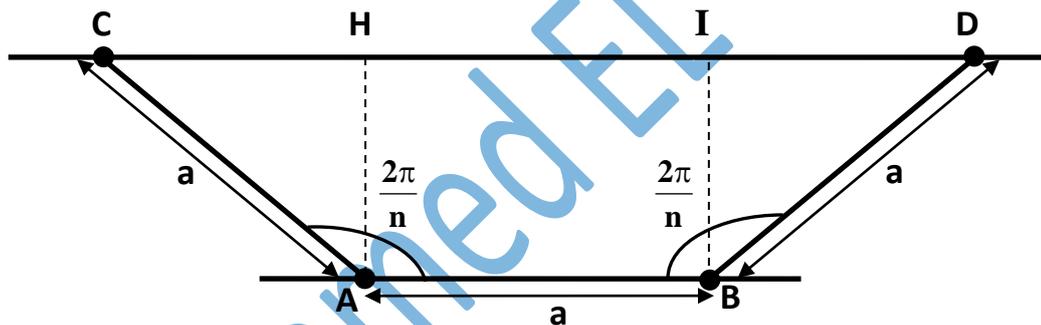


Solution de la série N°2

EXERCICE 1

Considérons une rangée de paramètre a d'un réseau périodique. Soit deux nœuds successives A et B tel que $\overline{AB} = a$ de vecteur directeur de la rangée est \overline{AB} (ou \overline{BA}).

Si on a un axe d'ordre $n \perp$ en A , il en sera de même en B (périodicité du réseau). L'application d'une rotation de $\frac{2\pi}{n}$ en A , amène le nœud B en nœud C et l'application d'une rotation de $\frac{2\pi}{n}$ (en sens inverse) en B conduit A en D (Figure ci-dessus)



Les droites parallèles (AB) et $(CD) \in$ à la même famille de rangées. Donc la répartition des nœuds se fait de façon périodique respectant le paramètre a .

\Rightarrow la distance entre deux nœuds quelleconque est un multiple de a .

$\Rightarrow \overline{CD} = k \times a \Rightarrow \overline{CH} + \overline{HI} + \overline{ID} = k \times a$ (k est un nombre entier)

Avec $[\overline{HI} = a ; \sin(\frac{2\pi}{n} - \frac{\pi}{2}) = \frac{\overline{CH}}{a} = \frac{\overline{ID}}{a} \Rightarrow \overline{CH} = \overline{ID} = a \cdot \sin(\frac{2\pi}{n} - \frac{\pi}{2}) = -a \cdot \cos(\frac{2\pi}{n})]$

$\Rightarrow a - 2a \cos(\frac{2\pi}{n}) = k \times a \Rightarrow a(1 - 2\cos(\frac{2\pi}{n})) = k \times a \Rightarrow \cos(\frac{2\pi}{n}) = \frac{1-k}{2}$

$\Rightarrow -1 \leq \cos(\frac{2\pi}{n}) \leq 1 \Rightarrow -1 \leq \frac{1-k}{2} \leq 1$

On trouve $-1 \leq k \leq 3$ (k entier)

Dressons un tableau avec les valeurs possibles de k et déduisons alors les valeurs possibles de n .

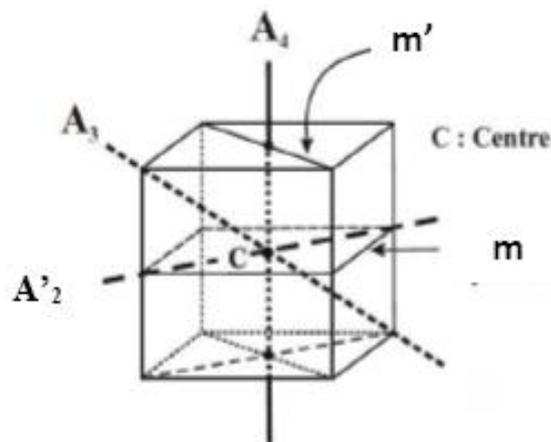
K	$\frac{1-k}{2}$	$\frac{2\pi}{n}$	n
-1	1	2π	1
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	6
1	0	$\frac{\pi}{2}$	4
2	$-\frac{1}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	3
3	-1	π	2

Conclusion : $n = 5$ et $n > 6 \notin$ aux solutions possibles \Rightarrow les axes d'ordre 5 et d'ordre supérieur à 6 n'existent donc pas dans un réseau périodique.

EXERCICE 2

- 1) Le nombre et les positions des différents éléments de symétrie dans le cas d'un cube et d'un prisme droit à base hexagonale sont regroupés dans les tableaux ci-dessous.

