Université Moulay Ismail
Faculté des Sciences Meknès
Département de Mathématiques

Année universitaire: 2019-2020
Filière: SMA S6
Module: Prob et Proc Stoch
Prof: Souhail Boumour

TD 4

Exercice 1

Soient X et Y deux v.a à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que la loi conjointe de X et Y est donnée par:

$$P(X = j, Y = k) = \frac{a}{j!k!}.$$

1) Déterminer la valeur du réel a.
2) Déterminer les lois marginales de X et Y et leurs nom.
3) Les v.a X et Y sont elles indépendantes?
4) Déterminer la loi de $Z = X + Y$.

Exercice 2

Soient $X_1, ..., X_n$ des v.a i.i.d de loi $\mathcal{B}(p)$ avec $p \in]0, 1[$ et soit $S_n = X_1 + ... + X_n$ leur somme.

1) Pour $s \in [0, n]$, donner la loi conditionnelle de X_1 sachant $(S_n = s)$.
2) Calculer $E(X_1|S_n = s)$ et en déduire $E(X_1|S_n)$.

Exercice 3

On considère le couple de v.a (X, Y) de fonction de densité conjointe:

$$\begin{cases} f_{(X,Y)}(x, y) = ce^{-b(x+y)}, & 0 < x < y < +\infty, \\ f_{(X,Y)}(x, y) = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1) Déterminer une relation entre b et c.

Dans la suite, on pose: $c = 2$ et $b = 1$.

2) Déterminer les densités marginales de X et Y.
3) Montrer que X et Y ne sont pas indépendants.
4) Déterminer la densité conditionnelle de $f_{(Y|X=x)}$.
5) Calculer $E(Y|X = x)$ et en déduire $E(Y|X)$.

Exercice 4

Soient X et Y deux v.a i.i.d suivant la loi de Pareto de paramètre 2, c-à-d: qui possèdent la densité: $f(x) = \frac{1_{(x>1)}}{x^2}$. On pose:

$$(Z, W) = \left(ln(X), 1 + \frac{ln(Y)}{ln(X)} \right).$$

1) En utilisant le produit de convolution, déterminer la densité de $T = X + Y$.

2) En utilisant la méthode de la fonction muette, déterminer la loi de (Z, W).

3) Les v.a Z et W sont-elles indépendantes?

4) Quelle est la loi de W?

5) Quelle est la loi de Z?

6) Calculer $f_{(W|Z=z)}$, $E(W|Z=z)$ et en déduire $E(W|Z)$.

7) Calculer $f_{(Z|W=w)}$, $E(Z|W=w)$ et en déduire $E(Z|W)$.

8) Calculer par deux méthodes $E\left(\frac{2}{W}\right)$.

9) Calculer par deux méthodes $E\left(1+\frac{1}{Z}\right)$ et en déduire $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-z}}{z} dz$.

Exercice 5

Soit R de loi exponentielle de paramètre $1/2$ et Θ de loi uniforme sur $[0, 2\pi]$ indépendante de R. On pose: $X = \sqrt{R}\cos(\Theta)$ et $Y = \sqrt{R}\sin(\Theta)$.

1) Utiliser la méthode de la fonction muette pour déterminer la densité du couple (X, Y).

2) En déduire que X et Y sont indépendants et de même loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

Exercice 6

Soit (X, Y) un vecteur aléatoire gaussien dans $\mathbb{R}^2$ centré et de matrice de variances-covariances l'identité I_2. On pose:

$$Z = \frac{X+Y}{2}, \qquad Q = \frac{X-Y}{2}, \qquad U = \frac{(X-Z)^2}{2} + \frac{(Y-Z)^2}{2}.$$

1) Déterminer la loi de Z et Q.

2) Calculer la matrice de variances-covariances du couple (Z, Q).

3) Z et Q sont-elles indépendantes?

4) Calculer $E(U)$.

5) Montrer que Z et U sont indépendantes, (utiliser la méthode de la fonction muette).

6) En déduire la loi de U.

