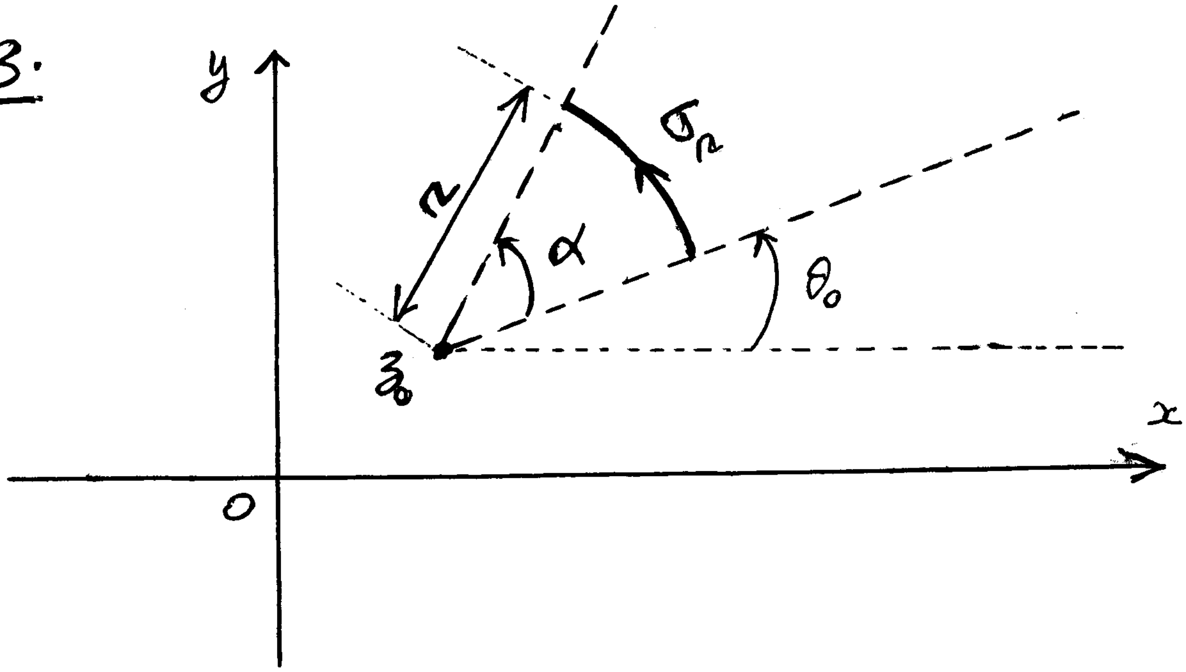
$$\frac{2\pi i}{3e^{i\frac{2\pi}{3}}} = \int_0^{+\infty} f(x)\,dx - e^{i\frac{2\pi}{3}}\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \frac{2\pi i}{3e^{i\frac{2\pi}{3}}}\,\frac{1}{\left(1-e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)}$$

$$= \frac{2\pi i}{3}\,\frac{1}{e^{i\frac{2\pi}{3}} - e^{i\frac{4\pi}{3}}}$$

Donc : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^3+1} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$.

Exercice 33 :



σ_r est paramétré par :

$$\begin{aligned} \varphi : [\theta_0, \theta_0+\alpha] &\longrightarrow \sigma_r \\ \theta &\longmapsto z_0 + re^{i\theta} \end{aligned}$$

Et alors, on a :

$$\frac{1}{i\alpha}\int_{\sigma_r} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = \frac{1}{i\alpha}\int_{\theta_0}^{\theta_0+\alpha} \frac{f(z_0+re^{i\theta})}{re^{i\theta}}\, ire^{i\theta}\,d\theta$$

$$= \frac{1}{\alpha}\int_{\theta_0}^{\theta_0+\alpha} f(z_0+re^{i\theta})\,d\theta$$

Posons : $F(r) := \frac{1}{\alpha}\int_{\theta_0}^{\theta_0+\alpha} f(z_0+re^{i\theta})\,d\theta$.

Comme f est continue sur $\overline{B}(z_0,r_0)$, elle est uniformément continue sur $\overline{B}(z_0,r_0)$.

Soit $\varepsilon>0$, il existe $\delta>0$ tel que :

$|w-w'|<\delta \Rightarrow |f(w)-f(w')|<\varepsilon$.

Donc : $|r-r'|<\delta \Rightarrow |(z_0+re^{i\theta})-(z_0+r'e^{i\theta})|<\delta$

$\Rightarrow |f(z_0+re^{i\theta})-f(z_0+r'e^{i\theta})|<\varepsilon$.

Et alors, on a :

$$|F(r)-F(r')| = \left|\frac{1}{\alpha}\int_{\theta_0}^{\theta_0+\alpha}\left[f(z_0+re^{i\theta})-f(z_0+r'e^{i\theta})\right]d\theta\right| < \varepsilon.$$

Donc, F est continue sur $[0,r_0]$.

Et alors, $\lim\limits_{r\to 0^+} F(r) = F(0)$.

Donc : $$\lim_{r\to 0^+}\frac{1}{i\alpha}\int_{\sigma_r}\frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = f(z_0).$$

Exercice 34 : Considérons la fonction f définie par :

$$f(z) := \begin{cases} (z-z_0)g(z) & \text{si } z \neq z_0 \\ \lim\limits_{z \to z_0}(z-z_0)g(z) = \mathrm{Res}(g,z_0) & \text{si } z = z_0 \end{cases}$$

Comme g a un pôle simple en z_0, la fonction f est holomorphe en z_0. Et le résultat découle du lemme du chemin rétréci (Exercice 33) puisque pour tout $z \neq z_0$, on a

$$\frac{f(z)}{z-z_0} = g(z).$$

Exercice 35 : 1) a) Il existe une fonction φ holomorphe sur U telle que : $h(z) = (z-a)\varphi(z)$ et $\varphi(a) \neq 0$.

$\Rightarrow h'(z) = \varphi(z) + (z-a)\varphi'(z)$ et $\varphi(a) = h'(a)$.

Alors, au voisinage de a, on a : $g(z) = g(a) + \sum\limits_{n \geq 1} \alpha_n (z-a)^n$

$$\Rightarrow \frac{g(z)}{h(z)} = \frac{g(a)}{\varphi(a)} + \psi(z) = \frac{g(a)}{h'(a)} + \psi(z)$$ où ψ est une fonction holomorphe sur un voisinage de a.

Et alors, on a le résultat.

b) C'est évident, car si $|z-a|$ est assez petit, on a :

$$g(z) = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} g^{(k)}(a)(z-a)^k.$$

2) Les pôles de f sont : 0 pôle simple, et $-i, i$ pôles doubles.

• D'après 1) a) : $\mathrm{Res}(f,0) = 1$.

• Pour calculer $\mathrm{Res}(f,i)$, on peut utiliser 1) b). Il est cependant plus simple d'effectuer un développement limité de $(z-i)^2 f(z)$ au voisinage de i.