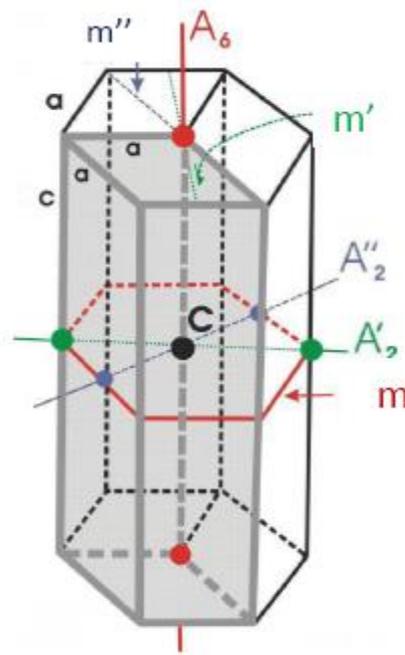
Cube simple



Eléments de symétrie	Positions	Nombres
Axe A_3	Les grandes diagonales (droites joignant deux sommets opposés).	4 A_3
Axe A_4 (A_2) *	Droites joignant les centres de deux faces opposées.	3 A_4
Axe A_2'	Droites joignant les milieux de deux arêtes opposées.	6 A_2'
Miroirs (m)	Plans parallèles à deux faces opposées et passant par le centre du cube (plans $\perp A_4$)	3 m
Miroirs (m')	Plans contenant deux arêtes opposées (plans $\perp A_2'$)	6 m'
Centre d'inversion (i)	Centre du cube (le point d'intersection de tous les éléments de symétrie)	1 $C \equiv (i)$

* L'axe A_4 contient un A_2

Prisme droit à base hexagonale



Éléments de symétrie	Positions	Nombres
Axe A_6 (A_3, A_2)*	Droite passant par le centre des deux bases hexagonales opposés (\perp aux deux bases)	1 A_6
Axe A'_2	Droites passant les milieux de deux arêtes verticales opposées.	3 A'_2
Axe A''_2	Droites passant par les centres de deux faces verticales opposées.	3 A''_2
Miroirs m	Plan parallèle aux bases hexagonales opposées et passant par le centre du prisme ($\perp A_6$)	1 m
Miroirs m'	Plans // à A_6 passant par les milieux des arêtes horizontales opposées : plans $\perp A'_2$	3 m'
Miroirs m''	Plans // à A_6 contenant deux arêtes verticales opposées : plan $\perp A''_2$	3 m''
Centre d'inversion (i)	Centre du prisme (le point d'intersection de tous les éléments de symétrie)	1 $C \equiv (i)$

* A_6 contient les axes A_2 et A_3

- 2) La maille élémentaire pour le prisme droit est indiquée sur la figure du prisme droit à base hexagonale, il s'agit d'un parallélépipède à base losangique (encadré en gris)
- 3) Pour établir une classe de symétrie, on trie tout d'abord les éléments de symétrie selon chaque orientation cristallographique. Les axes sont parallèles et les miroirs sont perpendiculaires. On en déduira la classe en écrivant ces éléments dans l'ordre des orientations cristallographiques.

Cube simple

Orientations	Eléments de symétrie	classe
[100] = axe (Ox)	$(A_4 \perp m) : \frac{4}{m}$	$\frac{4}{m} 3 \frac{2}{m}$ \updownarrow $m 3 m$
[111] = grande diagonale	$A_3 : 3$	
[110] = diagonale d'une face	$(A'_2 \perp m') : \frac{2}{m}$	

Prisme droit à base hexagonale

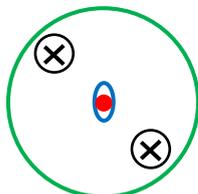
Orientations	Eléments de symétrie	classe
[001] = axe (Oz)	$(A_6 \perp m) : \frac{6}{m}$	$\frac{6}{m} \frac{2}{m} \frac{2}{m}$ \updownarrow $\frac{6}{m} mm$
[110] = diagonale de la base hexagonale*	$A'_2 \perp m' : \frac{2}{m}$	
[120] = droite joignant les milieux de deux arêtes opposés de la base hexagonale**	$(A''_2 \perp m'') : \frac{2}{m}$	

* // aux droites passant par les milieux de deux arêtes verticales opposées.

** // aux droites passant par les centres de deux faces verticales opposées.

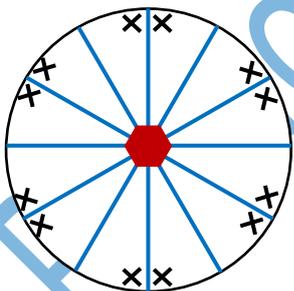
EXERCICE 3

1-



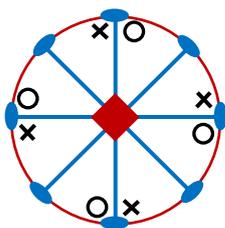
L'association d'un axe A_2 et d'un centre (i) appartient à A_2 entraîne un miroir m (en vert) perpendiculaire à A_2 et contenant le centre de symétrie (i).