Exercice 7

Considérons la matrice : $\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

1. Montrer qu'il existe un vecteur $X = {}^t(X_1, X_2, X_3)$ de moyenne $m = {}^t(0, 1, 1)$ et de matrice de covariance Γ.
2. Préciser les relations d'indépendance entre les coordonnées de X.
3. Posons : $Y_1 = X_1 + X_3$, $\quad Y_2 = \alpha X_1 + 2X_2 + \beta X_3 \quad$ et $\quad Y_3 = -X_1 - X_2 + X_3$.
   (a) Montrer que $Y = {}^t(Y_1, Y_2, Y_3)$ est un vecteur gaussien dont on donnera les paramètres.
   (b) Les variables aléatoires Y_1, Y_2 et Y_3 sont-elles mutuellement indépendantes ?
   (c) Pour quelles valeurs de (α, β), les variables Y_2 et Y_3 sont-elles indépendantes ?

TD4 (SMA-S6)

Ex 1

1 $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}$

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} \sum_{k\in\mathbb{N}} P(X=j, Y=k) = 1 \Rightarrow \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a}{j!\,k!} = 1$$

$$\Rightarrow a\left(\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!}\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}\right) = 1 \Rightarrow a \times e \times e = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{a = e^{-2}}$$

2 $$P(X=j) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X=j, Y=k)$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^{-2}}{k!}\right) \frac{1}{j!} = \frac{e^{-2} \times e}{j!} = \boxed{\frac{e^{-1}}{j!}}$$

$\sim \mathcal{P}(1)$

De même :

$$P(Y=k) = \sum_{j=0}^{+\infty} P(X=j, Y=k) = \boxed{\frac{e^{-1}}{k!}}$$

3 $$\forall j,k : P(X=j, Y=k) = \frac{a^{-2}}{j!\,k!} = \left(\frac{e^{-1}}{j!}\right) \times \left(\frac{e^{-1}}{k!}\right)$$

$$= P(X=j) \times P(Y=k)$$

Donc X et Y sont indépendantes

4 $Z(\Omega) = \mathbb{N}$ car $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}$

Calculons $P(Z=k)$, $\forall k \in \mathbb{N}$??

$$P(Z=k) = P(X+Y=k)$$

$$= P(\exists i \; (X=i, Y=k-i)$$

$+$ $+$

$$= P\left(\bigcup_i (X = i, Y = k-i)\right)$$

$$= \sum P(X = i, Y = k-i)$$

$$= \sum_{i=0}^{k} P(X = i) P(Y = k-i)$$

$i \geq 0$
$k - i \geq 0$
$\Rightarrow 0 \leq i \leq k$

$$= \sum_{i=0}^{k} \frac{e^{-1}}{i!} \times \frac{e^{-1}}{(k-i)!} = \left(\sum_{i=0}^{k} C_k^i\right) \frac{e^{-2}}{k!}$$

et $\sum_{i=0}^{k} C_k^i = \sum_{i=0}^{k} C_k^i (1)^i (1)^{k-i} = (1+1)^k = 2^k$

$$\Rightarrow \boxed{P(Z = k) = \frac{e^{-2} \times 2^k}{k!}} \Rightarrow \boxed{Z \sim \mathcal{E}xp(2)}$$

Ex 2 1 $X_1(\Omega) = \{0, 1\}$ $\begin{cases} P(X_1 = 1) = p \\ P(X_1 = 0) = 1 - p \end{cases}$

Calculons $P(X_1 = x / S_n = s)$, $\forall x \in \{0, 1\}$??

Remarquons que $\boxed{P(X_1 = 1) = p^x (1-p)^{1-x}}$

$$P(X_1 = x / S_n = s) = \frac{P(X_1 = x, S_n = s)}{P(S_n = s)}$$

$$= \frac{P(X_1 = x, X_1 + \cdots + X_n = s)}{P(S_n = s)}$$

$$= \frac{P(X_1 = x) P(X_2 + \cdots + X_n = s - x)}{P(S_n = s)}$$

2

on sait que $\begin{cases} S_n = X_1 + \cdots + X_n \sim \mathcal{B}(n,p) \\ X_2 + \cdots + X_n \sim \mathcal{B}(n-1,p) \end{cases}$

Donc :

$$P\left(X_1 = x / S_n = s\right) = \frac{p^x (1-p)^{1-x} \, C_{n-1}^{s-x} \, p^{s-x} (1-p)^{n-1-s+x}}{C_n^s \, p^s (1-p)^{n-s}}$$

$$= \frac{\cancel{p^x (1-p)^{1-x}} \times \frac{(n-1)!}{(s-x)! \, (n-1-s+x)!} \times p^{s-x} (\cancel{1-p})^{n-1-s+x}}{\frac{n!}{s! \, (n-s)!} \cancel{p^x (1-p)^{n-x}}}$$

$$= \frac{(n-1)!}{n!} \, \frac{s!}{(s-x)!} \, \frac{(n-s)!}{(n-1-s+x)!} = \boxed{\frac{1}{n} s^x (n-s)^{1-x}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} P\left(X_1 = 1 / S_n = s\right) = s/n \\ P\left(X_1 = 0 / S_n = s\right) = \frac{n-s}{n} \end{cases}}$$

