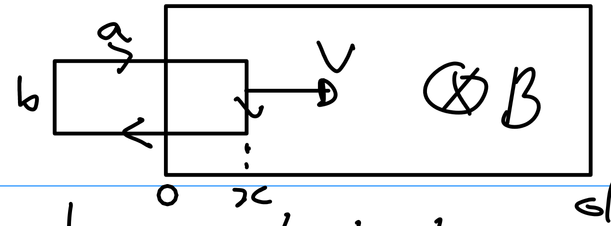
Exercice 1 :



1) Le flux magnétique à travers La bobine

* 1er cas : $x < 0$ $\quad \Phi = 0$

* 2ème cas : $0 < x < a$

Dans ce cas La bobine entre dans le champ :

$$\Phi = NBxb$$

* 3eme cas : $a < x < d$

La bobine est entièrement dans le champ

$$\Phi = NBab$$

* 4ème cas : $d < x < d+a$

La bobine quitte le champ

$$\Phi = NbB(a+d-x)$$

* 5eme cas : $x > d+a$

La bobine quitte complètement le champ

$$\Phi = 0 .$$

2) La force électromotrice induite.

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d\phi}{dx}\frac{dx}{dt} = -\frac{d\phi}{dx} v$$

* 1^{er} cas : $\phi = 0 \Rightarrow e = 0$
* $2^{ème}$ cas : $\phi = NBxb$

$$e = -\frac{d\phi}{dx} v = -NBbV$$

* $3^{ème}$ cas : $a < x < d$, $\phi = Nbab$

$$e = -\frac{d\phi}{dx} v = 0$$

* $4^{ème}$ cas : $d < x < d+a$, $\phi = NBb(a+d-x)$

$$e = -\frac{d\phi}{dx} v = NbBV$$

* $5^{ème}$ cas : $x > d+a$ $\quad \phi = 0$

$$\Rightarrow e = 0$$

4) on a $e = Ri \Rightarrow i_{ind} = \frac{e}{R}$

$2^{ème}$ cas : $i_{ind} = -\frac{NBVb}{R}$ $(0 < x < a)$

$4^{ème}$ cas $i_{ind} = \frac{NBVb}{R}$ $(d < x < d+a)$

5) Le sens du courant induit

<u>$2^{ème}$ cas :</u> $0 < x < a$

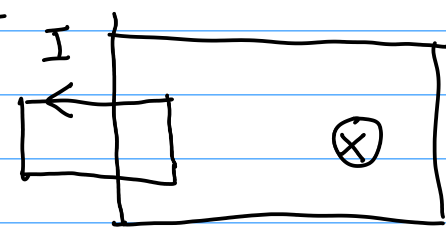
<u>Loi de Lenz :</u>

Le flux de B à travers la surface augmente

Le champ induit va s'opposer à cette augmentation

et est dans le sens inverse de $\vec{B}$

règle de la main droite ⇒ sens de courant



<u>La loi de Faraday</u>

$\vec{n}$ est dans le sens de $\vec{B}$

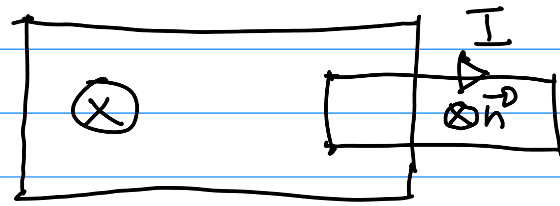
$\Delta\phi > 0 \Rightarrow e < 0$: Le courant induit est dans le sens négatif

<u>$4^{ème}$ cas :</u> $d < x < d+a$

Loi de Lenz :

Le flux de B à travers la surface diminue

Le champ induit va s'opposer à cette diminution
Le champ induit sera dans le sens de B
règle de la main droite ⇒ sens du courant



Loi de Faraday :

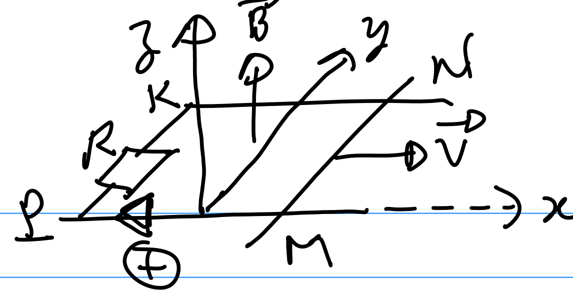
$\vec{n}$ est dans le sens de $\vec{B}$

$\Delta\Phi < 0 \rightarrow e > 0$: le courant est dans le sens positif.