Posons : $w = z - i$; alors on a :

$$\frac{z^2+z+1}{z(z+i)^2} = \frac{w^2+(2i+1)w+i}{(w+i)(w^2+4iw-4)} = \frac{1}{4}\left[1+(2+i)w+O(w)\right].$$

On trouve le résidu en $-i$ en prenant le conjugué du résultat obtenu. On obtient alors :

$$\begin{cases} \mathrm{Res}(f,i) = \frac{1}{4}(-2-i) \\ \mathrm{Res}(f,-i) = \frac{1}{4}(-2+i) \end{cases}$$

<u>Exercice 36.</u> 1) Pour $\rho > R$ assez grand, soit γ_ρ le lacet paramétré par :

$$\begin{aligned} \varphi : [0,2\pi) &\longrightarrow \gamma_\rho \\ t &\longmapsto \rho e^{it}. \end{aligned}$$

Alors, on a : $\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\rho} f(z)\,dz = \alpha_{-1} = \beta_{-1}$

2) Prenons $a = 0$. Pour $|z|$ assez petit, on a :

$$g(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n z^{-n-2}.$$ Et alors, on a :

$$\mathrm{Res}(g,0) = \alpha_{-1} = -\mathrm{Res}(f,\infty).$$

Exercice 37 : 1) $I_1 = \int_0^{2\pi} \frac{\cos x}{a+\cos x}\,dx \quad (a>1).$

Soit $z = e^{ix}$. $dz = ie^{ix}dx \Rightarrow dx = \frac{-i}{z}dz$.

$\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix}) \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right).$

Donc : $$I_1 = \int_{\mathcal{C}(0,1)} \frac{\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)}{a+\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)}\frac{-i}{z}dz$$

$$= -i\int_{\mathcal{C}(0,1)} \frac{z^2+1}{z(z^2+2az+1)}\,dz$$

Posons : $$f(z) := \frac{z^2+1}{z(z^2+2az+1)}.$$

f a trois pôles simples :

$z_0 = 0$, $z_1 = -a+\sqrt{a^2-1}$ et $z_2 = -a-\sqrt{a^2-1}$

Seuls les pôles z_0 et z_1 sont à l'intérieur de $\mathcal{C}(0,1)$.

Et alors, d'après le théorème des Résidus de Cauchy, on a :

$$\int_{\mathcal{C}(0,1)} f(z)\,dz = 2\pi i\left[\mathrm{Res}(f,0)+\mathrm{Res}(f,z_1)\right].$$

$$Res(f,0) = \lim_{z \to 0} z f(z) = 1 .$$

$$Res(f,z_1) = \lim_{z \to z_1} (z-z_1) f(z) = \frac{z_1^2+1}{z_1(z_1-z_2)}$$

$$= \frac{\left(-a+\sqrt{a^2-1}\right)^2+1}{\left(-a+\sqrt{a^2-1}\right)\left(-a+\sqrt{a^2-1}+a+\sqrt{a^2-1}\right)}$$

$$= \frac{\left(-a+\sqrt{a^2-1}\right)^2+1}{2\sqrt{a^2-1}\left(-a+\sqrt{a^2-1}\right)} .$$

Donc : $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos x}{a+\cos x}\,dx = 2\pi\left[1+\frac{\left(-a+\sqrt{a^2-1}\right)^2+1}{2\sqrt{a^2-1}\left(-a+\sqrt{a^2-1}\right)}\right]$.

2) $\displaystyle I_2 = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{b+\cos x+\sin x} \quad (b > \sqrt{2})$.

Soit $z = e^{ix}$ $dz = ie^{ix}dx \Rightarrow dx = \frac{-i}{z}dz$

$\cos x = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$ et $\sin x = \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)$.

Donc : $\displaystyle I_2 = \int_{C(0,1)} \frac{\frac{-i}{z}\,dz}{b+\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)+\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)}$

$$\Rightarrow I_2 = 2\int_{C(0,1)} \frac{dz}{(1+i)z^2+2biz+(i-1)} .$$

Posons : $\displaystyle f(z) := \frac{1}{(1+i)z^2+2biz+(i-1)}$

On a : $I_2 = 2\int_{\mathcal{C}(0,1)} f(z)\,dz$.

f admet deux poles :

$$z_1 := \frac{-ib - i\sqrt{b^2-2}}{1+i} \quad \text{et} \quad z_2 := \frac{-ib + i\sqrt{b^2-2}}{1+i}.$$

z_2 est le seul pôle de f à l'intérieur de $\mathcal{C}(0,1)$.
Donc, d'après le théorème des Résidus de Cauchy, on a :

$$\int_{\mathcal{C}(0,1)} f(z)\,dz = 2\pi i \,\mathrm{Res}(f, z_2)$$

Et comme z_2 est un pole simple de f, on a :

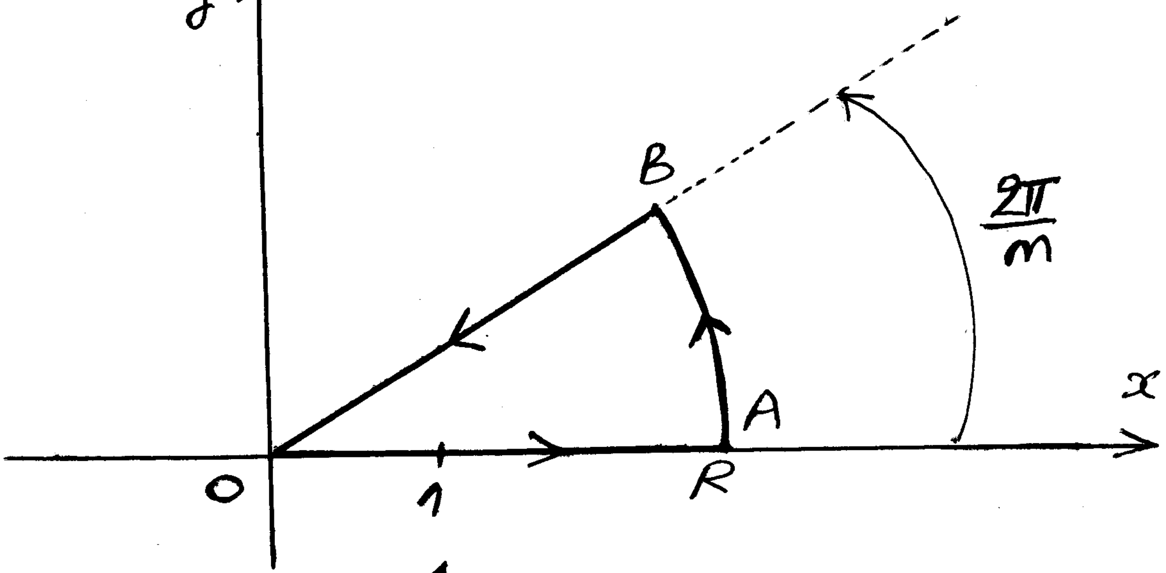
$$\mathrm{Res}(f,z_2) = \lim_{z\to z_0} (z-z_2)f(z) = \frac{1}{z_2-z_1} = i\alpha$$

(α à calculer).

$$\Rightarrow \int_{\mathcal{C}(0,1)} f(z)\,dz = -2\pi\alpha.$$

Et alors, $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{b+\cos x+\sin x} = -4\pi\alpha$.