2-



L'association d'un axe A_6 et d'un miroir m contenant cet axe entraîne six miroirs (en bleu \perp au cercle) faisant entre eux un angle de $\frac{\pi}{6}$ et leur intersection l'axe A_6 .

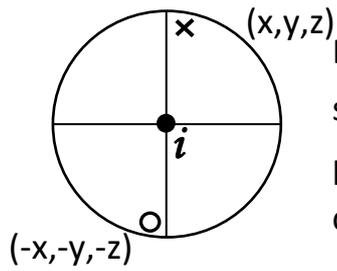
3-



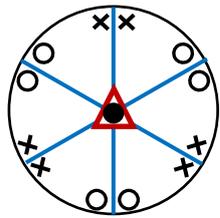
L'association d'un axe A_4 et d'un axe $A_2 \perp A_4$ entraîne quatre axes $A_2 \perp A_4$ (en bleu) faisant entre eux un angle de $\frac{\pi}{4}$.

EXERCICE 4

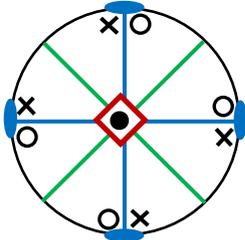
1-



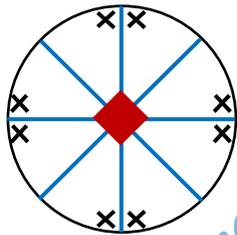
La représentation stéréographique d'un centre de symétrie (i). Par conséquent toutes représentations présentant des paires de positions analogues sont centro-symétriques



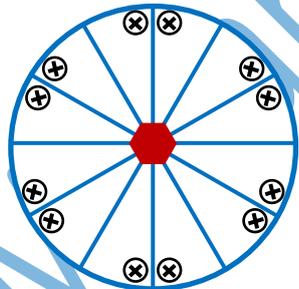
$\bar{3}m$ est centrosymétrie



$\bar{4}2m$ est non centrosymétrie

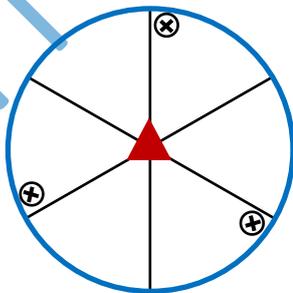


$4mm$ est non centrosymétrie

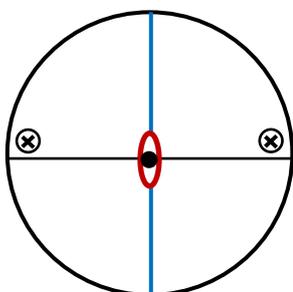
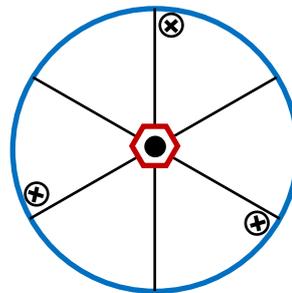


$\frac{6}{m}$ est centrosymétrie

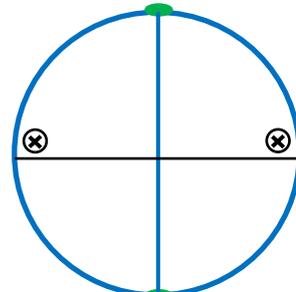
2-



$$\frac{3}{m} \equiv \bar{6}$$

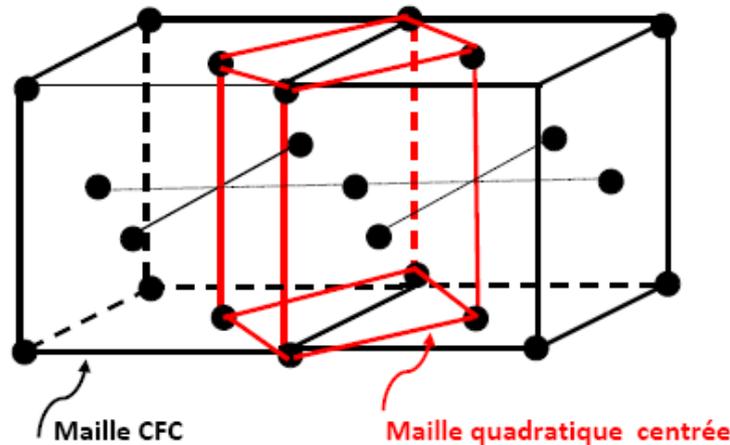


$$\bar{2}m \equiv mm2$$



EXERCICE 5

- 1- A partir de deux mailles adjacentes du réseau c.f.c, on peut tracer une maille quadratique permettant de décrire ce réseau (figure ci-dessous)



$$a_q = b_q = a_c \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad c_q = a_c$$

- 2- La maille quadratique obtenue est de mode I (centrée) \Rightarrow multiplicité = 2.

