Université Moulay Ismail
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
et Informatique

Année universitaire 2019-20
SMIA(S4)
Analyse Numérique

Série n° 4
(Intégration et dérivation numérique)

Exercice 1:
Soient $t_1 = -1,\ t_2 = \alpha,\ t_3 = +1$, **où** $\alpha \in \mathbb{R}$ **tel que** $|\alpha| < 1$.
Etant donnés ces trois points, nous sommes intéressés à trouver trois nombres (poids) $\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3$ **qui définiront la formule de quadrature**

$$J(g) = \sum_{j=1}^{3} \omega_j g(t_j) = \omega_1 g(-1) + \omega_2 g(\alpha) + \omega_3 g(1),$$

où g **est une fonction continue donnée sur** $[-1, +1]$.

1. **Trouver les poids** $\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3$ **en fonction de** α **tels que** $J(p) = \int_{-1}^{+1} p(t)dt$ **pour tout polynôme** p **de degré** 2.
2. **Existe-t-il** α **tel que** $J(p) = \int_{-1}^{+1} p(t)dt$ **pour tout polynôme** p **de degré** 3? **Si oui, que valent** α **et** $\omega_1,\ \omega_2, \omega_3$?

Exercice 2:
Soient $x_1, x_2 \in [-1, 1]$ ($x_1 < x_2$) **et** $w_1,\ w_2 \in \mathbb{R}$. **Soit** $f \in \mathcal{C}([-1,1], \mathbb{R})$.**On considère la formule de quadrature à deux points suivante**

$$J(f) = w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2)$$

Déterminer x_1, x_2, w_1 **et** w_2 **pour que cette formule de quadrature soit exacte pour les polynômes du plus haut degré possible. Que remarquez-vous ?**

Exercice 3:
Soient les formules d'intégration numérique ci-dessous:

$$\int_a^{a+h} f(x)dx \simeq \alpha_0 f(a) + \alpha_1 f(a + \frac{h}{3}) + \alpha_2 f(a + \frac{2h}{3}) + \alpha_3 f(a+h) \quad (1)$$

$$\int_0^1 g(t)dt \simeq Ag(0) + Bg(t_0) \quad (2)$$

$$\int_{-1}^1 g(t)dt \simeq \alpha g(-1) + \beta g'(0) + \gamma g(1) \quad (3)$$

$$\int_{-1}^1 g(t)dt \simeq \alpha g(-1) + \beta g''(0) + \gamma g(1) \quad (4)$$

1. **Donner le degré d'exactitude et l'erreur d'intégration pour la formule (4) cidessus.**

2. Donner la méthode composite associée à (4) et l'erreur d'intégration sur un intervalle $[a, b]$.

3. Facultatif: Reprendre la question 1) pour les 3 autres formules.

Exercice 4:

Le polynôme de Legendre de degré n est défini par

$$L_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \left(x^2 - 1\right)^n \quad \textbf{avec } L_0(x) = 1.$$

1. Montrer que $\forall k = 0, 1, \ldots, n-1$, on a $\int_{-1}^{1} x^k L_n(x) dx = 0.$

2. En déduire que $\forall m \neq n \quad \int_{-1}^{1} L_m(x) L_n(x) dx = 0.$

3. Montrer que $L_0, L_1, ..., L_n$ forment une base de $\mathbb{P}_n$.

4. Montrer que $\int_{-1}^{1} [L_n(x)]^2 \, dx = \frac{2}{2n+1}.$

5. L_n a exactement n zéros réels distincts tous compris dans l'intervalle ouvert $]-1, +1[$. Ces zéros sont appelés les points de Gauss.

6. Montrer que les polynômes de Legendre vérifient:

$$(n+1)L_{n+1}(x) = (2n+1)xL_n(x) - nL_{n-1}(x)$$

7. Déterminer les premiers polynômes de Legendre.
   Soient $(s_i)_{i=0,\ldots,n}$ les $n+1$ racines de L_{n+1} et soit $p \in \mathbb{P}_{2n+1}$.

   (a) Ecrire le polynôme d'interpolation $\Pi_n p$ de p de degré n dans la base de Lagrange $(l_i)_{i=0,\ldots,n}$ qui interpole p en $(s_i)_i$.