5) Puissance $P = ei = \frac{e^2}{R}$

$e = \pm 2 \times 0,04 \times 2 \times 1 = \pm 16 \times 10^{-2}\ V$

$P = \frac{16^2\ 10^{-4}}{16} = 16 \cdot 10^{-4}\ W$



Exercice 2 :

1) f.é.m :

$$e = -\frac{d\phi}{dt}$$

$$d\phi = \vec{B} \cdot \vec{ds} \quad , \quad \vec{B} = B\vec{e_z}$$

En choisissons un sens de circulation positive sur le circuit tel et qu'il et indiqué sur la figure

$$\vec{ds} = -dx\,\vec{e_x} \wedge (L\,\vec{e_y})$$

$$= -L\,V(t)\,dt\,\vec{e_z}$$

$$\Rightarrow d\phi = -L\,V(t)\,B\,dt$$

$$\Rightarrow e = -\frac{d\phi}{dt} = L\,V(t)\,B$$

2) $i_{induit} = \frac{e}{R} = \frac{L\,V(t)\,B}{R}$

$$i_{induit} > 0$$

il a donc le m̂ sens que le sens choisi

3) Le courant induit va créer un champ magnétique $\vec{b}$ dans le sens contraire de $\vec{B}$ pour s'opposer à l'augmentation de son flux qui lui a donné naissance.

en accord avec la loi de Lenz.

4) La force de Laplace qui s'exerce sur le barreau.

$$\vec{F}_L = \oint d\vec{F}_L = \int_N^M + \int_M^P + \int_P^K + \int_K^N$$

$$= \int_N^M d\vec{F}_L = I \int_N^M d\vec{l} \wedge \vec{B}$$

$(\vec{F}/\text{barreau})$

$$= I \int_{y_N}^{y_M} d\vec{l} \wedge B\vec{e}_z$$

$$= I \int_L^0 dy\, \vec{e}_y \wedge B\vec{e}_z$$

$$= i_{induit} B \int_L^0 dy\, \vec{e}_x$$

$$= -i_{induit} L B \vec{e}_x$$

on a $i_{ind} = \frac{BLV(t)}{R} \Rightarrow \vec{F}_L = -\frac{B^2L^2V(t)}{R}\vec{e}_x$

5) Action de $\vec{F}$

Elle s'oppose au mouvement du barreau (loi de Lenz)

6) D'après la loi fondamentale de la dynamique

$$\vec{F}_L = m\frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow -\frac{B^2L^2v(t)}{R}\vec{e}_x = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{m\,dv}{dt}\vec{e}_x$$

$$\frac{m\,dv}{dt} = -\frac{B^2L^2v(t)}{R}$$

$$\frac{dv}{v(t)} = -\frac{B^2L^2}{mR}dt = -\frac{dt}{\tau}$$

avec $\tau = \dfrac{mR}{B^2L^2}$ st le temp de réponse de circuit.

$$v(t) = V_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

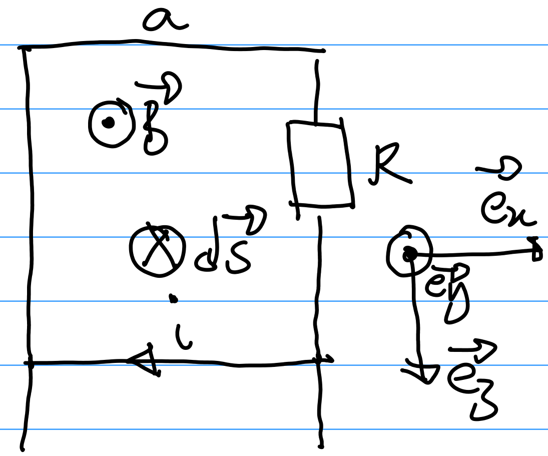
7) $i_{ind} = \dfrac{BLv(t)}{R} = \dfrac{BLV_0}{R}e^{-\frac{t}{\tau}} = i_{ind_0}e^{-\frac{t}{\tau}}$

avec $i_{ind_0} = \dfrac{BLV_0}{R}$

Exercice 3

Le flux augmente lors du mouvement de la barre selon la loi de Lenz le champ induit sera dans le sens inverse du champ qui lui donne naissance