<u>Exercice 38</u>:



Posons : $f_n(z) := \dfrac{1}{1+z^n}$.

Les pôles de f_n sont les racines $n^{\text{ième}}$ de $-1 = e^{i\pi}$:

$$z_k := e^{i\frac{\pi+2k\pi}{n}} \quad k = 0,1,\dots,n-1 .$$

Le seul pôle de f_n à l'intérieur de γ_R est $z_0 := e^{i\frac{\pi}{n}}$.

Donc, d'après le théorème des Résidus de Cauchy, on a :

$$I_R := \int_{\gamma_R} f_n(z)\,dz = 2\pi i \,\mathrm{Res}(f_n, z_0) .$$

Et comme z_0 est un pôle simple de f_n, on a :

$$\mathrm{Res}(f_n, z_0) = \frac{1}{\frac{d}{dz}(1+z^n)\big|_{z=z_0}} = \frac{1}{n z_0^{n-1}} = \frac{1}{n\left[e^{i\frac{\pi}{n}}\right]^{n-1}}$$

$$= \frac{1}{n e^{i\frac{n-1}{n}\pi}} = \frac{1}{-n e^{-i\frac{\pi}{n}}} = \frac{-e^{i\frac{\pi}{n}}}{n} .$$

Donc : $I_R = -2\pi i \dfrac{e^{i\frac{\pi}{n}}}{n}$.

D'autre part, $\gamma_R = [OA] \vee \overset{\frown}{AB} \vee [BO]$. Donc :

$$I_R = \int_{\gamma_R} f_n(z)\,dz = \underbrace{\int_{[OA]} f_n(z)\,dz}_{I_1^R} + \underbrace{\int_{\overset{\frown}{AB}} f_n(z)\,dz}_{I_2^R} + \underbrace{\int_{[BO]} f_n(z)\,dz}_{I_3^R}$$

$$\Rightarrow I_R = I_1^R + I_2^R + I_3^R \quad (*)$$

• Sur $[OA]$, $z = x$ et $dz = dx$, et alors on a :

$$I_1^R = \int_0^R f_m(x)\,dx \Rightarrow \lim_{R\to+\infty} I_1^R = \int_0^{+\infty} f_m(x)\,dx.$$

• Sur $\widehat{AB}$, on a : $|I_2^R| = \left|\int_{\widehat{AB}} f_m(z)\,dz\right| \leq L(\widehat{AB}) \cdot \sup_{z\in\widehat{AB}} |f_m(z)|$.

Pour tout $z \in \widehat{AB}$, il existe $\theta \in [0, \frac{2\pi}{m}]$ tel que : $z = Re^{i\theta}$.

$$\Rightarrow |f_m(z)| = \left|\frac{1}{1+z^m}\right| = \left|\frac{1}{1+R^m e^{im\theta}}\right| \leq \frac{1}{R^m - 1}.$$

Donc : $\sup_{z\in\widehat{AB}} |f_m(z)| \leq \frac{1}{R^m-1}$. Et alors, on a :

$$|I_2^R| \leq \frac{2\pi}{m} R \frac{1}{R^m-1} \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0.$$

Donc : $\lim_{R\to+\infty} I_2^R = 0$.

• Sur $[BO]$, on a la paramétrisation suivante :

$x \longmapsto x e^{i\frac{2\pi}{m}}$ avec x varie de R à 0.

$$\text{Donc : } I_3^R = \int_R^0 \frac{d(xe^{i\frac{2\pi}{m}})}{1+(xe^{i\frac{2\pi}{m}})^m} = -e^{i\frac{2\pi}{m}} \int_0^R \frac{dx}{1+x^m}$$

$$\Rightarrow \lim_{R\to+\infty} I_3^R = -e^{i\frac{2\pi}{m}} \int_0^{+\infty} f_m(x)\,dx$$

En faisant tendre R vers $+\infty$ dans $(*)$, on aura :

$$-2\pi i \frac{e^{i\frac{\pi}{m}}}{m} = \int_0^{+\infty} f_m(x)\,dx - e^{i\frac{2\pi}{m}} \int_0^{+\infty} f_m(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} f_m(x)\,dx = \frac{-2\pi i}{m} \frac{e^{i\frac{\pi}{m}}}{1-e^{i\frac{2\pi}{m}}}$$

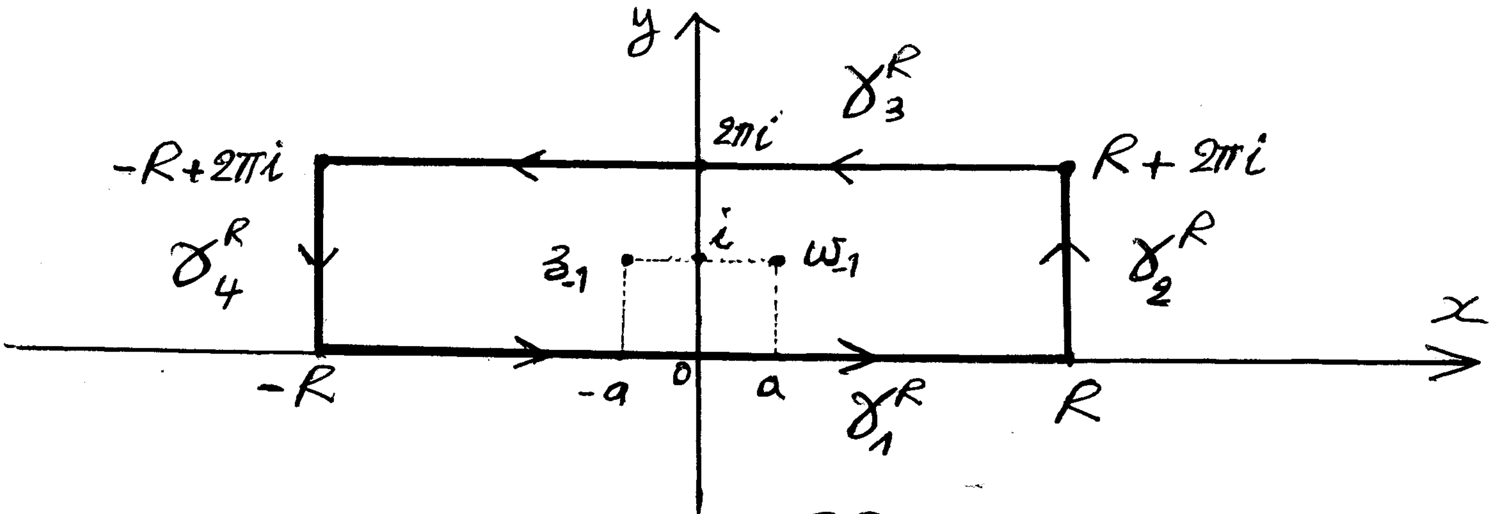
$$= \frac{-2\pi i}{m} \frac{1}{e^{-i\frac{\pi}{m}} - e^{i\frac{\pi}{m}}}$$

$$= \frac{-2\pi i}{m} \frac{1}{-2i\sin\left(\frac{\pi}{m}\right)}$$

Donc : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^m} = \frac{\pi}{m\sin\left(\frac{\pi}{m}\right)}$.