$$V_q = a_q \times b_q \times c_q \text{ (la maille quadratique est orthogonale)}$$

$$V_q = a_c \frac{\sqrt{2}}{2} \times a_c \frac{\sqrt{2}}{2} \times a_c = \frac{a_c^3}{2}$$

- 3- Les formules de calcul de d_{hkl} sont établies à partir de l'expression :

$$d_{hkl}^2 = \frac{1}{|\vec{r}^*|^2}$$

où \vec{r}^* est le vecteur unitaire de la rangée réciproque perpendiculaire à la famille des plans (hkl) avec $\vec{r}^* = h\vec{a}^* + k\vec{b}^* + l\vec{c}^*$

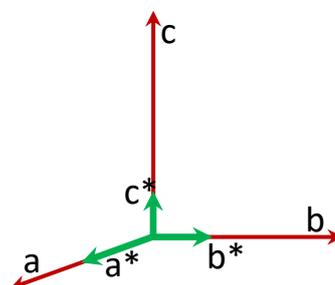
Les relations entre les réseaux direct et réciproque s'expriment à travers les expressions :

$$\vec{a}^* \perp (b, c); \vec{b}^* \perp (a, c); \vec{c}^* \perp (a, b)$$

$$\alpha + \alpha^* = \pi; \beta + \beta^* = \pi; \gamma + \gamma^* = \pi$$

$$\vec{a} \cdot \vec{a}^* = \vec{b} \cdot \vec{b}^* = \vec{c} \cdot \vec{c}^* = 1$$

Les trois systèmes en question cubique, quadratique et orthorhombique sont orthogonaux ($\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{2}$) \Rightarrow les axes du réseau réciproque et direct sont alors confondus on aura donc : $\alpha^* = \beta^* = \gamma^* = \frac{\pi}{2}$.



Dans ces cas :

$$\begin{aligned} ||\vec{r}^{*2}|| &= \vec{r}^* \cdot \vec{r}^* = (h.\vec{a}^* + k.\vec{b}^* + l.\vec{c}^*) \cdot (h.\vec{a}^* + k.\vec{b}^* + l.\vec{c}^*) \\ &= h^2 a^{*2} + k^2 b^{*2} + l^2 c^{*2} + 2hka^* b^* \cos(\gamma^*) + 2hl \cos(\beta^*) + 2kl \cos(\alpha^*) \\ &= h^2 a^{*2} + k^2 b^{*2} + l^2 c^{*2} \end{aligned}$$

On a aussi : $\vec{a} \cdot \vec{a}^* = a \cdot a^* \cos(a, a^*) = a \cdot a^* \cos(0) = 1 \Rightarrow a^* = \frac{1}{a}$

De la même façon on trouve $b^* = \frac{1}{b}$ et $c^* = \frac{1}{c}$.

$||\vec{r}^{*2}||$ s'écrit alors :

$$||\vec{r}^{*2}|| = \frac{h^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2} + \frac{l^2}{c^2} \text{ pour l'orthorhombique (} a \neq b \neq c \text{)}$$

$$||\vec{r}^{*2}|| = \frac{h^2+k^2}{a^2} + \frac{l^2}{c^2} \text{ pour le quadratique (} a = b \neq c \text{)}$$

$$||\vec{r}^{*2}|| = \frac{h^2+k^2+l^2}{a^2} \text{ pour le cubique (} a = b = c \text{)}$$

On en déduit alors :

$$d_{hkl} \text{ (orthorhombique)} = \frac{1}{\sqrt{\frac{h^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2} + \frac{l^2}{c^2}}}$$

$$d_{hkl} \text{ (quadratique)} = \frac{1}{\sqrt{\frac{h^2+k^2}{a^2} + \frac{l^2}{c^2}}}$$

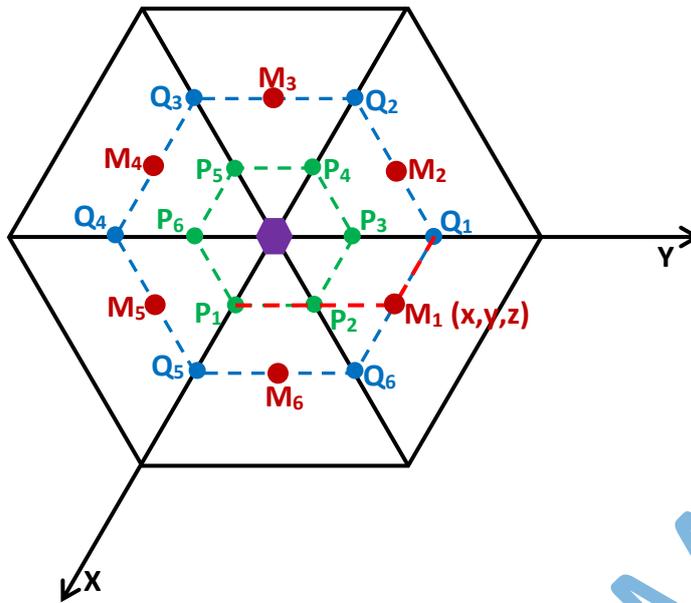
$$d_{hkl} \text{ (cubique)} = \frac{1}{\sqrt{\frac{h^2+k^2+l^2}{a^2}}} = \frac{a}{\sqrt{h^2+k^2+l^2}}$$

EXERCICE 6

1-

a- L'application de l'axe A_6 sur une position générale $M_1(x,y,z)$ conduit à six positions équivalentes.