   (b) On pose le polynôme $q(s) =_{Def} p(s) - \Pi_n p(s)$, montrer qu'il existe des constantes $(\beta_k)_{k=0,\ldots,n}$ tels que $q(s) = (\sum_{k=0}^{n} \beta_k L_k(s)) \prod_{i=0}^{n} (s - s_i)$

   (c) En déduire que La formule de Gauss Legendre à $n+1$ points $(n \in \mathbb{N}^*)$ est exacte pour des polynômes de degré $r = 2n+1$. c.à.d.

$$I_{G,n}(p) = \int_{-1}^{1} p(s) ds \quad \forall p \in \mathbb{P}_{2n+1}$$

Exercice 5:

Soit le polynôme de Legendre

$$P_4(x) = \frac{1}{2^4 \times 4!} \frac{d^4}{dx^4} \left[\left(x^2 - 1\right)^4 \right] = \frac{1}{8} \left(35x^4 - 30x^2 + 3\right).$$

1. **Calculer les quatre racines réelles de** P_4 **(qu'on notera** $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$**) avec une précision de** 10^{-8}.

2. **Montrer que** $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^k P_4(x)dx = 0 \quad \forall k = 0, 1, 2$ **et** 3.

3. **On pose** $\pi(x) = \displaystyle\prod_{k=1}^{4} (x - x_k)$.

4. **En déduire que** $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^k \pi(x)dx = 0 \quad \forall k = 0, 1, 2$ **et** 3.

5. **Soit** $\psi \in C^8([-1,1], \mathbb{R})$ **et** H **son polynôme d'interpolation d'Hermite aux points** x_1, x_2 , x_3 **et** x_4. **On pose**

$$A_j = \int_{-1}^{1} \left[1 - 2(x - x_j) \varphi_j'(x_j)\right] \varphi_j^2(x)dx \text{ et } B_j = \int_{-1}^{1} (x - x_j) \varphi_j^2(x)dx$$

avec $(\varphi_j)_{1 \leq j \leq 4}$ **base de Lagrange associée aux points** x_1, x_2 , x_3 **et** x_4.

   (a) **Montrer que** $(x - x_j)\varphi_j^2(x) = \dfrac{\pi(x)}{\pi'(x_j)} \quad \forall j = 1, 2, 3$ **et** 4.

   (b) **Montrer que** $B_j = 0$, $\forall j = 1, 2, 3$ **et** 4.

   (c) **Montrer alors que**

$$\int_{-1}^{1} \psi(x)dx = \sum_{j=1}^{4} A_j \psi(x_j) + \frac{\psi^{(8)}(\lambda)}{3472875}, \quad \textbf{où } \lambda \in]-1, 1[;$$

   et déterminer les A_j.

6. **Par un changement de variables, montrer que**

$$I = \int_{a}^{b} f(u)du = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^{1} f\left(a + \frac{(b-a)}{2}(x+1)\right) dx$$

7. **En déduire que**

$$I \simeq \frac{b-a}{2} \sum_{j=1}^{4} A_j f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{(b-a)}{2} x_j\right)$$

8. **Application :**

   (a) **Calculer** $J = \displaystyle\int_{1}^{5} \frac{dt}{t^5}$ **(à** 10^{-6}**)**

(b) **Calculer l'approximation de J par la méthode de Gauss-Legendre précédente.**

(c) **Conclure.**

Exercice 6:(Facultatif)
Soit f une fonction continue sur $[a,b]$, et soient $x_0, x_1, \ldots, x_n$ des points distincts de $]a,b[$

1. **Montrer que $\forall k \in \{0,1,\ldots,n\}$ on a $\forall x \in [a,b]$**

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0)f[x_0,x_1] + \ldots + (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_k)f[x,x_0,x_1,\ldots,x_k]$$

2. **Si f est de classe $C^{n+1}[a,b]$, montrer que $\forall x \in [a,b]$ $\exists \lambda_x \in [a,b]$ tel que:**

$$f[x,x_0,x_1,\ldots,x_n] = \frac{f^{n+1}(\lambda_x)}{(n+1)!}$$

3. **Montrer que $f^{(p)}[x,x_0,x_1,\ldots,x_n] = f[\underbrace{x,\ldots,x}_{(p+1)\textbf{fois}},x_0,x_1,\ldots,x_n]$**

Exercice 7:
Soientt $f \in C^5([a,b])$ et soient x_0,x_1,x_2,x_3,x_4 des points de $[a,b]$ tels que $x_i = a+ih$, Montrer que

$$f'(x_0) = \frac{1}{12h}[-3f(x_4) + 16f(x_3) - 36f(x_2) + 48f(x_1) - 25f(x_0)] + \frac{h^4}{5}f^{(5)}(h)$$