Exercice 39. Posons $f(z) := \dfrac{e^{i\alpha z}}{ch(z) + ch(a)}$.

Pour tout $R > a$ considérons γ_R le lacet rectangulaire orienté dans le sens direct suivant :



$$\gamma_R := \gamma_1^R \vee \gamma_2^R \vee \gamma_3^R \vee \gamma_4^R .$$

$$\Rightarrow I_R := \int_{\gamma_R} f(z)\,dz = \underbrace{\int_{\gamma_1^R} f(z)\,dz}_{I_1^R} + \underbrace{\int_{\gamma_2^R} f(z)\,dz}_{I_2^R} + \underbrace{\int_{\gamma_3^R} f(z)\,dz}_{I_3^R} + \underbrace{\int_{\gamma_4^R} f(z)\,dz}_{I_4^R}$$

$$\Rightarrow I_R = I_1^R + I_2^R + I_3^R + I_4^R \quad (*) .$$

- Cherchons les pôles de f.

$$ch(z) + ch(a) = \cos(iz) + \cos(ia) = 2\cos\left(i\,\frac{z+a}{2}\right)\cos\left(i\,\frac{z-a}{2}\right)$$

$$ch(z) + ch(a) = 0 \iff \cos\left(i\,\frac{z+a}{2}\right) = 0 \ \underline{\text{ou}}\ \cos\left(i\,\frac{z-a}{2}\right) = 0$$

Soit $z \in \mathbb{C}$. $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$, et alors on a :

$$\cos z = 0 \iff e^{iz} = -e^{-iz} \iff e^{2iz} = -1 = e^{i\pi}$$

$$\iff 2iz = i\pi + 2k\pi i \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\iff z = \frac{1}{2}(\pi + 2k\pi) \quad (k \in \mathbb{Z}) .$$

Et alors, on a :

$$\cos\left(i\,\frac{z+a}{2}\right) = 0 \iff i\,\frac{z+a}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\iff z = -a - i\pi(1+2k) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\cos\left(i\,\frac{z-a}{2}\right) = 0 \iff z = a - i\pi(1+2k) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Donc, les pôles de f sont :

$$\begin{cases} z_k := -a - i\pi(1+2k) & (k \in \mathbb{Z}) \\ w_k := a - i\pi(1+2k) & (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

Les seuls pôles de f à l'intérieur de γ_R sont :

$$z_{-1} = -a + i\pi \quad \text{et} \quad w_{-1} = a + i\pi$$

Et alors, d'après le théorème des résidus de Cauchy, on a :

$$I_R = \int_{\gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i \left[\operatorname{Res}(f, z_{-1}) + \operatorname{Res}(f, w_{-1}) \right].$$

Et comme les pôles z_{-1} et w_{-1} sont simples, on a :

$$\operatorname{Res}(f, z_{-1}) = \lim_{z \to z_{-1}} (z - z_{-1}) f(z)$$

$$\operatorname{Res}(f, w_{-1}) = \lim_{z \to w_{-1}} (z - w_{-1}) f(z).$$

Et le calcul nous donne :

$$\operatorname{Res}(f, z_{-1}) + \operatorname{Res}(f, w_{-1}) = -2i \frac{e^{-\alpha\pi} \sin(\alpha a)}{\operatorname{sh}(a)}$$

$$\Rightarrow I_R = 4\pi \frac{e^{-\alpha\pi} \sin(\alpha a)}{\operatorname{sh}(a)}$$

- $I_1^R = \int_{-R}^{R} f(x)\,dx \Rightarrow \lim\limits_{R\to+\infty} I_1^R = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$.

- $|I_2^R| = \left|\int_{\gamma_2^R} f(z)\,dz\right| \leq L(\gamma_2^R)\cdot \sup\limits_{z\in\gamma_2^R} |f(z)|$.

$\forall z \in \gamma_2^R,\ \exists t\in[0,2\pi]$ tel que : $z = R + ti$.

$$|f(z)| = \left|\frac{e^{i\alpha(R+ti)}}{ch(R+ti)+ch(a)}\right| = \frac{e^{-\alpha t}}{\left|\frac{1}{2}(e^{R+it}+e^{-R-it})+ch(a)\right|}$$

$$\leq \frac{1}{\frac{1}{2}\left(|e^{R+ti}|-|e^{-R-ti}|\right)-ch(a)}$$

$$\leq \frac{1}{\frac{1}{2}(e^{R}-e^{-R})-ch(a)}$$

Donc, $|I_2^R| \leq R\cdot\dfrac{1}{\frac{1}{2}(e^{R}-e^{-R})-ch(a)} \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0$.

$$\Rightarrow \lim_{R\to+\infty} I_2^R = 0.$$

- De la même façon, on montre que : $\lim\limits_{R\to+\infty} I_4^R = 0$.

- γ_3^R est paramétré par : $x \longmapsto x + 2\pi i$ où x varie de R à $-R$. Et alors, on a :

$$I_3^R = \int_R^{-R} \frac{e^{i\alpha(x+2\pi i)}}{ch(x+2\pi i)+ch(a)}\, d(x+2\pi i)$$

$$= -e^{2\pi\alpha}\int_{-R}^{R} \frac{e^{i\alpha x}}{ch(x)+ch(a)}\, dx = -e^{2\pi\alpha}\int_{-R}^{R} f(x)\, dx$$

$$\Rightarrow \lim_{R\to+\infty} I_3^R = e^{-2\pi\alpha}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx .$$

En faisant tendre R vers $+\infty$ dans $(*)$, on aura :

$$4\pi \frac{e^{-\alpha\pi} \sin(\alpha a)}{sh(a)} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx - e^{2\pi\alpha}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \frac{4\pi e^{-\alpha\pi}\sin(\alpha a)}{sh(a)} \frac{1}{1-e^{-2\pi\alpha}}$$

$$= \frac{4\pi \sin(\alpha a)}{sh(a)} \frac{1}{e^{\alpha\pi}-e^{-\alpha\pi}}$$

$$= \frac{4\pi \sin(\alpha a)}{sh(a)} \frac{1}{2\, sh(\alpha\pi)}$$

$$= \frac{2\pi \sin(\alpha a)}{sh(a)\, sh(\alpha\pi)} .$$

Et comme $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 2\int_0^{+\infty} f(x)\, dx$, on a :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{ch(x)+ch(a)}\,dx = \frac{\pi \sin(\alpha a)}{sh(a)\, sh(\alpha\pi)}$$

Et par suite, on a :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(\alpha x)}{ch(x)+ch(a)}\,dx = \frac{\pi \sin(\alpha a)}{sh(a)\, sh(\alpha\pi)}$$

<u>Exercice 40.</u> Posons $x = e^t$. $dx = e^t dt$.