L'action de A_6 sur $M_1(x,y,z)$ est équivalente à la résultante de l'action de A_6 sur les composantes P_1 , Q_1 et R_1 tel que : $M_1(x,y,z) = P_1(x,0,0) + Q_1(0,y,0) + R_1(0,0,z)$. Comme la rotation se fait autour de Oz ($A_6 // Oz$), les coordonnées z des points R_i ($i = 1$ à 6) restent inchangées.



Pour P₁ on aura :

$$P_1(x,0,0) \xrightarrow{A_6} P_2(x,x,0) \xrightarrow{A_6} P_3(0,x,0) \xrightarrow{A_6} P_4(-x,0,0) \xrightarrow{A_6} P_5(-x,-x,0) \xrightarrow{A_6} P_6(0,-x,0)$$

Pour Q₁ on aura :

$$Q_1(0,y,0) \xrightarrow{A_6} Q_2(-y,0,0) \xrightarrow{A_6} Q_3(-y,-y,0) \xrightarrow{A_6} Q_4(0,-y,0) \xrightarrow{A_6} Q_5(y,0,0) \xrightarrow{A_6} Q_6(y,y,0)$$

$$R_1(0,0,z) = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = R_6 (A_6 // Oz)$$

Pour M₁ on aura alors :

$$M_1(x,y,z) \xrightarrow{A_6} M_2(x-y,x,z) \xrightarrow{A_6} M_3(-y,x-y,z) \xrightarrow{A_6} M_4(-x,-y,z) \xrightarrow{A_6} M_5(y-x,-x,z) \xrightarrow{A_6} M_6(y,y-x,z)$$

b- Positions équivalentes de l'axe d'inversion A₆

$$M_1(x,y,z) \xrightarrow{\bar{6}} M'_2(y-x,-x,-z) \xrightarrow{\bar{6}} M'_3(-y,x-y,z) \xrightarrow{\bar{6}} M'_4(x,y,-z) \xrightarrow{\bar{6}} M'_5(y-x,-x,z) \xrightarrow{\bar{6}} M'_6(-y,x-y,-z)$$

On expliquera par exemple le passage de M₁ à M'₂ puis de M'₂ à M'₃. Le raisonnement restera le même pour les autres positions.

- $\bar{6} = A_6 + (i)$: rotation et inversion simultanées, on aura donc :

$$M_1(x,y,z) \xrightarrow{A_6} M_2(x-y,x,z) \xrightarrow{(i)} M'_2(y-x,-x,-z)$$

$$M'_2(y-x,-x,-z) \xrightarrow{A_6} M_x(y,y-x,-z) \xrightarrow{(i)} M'_3(-y,x-y,z)$$

On constate que les deux premières coordonnées selon ox et oy de M'₂ sont identiques à M₅ donc l'action de l'axe 6 conduit au point noté M_x qui aura donc les mêmes coordonnées que M₆ selon ox et oy. L'inversion de ce point M_x donne M'₃.

Remarque : les positions équivalentes peuvent aussi être obtenues en appliquant $\frac{3}{m}$ ($\bar{6} \equiv \frac{3}{m}$; cf. exercice 2), cependant, elles ne seront pas classés dans l'ordre d'obtention directe par $\bar{6}$.

c- Positions équivalentes de l'axe hélicoïdal 6_2

Chaque application de A_6 est suivie d'une translation selon Oz de $\frac{2}{6} \vec{c} = \frac{1}{3} \vec{c}$, on obtient alors :

$$M_1(x,y,z) \xrightarrow{6_2} M_2(x-y,x, \frac{1}{3}+z) \xrightarrow{6_2} M_3(-y,x-y, \frac{2}{3}+z) \xrightarrow{6_2} M_4(-x,-y,z) \xrightarrow{6_2} M_5(y-x,-x, \frac{1}{3}+z) \xrightarrow{6_2} M_6(y,y-x, \frac{2}{3}+z)$$

d- Positions équivalentes de l'axe hélicoïdal 3_2

L'application de l'axe A_3 revient à appliquer deux fois l'axe A_6 sur une position de départ. Pour l'axe hélicoïdal 3_2 , chaque application de A_3 est accompagnée d'une translation selon Oz de $\frac{2}{3} \vec{c}$. On obtient alors :

$$M_1(x,y,z) \xrightarrow{3_2} M_3(-y,x-y, \frac{2}{3}+z) \xrightarrow{3_2} M_5(y-x,-x, \frac{4}{3}+z) \equiv M_5(y-x,-x, \frac{1}{3}+z)$$