Cette orientation impose le sens de la surface ds permettant de calculer le flux magnétique



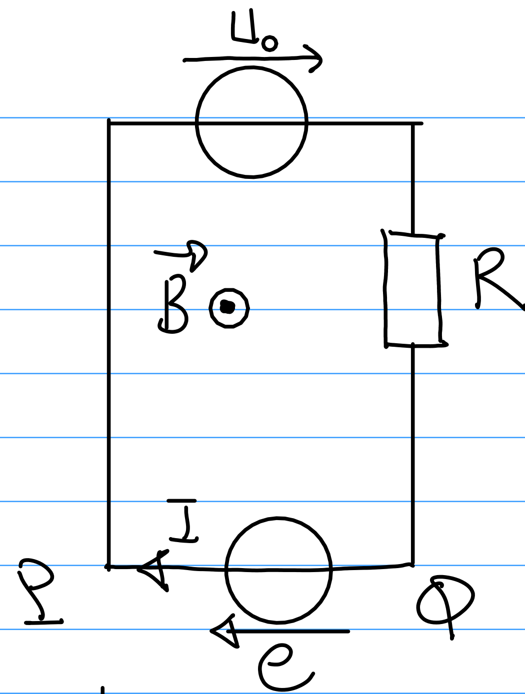
$$\vec{dS} = -dS\,\vec{e_y}$$

1) $$\phi = \iint \vec{B}\cdot\vec{dS} = \iint B\,\vec{e_y}\,(-dS)\,\vec{e_y}$$
$$= -B.S = -B\,a\,z(t)$$

2) $$e = -\frac{d\phi}{dt} = \frac{-d\phi}{dz}\cdot\frac{dz}{dt} = B\,a\,\dot{z}(t) = a\,B\,V(t).$$

3) Selon la loi de Lenz i est dans le sens inverse de $\vec{e_x}$

4)



5) Courant induit :

on a : $U_0 + e - Ri = 0$

$$i = \frac{U_0 + e}{R} = \frac{U_0 + aBv(t)}{R}$$

6) $$\vec{F_L} = \int_{tige} i\,\vec{dl} \wedge \vec{B} = \int i(-dx\vec{e_x}) \wedge B\vec{e_y} = -iaB\vec{e_z}$$

on trouve bien la loi de lenz à savoir que $\vec{F_L}$ est une force freinante qui s'oppose au mvt.

7) On applique PFD à la tige PQ

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{F_L}$$

avec $\vec{P} = m\vec{g} = mg\vec{e_z}$, $\vec{F_L} = -iaB\vec{e_z}$

$$\Rightarrow m\frac{dv}{dt} = mg - iaB$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dt} = g - \frac{iaB}{m}$$

8) Le système d'équation couplé :

$$\begin{cases} i = \dfrac{U_0 + aBv}{R} \\ \dfrac{dv}{dt} = g - \dfrac{iaB}{m} \end{cases} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = g - \frac{\frac{U_0 + aBv}{R} aB}{m}$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dt} = g - \frac{(U_0 + aBv)aB}{Rm}$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dt} = g - \frac{U_0 aB}{mR} - \frac{a^2B^2 v}{mR}$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{a^2B^2}{mR} v = g - \frac{U_0 aB}{mR}$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = g - \frac{BaU_0}{mR} \qquad \left(\tau = \frac{mR}{a^2B^2}\right)$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\tau}v + g - \frac{BaU_0}{mR}$$

$$v(t) = Ce^{-\frac{t}{\tau}} - \frac{g - \frac{BaU_0}{mR}}{-\frac{1}{\tau}} \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}$$

$$= Ce^{-\frac{t}{\tau}} + \tau\left(g - \frac{BaU_0}{mR}\right)$$

à $t=0$ $\quad V = 0 = C + \tau\left(g - \frac{BaU_0}{mR}\right)$

$$\Rightarrow C = -\tau\left(g - \frac{BaU_0}{mR}\right)$$

$$\Rightarrow v(t) = -\tau\left(g - \frac{BaU_0}{mR}\right)e^{-\frac{t}{\tau}} + \tau\left(g - \frac{BaU_0}{mR}\right)$$

$$= \tau\left(g - \frac{BaU_0}{mR}\right)\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