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t e^t}{e^{\frac{t}{2}}(1+e^{2t})}\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t e^{\frac{t}{2}}}{1+e^{2t}}\,dt$$

Posons : $f(z) := \dfrac{z e^{\frac{z}{2}}}{1+e^{2z}}$.

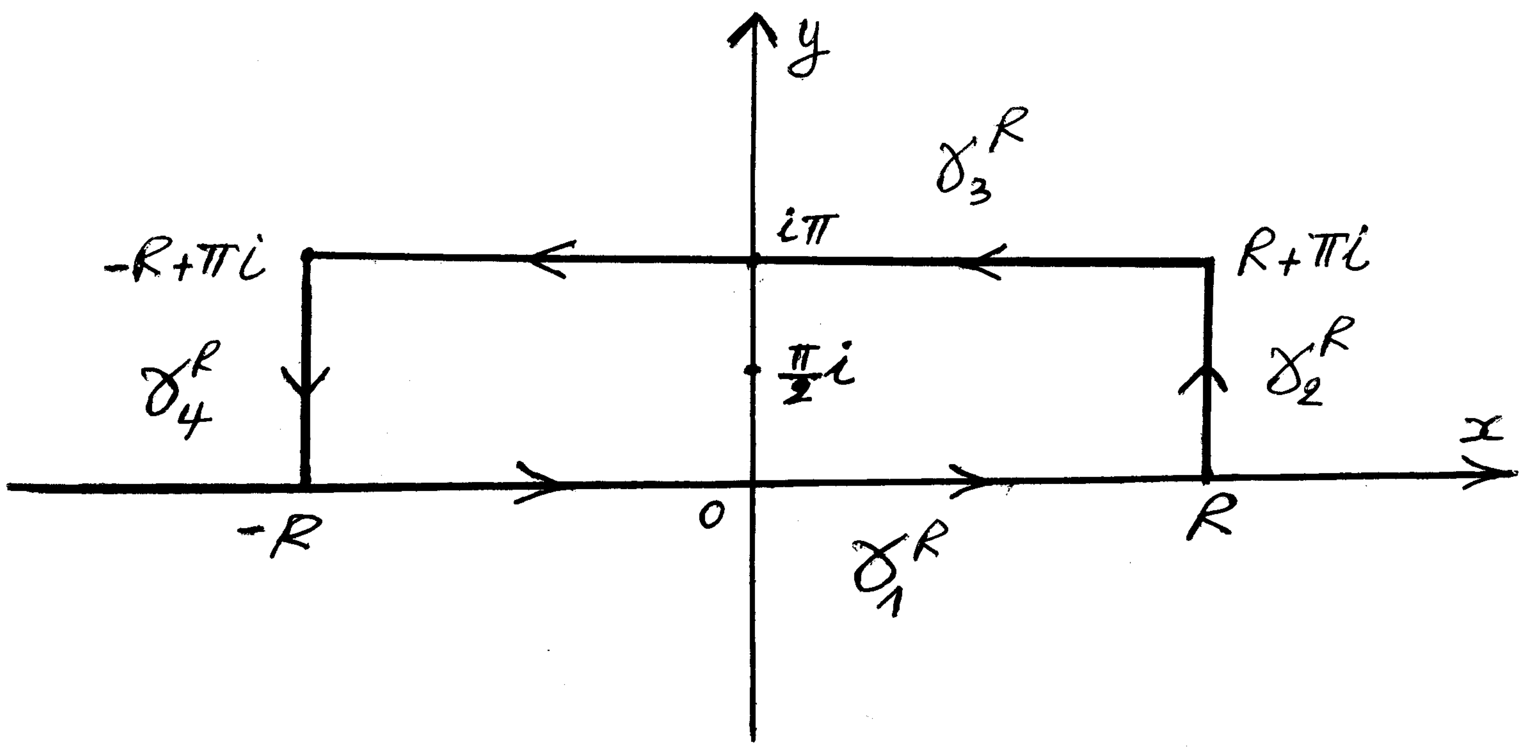
$1+e^{2z} = 0 \iff e^{2z} = -1 = e^{i\pi} \iff 2z = i\pi + 2k\pi i \ (k\in\mathbb{Z})$

$\iff z = i\frac{\pi}{2}(1+2k) \quad (k\in\mathbb{Z})$.

Donc, f admet une infinité de pôles :

$$z_k := i\frac{\pi}{2}(1+2k) \quad (k\in\mathbb{Z}).$$

Pour tout $R>0$, considérons γ_R le lacet suivant :



$\gamma_R := \gamma_1^R \vee \gamma_2^R \vee \gamma_3^R \vee \gamma_4^R$. Et alors, on a :

$$I_R := \int_{\gamma_R} f(z)\,dz = \underbrace{\int_{\gamma_1^R} f(z)\,dz}_{I_1^R} + \underbrace{\int_{\gamma_2^R} f(z)\,dz}_{I_2^R} + \underbrace{\int_{\gamma_3^R} f(z)\,dz}_{I_3^R} + \underbrace{\int_{\gamma_4^R} f(z)\,dz}_{I_4^R}.$$

$$\Rightarrow I_R = I_1^R + I_2^R + I_3^R + I_4^R \quad (*)$$

- Le seul pôle de f à l'intérieur de γ_R est $z_0 = i\frac{\pi}{2}$.

Et alors, d'après le théorème des Résidus de Cauchy, on a :

$$I_R = \int_{\gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, z_0).$$

Et comme z_0 est un pôle simple de f, on a :

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z).$$

$$\Rightarrow \operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{z_0 e^{\frac{z_0}{2}}}{\frac{d}{dz}(1+e^{2z})\Big|_{z=z_0}} = -\frac{\pi}{4} i e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

Donc : $I_R = \frac{\pi^2\sqrt{2}}{4}(1+i)$.