2- On considère quelques projections dans le système orthorhombique. Pour compléter ses figures on rappelle d'abord des considérations générales à prendre en compte :

- Les éléments de symétrie se répètent toutes les demi-périodes pour le système orthorhombique.
- Lors de l'application d'un miroir, une seule coordonnée s'inverse (celle de l'axe $\perp m$) : $M(x,y,z) \xrightarrow{m \perp Oz \text{ (à } z = z_0)} M'(x,y,2z_0-z)$
 $[z_0 = 0 \text{ (origine)} \Rightarrow M'(x,y,-z)] ; [z_0 = \frac{1}{4} \Rightarrow M'(x,y, \frac{1}{2}-z)]$

Même raisonnement pour $m \perp Ox$ ou $m \perp Oy$.

Donc deux choses sont à prendre en compte pour obtenir une position transformée par un miroir : l'axe \perp et le point coupé sur cet axe.

- Pour un plan de glissement (a, b, c, n), on ajoute à l'action du miroir la translation correspondante.
- Lors de l'application d'un axe A_2 , deux coordonnées s'inversent (celles du plan $\perp A_2$) :

$$M(x,y,z) \xrightarrow{A_2 // Oz \text{ (à } x = x_0 \text{ et } y = y_0)} M'(2x_0-x, 2y_0-y, z)$$

$[x_0 = y_0 = 0 \Rightarrow M'(-x,-y,z)] ; [x_0 = 0 \text{ et } y_0 = \frac{1}{4} \Rightarrow M'(-x, \frac{1}{2}-y, z)] ; \text{ etc.}$

Même raisonnement pour $A_2 // Ox$ ou $A_2 // Oy$

- Pour un axe hélicoïdal 2_1 on ajoute, à l'action de l'axe A_2 , la translation de $\frac{1}{2}$ parallèlement à cet axe.
- Lors de l'application d'un centre d'inversion (i) les trois coordonnées s'inversent : $M(x,y,z) \xrightarrow{i(x_0,y_0,z_0)} M'(2x_0-x, 2y_0-y, 2z_0-z)$
[Pour $x_0 = y_0 = z_0 = 0 \Rightarrow M'(-x, -y, -z)$], etc.
- $1, 2, \dots \equiv 0$ (périodicité) : (exemple : $1+x \equiv x$; $-\frac{1}{2} \equiv \frac{1}{2}$; etc.)

Projection 1

On recense les éléments de symétrie présents ; un plan de glissement $a \perp Oz$ à $z_0 = 0$ et d'un plan de glissement $n \perp Ox$ à $x_0 = \frac{1}{4}$.

On applique d'abord ces deux éléments de symétrie sur la position existante.

- $M_1(x,y,z) \xrightarrow{a \perp Oz (z_0=0)} M_2(\frac{1}{2}+x, y, -z)$
- $M_1(x,y,z) \xrightarrow{n \perp Ox (x_0=1/4)} M_3(\frac{1}{2}-x, \frac{1}{2}+y, \frac{1}{2}+z)$

En appliquant le plan de glissement n à M_2 on aura :

- $M_2(\frac{1}{2}+x, y, -z) \xrightarrow{n \perp Ox (x_0=1/4)} M_4(-x, \frac{1}{2}+y, \frac{1}{2}-z)$

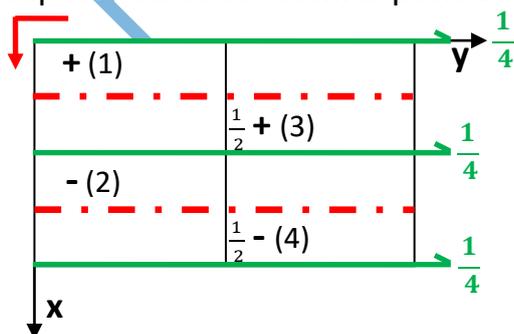
Si on applique le plan de glissement a sur M_3 on retombe sur M_4

- $M_3(\frac{1}{2}-x, \frac{1}{2}+y, \frac{1}{2}+z) \xrightarrow{a \perp Oz (z_0=0)} (1-x, \frac{1}{2}+y, -\frac{1}{2}-z) \equiv M_4(-x, \frac{1}{2}+y, \frac{1}{2}-z)$

Au total on a quatre positions équivalentes pour la projection 1.