9) Pour que la barre tombe il faut que

$$V > 0 \Rightarrow g - \frac{BaU_0}{mR} > 0$$

$$g > \frac{BaU_0}{mR} \Rightarrow R > \frac{BaU_0}{mg}$$

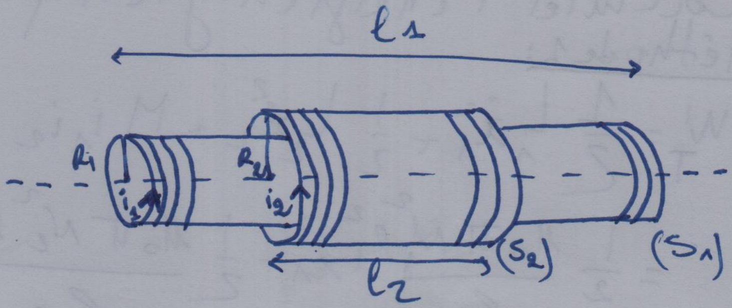
A.N : $R > 7{,}6\ \Omega$

10) La vitesse limite prise par la barre :

$$\lim_{t \to +\infty} V(t) = \tau\left(g - \frac{BaU_0}{mR}\right)$$

Exercice 4 :

1) Calculer l'inductance propre de chaque solénoïde :



Pour S_1 :

Le courant i_1 traversant le solénoïde (S_1), supposé très long, produit à l'intérieur de (S_1) un champ $B_1 = \mu_0 \frac{N_1}{l_1} i_1$

le flux de B_1 à travers S_1 est : $\Phi_{11} = B_1 S_1 . N_1 = \mu_0 \frac{N_1^2}{l_1} R_1^2 \pi i_1$
$= L_1 i_1$

$\Rightarrow L_1 = \frac{\mu_0 \pi N_1^2 R_1^2}{l_1}$ est l'inductance propre de (S_1).

Pour S_2

$\Phi_{22} = B_2 S_2 N_2$ avec $B_2 = \mu_0 \frac{N_2}{l_2} i_2$ et $S_2 = \pi R_2^2$

$\Rightarrow \Phi_{22} = \frac{\mu_0 \pi N_2^2 R_2^2}{l_2} i_2 = L_2 i_2$

$\Rightarrow L_2 = \frac{\mu_0 \pi N_2^2 R_2^2}{l_2}$ est l'inductance propre de (S_2).

2) Calculer l'inductance mutuelle

$\Phi_{12} = \vec{B}_1 . \vec{S}_2 . N_2 = \mu_0 \frac{N_1}{l_1} i_1 \pi R_1^2 . N_2$ (B_1 à l'extérieur de (S_1) est nul)

$= \frac{\mu_0 \pi N_1 N_2 R_1^2}{l_1} i_1 = M i_1$

si on va calculer $\Phi_{21} = \vec{B}_2 . \vec{S}_1 . \underbrace{\left(\frac{N_1}{l_1} \times l_2\right)}$ c'est le nombre de spire de (S_1) dans La longueur l_2

$\Phi_{21} = \frac{\mu_0 N_2}{l_2} i_2 \pi R_1^2 \frac{N_1}{l_1} \times l_2$

$= \frac{\mu_0 N_1 N_2 \pi R_1^2}{l_1} i_2 = M i_2$

$\Longrightarrow M = \frac{\mu_0 \pi N_1 N_2 R_1^2}{l_1}$

3) Calculer l'énergie magnétique totale du système.

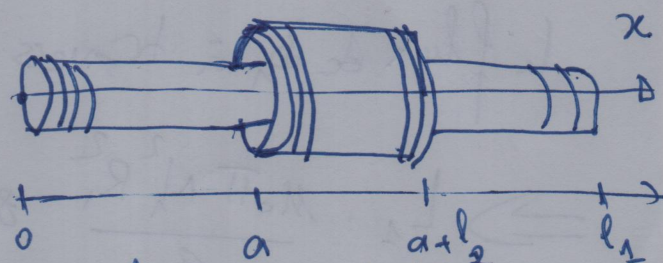
<u>Méthode 1 :</u>

$$W_T = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\mu_0 \pi N_1^2 R_1^2}{l_1} i_1^2 + \frac{1}{2} \frac{\mu_0 \pi N_2^2 R_2^2}{l_2} i_2^2 + \frac{\mu_0 \pi N_1 N_2 R_1^2}{l_1} i_1 i_2$$

$$= \frac{1}{2} \mu_0 \pi \left[\frac{N_1^2 R_1^2 i_1^2}{l_1} + \frac{N_2^2 R_2^2 i_2^2}{l_2} + \frac{2 N_1 N_2 R_1^2}{l_1} i_1 i_2 \right]$$