• D'autre part, on a :

$$* \; I_1^R = \int_{-R}^{R} f(x)\,dx \Rightarrow \lim_{R\to+\infty} I_1^R = I.$$

$$* \; |I_2^R| = \left|\int_{\gamma_2^R} f(z)\,dz\right| \leq L(\gamma_2^R) \cdot \sup_{z\in\gamma_2^R} |f(z)|$$

$\forall z \in \gamma_2^R$, $\exists t \in [0, 2\pi]$ tel que : $z = R + ti$.

$$|f(z)| = \frac{|(R+ti)e^{\frac{1}{2}(R+ti)}|}{|1+e^{2(R+ti)}|} \leq \frac{\sqrt{R^2+\pi^2}\, e^{\frac{R}{2}}}{e^{2R}-1}$$

$$\Rightarrow \sup_{z\in\gamma_2^R} |f(z)| \leq \frac{\sqrt{R^2+\pi^2}}{e^{\frac{3R}{2}} - e^{-\frac{R}{2}}}$$

$$\text{Donc, } |I_2^R| \leq R \frac{\sqrt{R^2+\pi^2}}{e^{\frac{3R}{2}} - e^{-\frac{R}{2}}} \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0.$$

$$\Rightarrow \lim_{R\to+\infty} I_2^R = 0.$$

* De la même façon, on montre que : $\lim_{R\to+\infty} I_3^R = 0$

* γ_3^R est paramétré par $x \longmapsto x+\pi i$, où x varie de R à $-R$. Et alors, on a :

$$I_3^R = \int_R^{-R} \frac{(x+\pi i)e^{\frac{1}{2}(x+\pi i)}}{1+e^{2(x+\pi i)}}\, d(x+\pi i)$$

$$= -\int_{-R}^{R} \frac{(x+\pi i)(i\,e^{\frac{x}{2}})}{1+e^{2x}}\, dx$$

$$= \pi \int_{-R}^{R} \frac{e^{\frac{x}{2}}}{1+e^{2x}}\, dx - i\int_{-R}^{R} \frac{x e^{\frac{x}{2}}}{1+e^{2x}}\, dx$$

$$\Rightarrow \lim_{R\to+\infty} I_3^R = \pi J - i I.$$

$$\left(J = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x^2)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^t}{e^{\frac{t}{2}}(1+e^{2t})}\, dt \right.$$

$$\left. = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^t}{1+e^{2t}}\, dt \right)$$

En faisant tendre R vers $+\infty$ dans $(*)$, on aura :

$$\frac{\pi^2\sqrt{2}}{4}(1+i) = I + \pi J - i I$$

$$\Rightarrow I + \pi J = \frac{\pi^2\sqrt{2}}{4} \quad \text{et} \quad I = \frac{-\pi^2\sqrt{2}}{4}$$

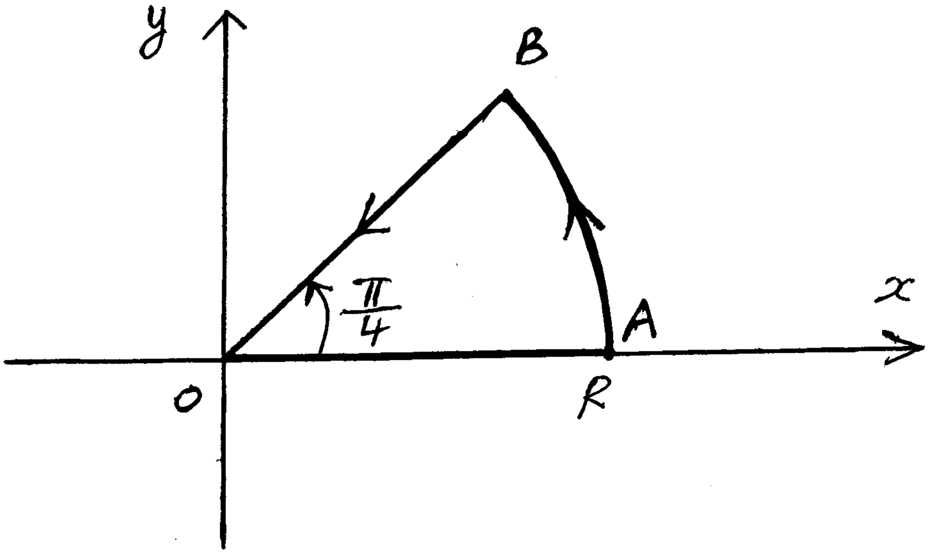
Et alors, on a :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Log}(x)}{\sqrt{x}(1+x^2)}\,dx = \frac{-\pi^2\sqrt{2}}{4}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x^2)} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}.$$

Exercice 41. Posons : $f(z) := e^{iz^2}$.

Pour tout $R>0$ considérons le lacet γ_R suivant :



$$\gamma_R := [OA] \vee \widehat{AB} \vee [BO].$$

- Comme f est une fonction entière, on a :

$$I_R := \int_{\gamma_R} f(z)\,dz = 0.$$

- D'autre part, on a :

$$I_R = \int_{\gamma_R} f(z)\,dz = \underbrace{\int_{[OA]} f(z)\,dz}_{I_1^R} + \underbrace{\int_{\overset{\frown}{AB}} f(z)\,dz}_{I_2^R} + \underbrace{\int_{[BO]} f(z)\,dz}_{I_3^R}.$$

$$\Rightarrow \quad I_R = I_1^R + I_2^R + I_3^R \quad (*)$$

• Sur $[OA]$, on a $z = x$ et $dz = dx$; et alors on a :

$$I_1^R = \int_{[OA]} f(z)\,dz = \int_0^R f(x)\,dx \Rightarrow \lim_{R\to+\infty} I_1^R = \int_0^{+\infty} f(x)\,dx$$

• Sur $\overset{\frown}{AB}$, on a la paramétrisation suivante :

$$\varphi : [0, \tfrac{\pi}{4}] \longrightarrow \overset{\frown}{AB}$$
$$x \longmapsto Re^{ix}.$$

Donc : $$I_2^R = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{i(Re^{ix})^2}\, d(Re^{ix}) = Ri \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{iR^2 e^{2ix}} e^{ix}\,dx.$$

$$\Rightarrow \lim_{R\to+\infty} I_2^R = i\int_0^{\frac{\pi}{4}} \lim_{R\to+\infty} \left[R e^{iR^2 e^{2ix}} e^{ix}\right] dx = 0$$

(On peut aussi appliquer l'exercice 23 en écrivant :

$$\lim_{R\to+\infty} I_2^R = \lim_{R\to+\infty} \int_{\overset{\frown}{AB}} e^{iz^2}\,dz = \lim_{R\to+\infty} \int_{\overset{\frown}{AB}} e^{iz}.g(z)\,dz$$

avec $g(z) := \dfrac{e^{iz^2}}{e^{iz}}$; et alors $\lim_{R\to+\infty} I_2^R = 0$)

• Sur $[BO]$, on a la paramétrisation $x \longmapsto xe^{i\frac{\pi}{4}}$ où x varie de R à 0. Et alors, on a :

$$I_3^R = \int_R^0 e^{ix^2} e^{i\frac{\pi}{2}} d\left(x e^{i\frac{\pi}{4}}\right) = -e^{i\frac{\pi}{4}} \int_0^R e^{-x^2} dx .$$

$$\Rightarrow \lim_{R \to +\infty} I_3^R = -e^{i\frac{\pi}{4}} \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{-\sqrt{\pi}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}} .$$

En faisant tendre R vers $+\infty$ dans $(*)$, on aura :

$$0 = \int_0^{+\infty} f(x)\, dx - \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} e^{ix^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$\Rightarrow \left(\int_0^{+\infty} \cos(x^2)\, dx\right) + \left(\int_0^{+\infty} \sin(x^2)\, dx\right) i = \frac{\sqrt{2\pi}}{4} + \frac{\sqrt{2\pi}}{4} i$$