La recherche des éléments de symétrie supplémentaires consiste à faire correspondre toutes les positions équivalentes directement à la position générale de départ M_1 . Pour la projection 1, il reste à faire correspondre M_1 à M_4 pour déduire l'élément de symétrie en plus : $M_1(x,y,z) \xrightarrow{?} M_4(-x, \frac{1}{2}+y, \frac{1}{2}-z)$

Le passage de M_1 à M_4 , on constate l'inversion de deux coordonnées (Ox, Oz) et une translation de $\frac{1}{2}$ parallèlement à Oy . Il s'agit donc d'un axe $2_1 // Oy$ ($\perp xOz$) qui se répète toutes les demies périodes. Il coupe Ox en $x_0 = 0 \Rightarrow -x$ et Oz en $z_0 = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{2} - z$



[(1) = M_1 ; (2) = M_2 ; (3) = M_3 . (4) = M_4]

+ Position en avant du plan ($z > 0$)

- Position en arrière du plan ($z < 0$)

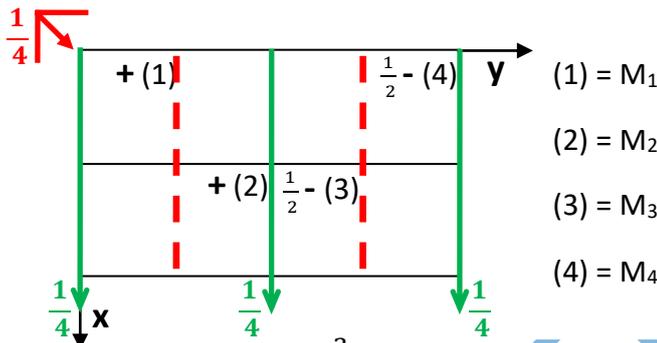
NB : On peut trouver le résultat directement à partir de la projection sans passer par la correspondance algébrique des coordonnées.

Projection 2

On procède de la même manière que pour la 1^{ère} projection. Les éléments de symétrie présents sont :

- un plan de glissement $n \perp Oz$ à $z_0 = \frac{1}{4}$
- un plan de glissement $a \perp Oy$ à $y_0 = \frac{3}{4} \Rightarrow \exists$ aussi un autre à $y_0 = \frac{1}{4}$ (les éléments toutes les demi-périodes pour le système orthorhombique).

On applique ces éléments de symétrie sur la position générale présente on aura la projection suivante :



- $M_1(x, y, z) \xrightarrow{a \perp Oy (y_0 = \frac{3}{4})} M_2(\frac{1}{2} + x, \frac{1}{2} - y, z)$
- $M_1(x, y, z) \xrightarrow{n \perp Oz (z_0 = \frac{1}{4})} M_3(\frac{1}{2} + x, \frac{1}{2} + y, \frac{1}{2} - z)$

En appliquant le plan de glissement n à M_2 on obtient M_4 tel que :

- $M_2(\frac{1}{2} + x, \frac{1}{2} - y, z) \xrightarrow{n \perp Oz (z_0 = \frac{1}{4})} M_4(1 + x, -y, \frac{1}{2} - z) \equiv (x, -y, \frac{1}{2} - z)$

Et si on applique le plan de glissement a sur M_3 on tombe aussi sur M_4

- $M_3(\frac{1}{2} + x, \frac{1}{2} + y, \frac{1}{2} - z) \xrightarrow{a \perp Oy (y_0 = \frac{3}{4})} M_4(1 + x, -y, \frac{1}{2} - z) \equiv (x, -y, \frac{1}{2} - z)$

IL reste à faire correspondre M_1 à M_4 pour déduire l'élément de symétrie supplémentaire.

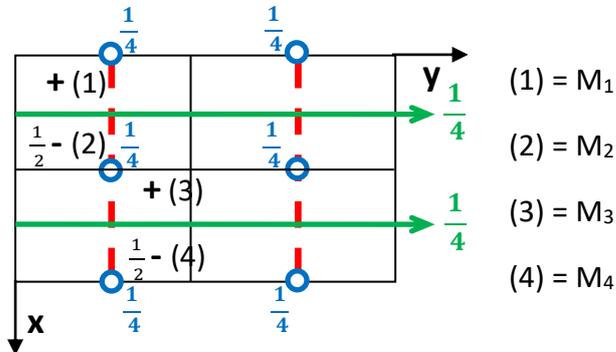
- $M_1(x, y, z) \xrightarrow{?} M_4(x, -y, \frac{1}{2} - z)$

Le passage de M_1 à M_4 , on assiste à l'inversion de deux coordonnées (oy, oz), donc Il s'agit d'un axe $A_2 // Ox (\perp yOz)$ qui se répète toutes les demi-périodes. Il coupe Oy en $y_0 = 0 \Rightarrow -y$ et Oz en $z_0 = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{2} - z$

$$M_1(x, y, z) \xrightarrow{A_2 // Ox (y_0 = 0 ; z_0 = \frac{1}{4})} M_4(x, -y, \frac{1}{2} - z)$$

Projection 3

Dans cette projection, 4 positions équivalentes sont indiqués et aucun élément de symétrie n'est signalé. Les éléments de symétrie seront donc tous déduits à partir ces positions équivalentes affichés. On procède comme précédemment.