<u>Méthode 2 :</u> $W_T = \iiint \frac{B_T^2}{2\mu_0} dV$



<u>3 régions à discuter :</u>

<u>région 1 : $0 < x < a$</u> : $B = B_1$

$$\iiint \frac{B^2}{2\mu_0} dV = \frac{B_1^2}{2\mu_0} \pi R_1^2 a$$ ($\pi R_1^2 a$ est le volume de cylindre dont la longueur est a et la section de rayon R_1)

<u>région 2 :</u> $a < x < l_2 + a$

Dans cette région on a 2 cylindre (cylindre de rayon R_1 et cylindre de rayon R_2)

donc * si $0 < R < R_1$ $B = B_1 + B_2$

$$\iiint \frac{B^2}{2\mu_0} dV = \frac{(B_1 + B_2)^2}{2\mu_0} l_2 \pi R_1^2$$ est l'énergie emmagasinée à l'intérieur du cylindre 1

* si $R_1 < R < R_2$, le champ B_1 est nul à l'extérieur du $(S_1) \Rightarrow B = B_2$

donc $$\iiint \frac{B^2}{2\mu_0} dV = \frac{B_2^2}{2\mu_0} \underbrace{\pi l_2 (R_2^2 - R_1^2)}_{\text{Le volume de la région entre } (S_1) \text{ et } (S_2)}$$

<u>région 3</u> $a + l_2 < x < l_1 \Rightarrow B = B_1$

$$\iiint \frac{B^2}{2\mu_0} dV = \frac{B_1^2}{2\mu_0} \pi R_1^2 (l_1 - a - l_2)$$

Alors l'énergie totale est $$W_T = \frac{B_1^2}{2\mu_0} \pi a R_1^2 + \frac{(B_1 + B_2)^2}{2\mu_0} l_2 \pi R_1^2 + \frac{B_2^2}{2\mu_0} \pi l_2 (R_2^2 - R_1^2) + \frac{B_1^2}{2\mu_0} \pi R_1^2 (l_1 - a - l_2)$$

alors $W_T = \frac{\pi \mu_0^2 N_1^2}{2\mu_0 l_1^2} i_1^2 a R_1^2 + \frac{1}{2\mu_0}\left(\frac{\mu_0 N_1 i_1}{l_1} + \frac{\mu_0 N_2 i_2}{l_2}\right)^2 l_2 \pi R_1^2 + \frac{\mu_0^2 N_2^2 i_2^2}{l_2^2\, 2\mu_0}\pi l_2 \left(R_2^2 - R_1^2\right)$

$$+ \frac{\mu_0^2 N_1^2 i_1^2}{2\mu_0 l_1^2}\pi R_1^2 \left(l_1 - a - l_2\right)$$

$$= \frac{\pi\mu_0}{2}\left[\cancel{\frac{N_1^2 R_1^2 a\, i_1^2}{l_1^2}} + \cancel{\frac{N_1^2 i_1^2 l_2 R_1^2}{l_1^2}} + \cancel{\frac{N_2^2 i_2^2}{l_2} R_1^2} + \frac{2 N_1 N_2 i_1 i_2 R_1^2}{l_1} + \frac{N_2^2 i_2^2}{l_2} R_2^2 \right.$$

$$\left. - \cancel{\frac{N_2^2 i_2^2 R_1^2}{l_2}} + \frac{N_1^2 i_1^2}{l_1} R_1^2 - \cancel{\frac{N_1^2 i_1^2 R_1^2}{l_1^2} a} - \cancel{\frac{N_1^2 i_1^2}{l_1^2} R_1^2 l_2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\mu_0\pi\left[\frac{N_1^2 i_1^2 R_1^2}{l_1} + \frac{N_2^2 i_2^2}{l_2} R_2^2 + 2\frac{N_1 N_2 i_1 i_2 R_1^2}{l_1}\right]$$