Et alors, on a :

$$\int_0^{+\infty} \cos(x^2)\, dx = \int_0^{+\infty} \sin(x^2)\, dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4} .$$

<u>Exercice 42</u>. 1) $I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+3)} dx$

D'abord on remarque que :

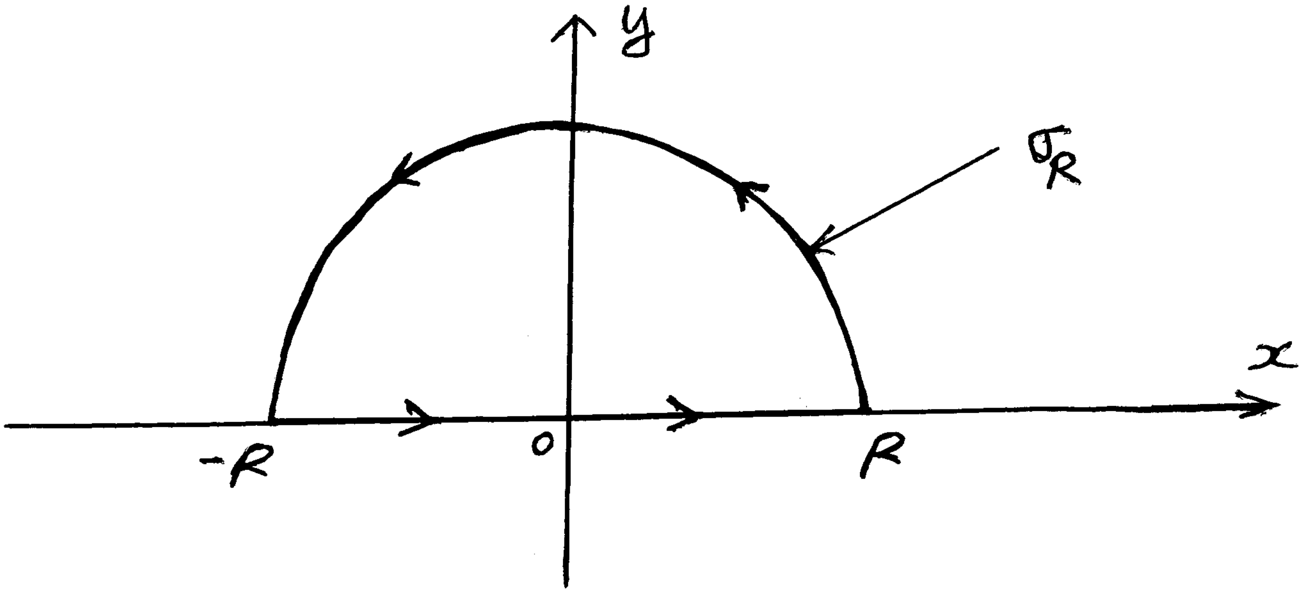
$$I_1 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+3)} dx = \frac{1}{2} J .$$

Posons, $f(z) := \dfrac{z^2}{(z^2+1)(z^2+3)}$.

Les pôles de f sont :

$z_0 = -i$, $z_1 = i$, $z_2 = -3i$ et $z_3 = 3i$

Pour tout $R \geq 4$, considérons le lacet γ_R constitué par l'intervalle $[-R, R]$ et σ_R le demi-cercle supérieur de centre 0 et de rayon R, orienté dans le sens direct.



$\gamma_R := [-R, R] \cup \sigma_R$. Et alors, on a :

$$I_R := \int_{\gamma_R} f(z)\, dz = \underbrace{\int_{[-R,R]} f(z)\, dz}_{I_1^R} + \underbrace{\int_{\sigma_R} f(z)\, dz}_{I_2^R}$$

$$\Rightarrow I_R = I_1^R + I_2^R \quad (*).$$

- Sur $[-R, R]$, $z = x$ et $dz = dx$; et alors, on a :

$$I_1^R = \int_{-R}^{R} f(x)\, dx \Rightarrow \lim_{R \to +\infty} I_1^R = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = J.$$

• Sur σ_R, pour tout $z \in \sigma_R$, il existe $t \in [0, \pi]$ tel que :

$z = Re^{it}$.

$$|f(z)| = \frac{|R^2 e^{2it}|}{|R^2 e^{2it}+1||R^2 e^{2it}+9|} \leq \frac{R^2}{(R^2-1)(R^2-9)}$$

$$\Rightarrow \sup_{z \in \sigma_R} |f(z)| \leq \frac{R^2}{(R^2-1)(R^2-9)}.$$

$$|I_2^R| = \left|\int_{\sigma_R} f(z)\,dz\right| \leq L(\sigma_R) \sup_{z\in\sigma_R} |f(z)|$$

$$\leq \pi R \frac{R^2}{(R^2-1)(R^2-9)} \xrightarrow[R \to +\infty]{} 0$$

$$\Rightarrow \lim_{R\to+\infty} I_2^R = 0$$

• D'autre part, les seuls pôles de f à l'intérieur de γ_R sont z_1 et z_3. Et alors, d'après le théorème des Résidus de Cauchy, on a :

$$I_R = \int_{\gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i \left[\operatorname{Res}(f, z_1) + \operatorname{Res}(f, z_3) \right]$$

Et comme z_1 et z_3 sont des pôles simples de f, on a :

$$\operatorname{Res}(f, z_1) = \frac{z^2|_{z=z_1}}{\frac{d}{dz}\left[(z^2+1)(z^2+9)\right]\Big|_{z=z_1}} = \frac{-1}{32i}.$$

$$\operatorname{Res}(f, z_3) = \frac{z^2 / z = z_3}{\frac{d}{dz}\left[(z^2+1)(z^2+9)\right] / z = z_3} = \frac{3}{32\, i}.$$

Donc, $I_R = 2\pi i \left[\frac{-1}{32i} + \frac{3}{32i} \right] = \frac{\pi}{8}$.

En faisant tendre R vers $+\infty$ dans $(\ast)$, on aura :

$\frac{\pi}{8} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx$; et alors, on a :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+9)}\, dx = \frac{\pi}{16}.$$

2) $I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2ix + 2 - 4i}$.

Posons : $f(z) := \frac{1}{z^2 - 2iz + 2 - 4i}$

Les pôles de f sont : $z_1 = 1+i$ et $z_2 = -1-3i$

Pour tout $R > 2$, considérons γ_R le lacet de 1).

Seul le pôle z_1 est à l'intérieur de γ_R. Et alors, d'après le théorème des Résidus de Cauchy, on a :

$I_R := \int_{\gamma_R} f(z)\, dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, z_1)$.

Et comme z_1 est un pôle simple de f, on a :

$$\mathrm{Res}(f, z_1) = \frac{1}{\frac{d}{dz}\left(z^2+2iz+2-4i\right)\Big/_{z=z_1}} = \frac{1}{2(1+2i)}$$

Donc : $I_R = 2\pi i \dfrac{1}{2(1+2i)} = \dfrac{2\pi}{5} + \dfrac{\pi}{5} i$.