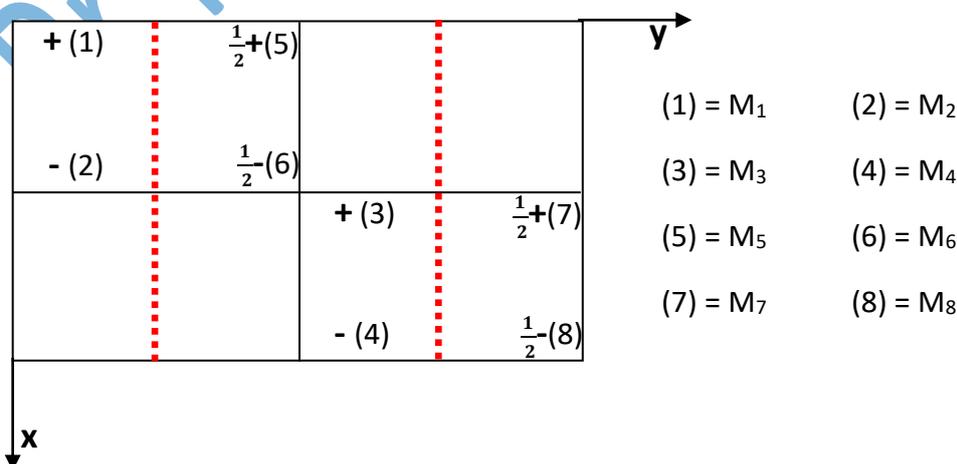
Quatre positions équivalentes seront liées par trois éléments de symétrie on aura :

- $M_1(x, y, z) \xrightarrow{A_2 // Oy (x_0 = \frac{1}{4}; z_0 = \frac{1}{4})} M_2(\frac{1}{2} - x, y, \frac{1}{2} - z)$
- $M_1(x, y, z) \xrightarrow{a \perp Oy (y_0 = \frac{1}{4})} M_3(\frac{1}{2} + x, \frac{1}{2} - y, z)$
- $M_1(x, y, z) \xrightarrow{t(0, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})} M_4(-x, \frac{1}{2} - y, \frac{1}{2} - z)$

Projection 4

Dans cette projection, 4 positions équivalentes et sont indiqués avec la présence d'un seul élément de symétrie. Il s'agit d'un plan de glissement $c \perp Oy$ à $y_0 = \frac{3}{4} \Rightarrow \exists$ aussi un autre à $y_0 = \frac{1}{4}$ (répétition des éléments toutes les demi-périodes pour le système orthorhombique).

L'application du plan de glissement c conduit à positions équivalentes :



- $M_1(x,y,z) \xrightarrow{c \perp Oy (y_0 = \frac{1}{4})} M_5(x, \frac{1}{2} - y, \frac{1}{2} + z)$
- $M_2(\frac{1}{2} - x, y, -z) \xrightarrow{c \perp Oy (y_0 = \frac{1}{4})} M_6(\frac{1}{2} - x, \frac{1}{2} - y, \frac{1}{2} - z)$
- $M_3(\frac{1}{2} + x, \frac{1}{2} + y, z) \xrightarrow{c \perp Oy (y_0 = \frac{1}{4})} M_7(\frac{1}{2} + x, -y, \frac{1}{2} + z)$
- $M_4(-x, \frac{1}{2} + y, -z) \xrightarrow{c \perp Oy (y_0 = \frac{1}{4})} M_8(-x, -y, \frac{1}{2} - z)$

Pour retrouver les opérations supplémentaires, on va correspondre toutes les positions équivalentes directement à la position générale M_1 .

- $M_1(x,y,z) \longrightarrow M_2(\frac{1}{2} - x, y, -z) \iff$ axe $A_2 // Oy (x_0 = \frac{1}{4}; z_0 = 0)$
- $M_1(x,y,z) \longrightarrow M_3(\frac{1}{2} + x, \frac{1}{2} + y, z) \iff$ translation du réseau mode C
- $M_1(x,y,z) \longrightarrow M_4(-x, \frac{1}{2} + y, -z) \iff$ axe hélicoïdal $2_1 // Oy (x_0 = 0; z_0 = 0)$
- $M_1(x,y,z) \longrightarrow M_6(\frac{1}{2} - x, \frac{1}{2} - y, \frac{1}{2} - z) \iff$ centre d'inversion $i(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$
- $M_1(x,y,z) \longrightarrow M_7(\frac{1}{2} + x, -y, \frac{1}{2} + z) \iff$ plan de glissement $n \perp Oy (y_0 = 0)$
- $M_1(x,y,z) \longrightarrow M_8(-x, -y, \frac{1}{2} - z) \iff$ centre d'inversion $i(0, 0, \frac{1}{4})$

Ces éléments se répétant toutes les demi-périodes d'où la représentation finale de la projection 4.