• D'autre part, $I_R = \displaystyle\int_{[-R,R]} f(z)\,dz + \int_{\sigma_R} f(z)\,dz$

$$\Rightarrow \lim_{R\to+\infty} I_R = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx + \underbrace{\lim_{R\to+\infty}\int_{\sigma_R} f(z)\,dz}_{=0}$$

$$\Rightarrow \frac{2\pi}{5} + \frac{\pi}{5} i = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Donc : $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2ix+2-4i} = \frac{2\pi}{5} + \frac{\pi}{5} i.$$

<u>Remarque</u> : Comme on a :

$$\frac{1}{x^2+2ix+2-4i} = \frac{x^2+2}{x^4+8x^2-16x+20} + \frac{-2x+4}{x^4+8x^2-16x+20}\, i$$

On a : $$\begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+2}{x^4+8x^2-16x+20}\,dx = \frac{2\pi}{5} \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-2x+4}{x^4+8x^2-16x+20}\,dx = \frac{\pi}{5} \end{cases}.$$

3) $I_3 = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2+2x+2}\,dx$.

Posons : $f(z) := \dfrac{e^{iz}}{z^2+2z+2}$

f a deux pôles simples : $z_1 := -1+i$ et $z_2 := -1-i$.

Pour tout $R > 2$, soit γ_R le lacet de 1).

Seul le pôle z_1 est à l'intérieur de γ_R. Et alors, d'après le théorème des Résidus de Cauchy, on a :

$$I_R := \int_{\gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, z_1).$$

$$\operatorname{Res}(f, z_1) = \frac{e^{iz}\big|_{z=z_1}}{\frac{d}{dz}\left(z^2+2z+2\right)\big|_{z=z_1}} = \frac{e^{-1-i}}{2i}$$

$$\Rightarrow \quad I_R = 2\pi i \, \frac{e^{-1}e^{-i}}{2i} = \pi e^{-1} e^{-i}.$$

D'autre part, $I_R = \displaystyle\int_{[-R,R]} f(z)\,dz + \int_{\sigma_R} f(z)\,dz$

$$\Rightarrow \lim_{R\to+\infty} I_R = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx + \underbrace{\lim_{R\to+\infty}\int_{\sigma_R} f(z)\,dz}_{=0}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+2x+2}\,dx = \pi e^{-1} e^{-i}.$$

$$\Rightarrow \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+2x+2}\,dx\right) + \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2+2x+2}\,dx\right) i = \pi e^{-1}\left(\cos(1) - \sin(1)\, i\right)$$

Et alors on a :

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+2x+2}\,dx = \pi e^{-1}\cos(1). \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2+2x+2}\,dx = -\pi e^{-1}\sin(1) \end{cases}$$

4) $I_4 = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos(n\theta)}{5+3\cos\theta}\,d\theta \quad (n \in \mathbb{N})$

Posons $z = e^{i\theta} \Rightarrow dz = i e^{i\theta} d\theta \Rightarrow d\theta = \frac{-i}{z}\,dz$.

$\cos(n\theta) = \frac{1}{2}\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right)$ et $\cos\theta = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$. Donc :

$$I_4 = \int_{\mathcal{C}(0,1)} \frac{\frac{1}{2}\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right)}{5 + \frac{3}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)} \left(\frac{-i}{z}\right) dz$$

$$\Rightarrow \quad I_4 = -i \int_{\mathcal{C}(0,1)} \frac{z^{2n}+1}{z^n\left(3z^2+10z+3\right)}\,dz$$

Posons : $f(z) := -i \dfrac{z^{2n}+1}{z^n(3z^2+10z+3)}$.

Les pôles de f sont :

$z_0 := 0$ un pôle d'ordre n

$z_1 := \frac{-1}{3}$ et $z_2 := -3$ des pôles simples.

Seuls les pôles z_0 et z_1 sont à l'intérieur de $\mathcal{C}(0,1)$.

Et alors, d'après le théorème des Résidus de Cauchy, on a :

$$I_4 = \int_{\mathcal{C}(0,1)} f(z)\, dz = 2\pi i \left[\operatorname{Res}(f, z_0) + \operatorname{Res}(f, z_1)\right].$$

Le développement de Laurent de f en $z_0 = 0$ est :

$$f(z) = \frac{-i}{z^n}\left(\frac{9}{24}\frac{1}{1+3z} - \frac{1}{24}\frac{1}{1+\frac{z}{3}}\right)$$

$$= \frac{-i}{z^n}\left[\frac{9}{24}\sum_{n\geq 0}(-1)^n 3^n z^n - \frac{1}{24}\sum_{n\geq 0}(-1)^n\left(\frac{z}{3}\right)^n\right] \quad \left(|z|<\frac{1}{3}\right)$$

Donc : $\operatorname{Res}(f,0) = \dfrac{-i}{24}(-1)^{n-1}\left(3^{n+1} - \dfrac{1}{3^{n-1}}\right)$

$$\operatorname{Res}\left(f,\frac{-1}{3}\right) = \lim_{z\to\frac{-1}{3}}\left(z+\frac{1}{3}\right)f(z) = -i(-1)^n\frac{1+3^{2n}}{8.3^n}$$

Donc $I_4 = 2\pi i\left[\dfrac{-i}{24}(-1)^{n-1}\left(3^{n+1}-\dfrac{1}{3^{n-1}}\right) - i(-1)^n\dfrac{1+3^{2n}}{8.3^n}\right]$.

Et alors, on a : $$\int_0^{2\pi}\frac{\cos(n\theta)}{5+3\cos\theta}\, d\theta = \frac{\pi}{2}\frac{(-1)^n}{3^n}.$$

Exercice 43. Réponses :

1) $$I_1 = \int_{C(0,3)} \frac{e^{\alpha z}}{z^2(z^2+2z+2)}\, dz = \pi i\left(\alpha - 1 + e^{-\alpha}\cos\alpha\right).$$

2) $$I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^6+1} = \frac{\pi}{3}.$$

3) $$I_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2(x^2+2x+2)}\, dx = \frac{7\pi}{50}.$$

Exercice 44. Réponses :

1) $$I_1 = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3 - 2\cos\theta + \sin\theta} = \pi.$$

2) $$I_2 = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + b\sin\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}.$$

3) $$I_3 = \int_0^{2\pi} \frac{\cos(3\theta)}{5 - 4\cos\theta}\, d\theta = \frac{\pi}{12}.$$

4) $$I_4 = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(5 - 3\sin\theta)^2} = \frac{5\pi}{32}.$$

5) $$I_5 = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(mx)}{x^2+1}\, dx = \frac{\pi}{2} e^{-m}.$$

6) $$I_6 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin(\pi x)}{x^2+2x+5}\, dx = \pi e^{-2\pi}.$$ ./.