2 $E\left(X_1 / S_n = s\right) = 1 \times P\left(X_1 = 1 / S_n = s\right) + 0 \times P\left(X_1 = 0 / S_n = s\right)$

$$\Rightarrow \boxed{E\left(X_1 / S_n = s\right) = s/n} \Rightarrow \boxed{E\left(X_1 / S_n\right) = \frac{S_n}{n}}$$

Autrement : les (X_i) sont iid $\Rightarrow$

$$E\left(X_1 / S_n\right) = E\left(X_2 / S_n\right) = \cdots = E\left(X_n / S_n\right)$$

et $S_n = E\left(S_n / S_n\right) = E\left(X_1 + \cdots + X_n / S_n\right) = n E\left(X_1 / S_n\right)$

$$\Rightarrow \boxed{E\left(X_1 / S_n\right) = \frac{S_n}{n}}$$

3

EX 3

1) $\iint_{\mathbb{R}^2} f_{(X,Y)}(x,y)\,dx\,dy = 1$

$\Rightarrow \int_0^{+\infty}\int_0^{y} c e^{-b(x+y)}\,dx\,dy = 1$

$\Rightarrow \int_0^{+\infty} c e^{-by}\left(\int_0^{y} e^{-bx}\,dx\right)dy = 1$

$\Rightarrow \int_0^{+\infty} c e^{-by}\left[\frac{e^{-bx}}{-b}\right]_0^{y} dy = 1$

$\Rightarrow \int_0^{+\infty} c e^{-by}\left(\frac{e^{-by}-1}{-b}\right)dy = 1$

$\Rightarrow \int_0^{+\infty}\left(e^{-2by} - e^{-by}\right)dy = -\frac{b}{c}$

$\Rightarrow \left[\frac{e^{-2by}}{-2b}\right]_0^{+\infty} + \left[\frac{e^{-by}}{b}\right]_0^{+\infty} = -\frac{b}{c}$

$\Rightarrow \left(0+\frac{1}{2b}\right)+\left(0-\frac{1}{b}\right) = -\frac{b}{c}$

$\Rightarrow -\frac{1}{2b} = -\frac{b}{c} \Rightarrow \boxed{c = 2b^2}$

2) $c = 2$ et $b = 1 \Rightarrow 2e^{-(x+y)}$

$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x,y)\,dy$; $x > 0$

$= \int_{x}^{+\infty} 2e^{-(x+y)}\,dy$

$$= 2e^{-x} \int_x^{+\infty} e^{-y} dy = 2e^{-x} \left[-e^{-y} \right]_x^{+\infty}$$

$$\Rightarrow f_X(x) = 2e^{-x}(0 + e^{-x}) = 2e^{-2x}$$

$$\Rightarrow \boxed{f_X(x) = 2e^{-2x} \mathbb{1}(x>0) \Rightarrow X \sim \mathcal{E}xp(2)}$$

$$f_Y(y) = \int_0^y f_{(X,Y)}(x,y)\, dx \quad , \quad y>0$$

$$= \int_0^y 2e^{-(x+y)} dx = 2e^{-y} \int_0^y e^{-x} dx$$

$$= 2e^{-y} \left[-e^{-x} \right]_0^y = 2e^{-y}(1 - e^{-y})$$

$$\Rightarrow \boxed{f_Y(y) = \left(2e^{-y} - 2e^{-2y}\right) \mathbb{1}(y>0)}$$

3 Il est clair que $f_{(X,Y)}(x,y) \neq f_X(x) f_Y(y)$

Donc X et Y ne sont pas indépendantes.

4 $$f_{(Y/X=x)}(x,y) = \frac{f_{(X,Y)}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{2e^{-(x+y)} \mathbb{1}(0<x<y<+\infty)}{2e^{-2x} \mathbb{1}(x>0)}$$

$$\boxed{f_{(Y/X=x)}(x,y) = e^{x-y} \mathbb{1}(0<x<y<+\infty)}$$

(5) $E(Y/X=x) = \int_{\mathbb{R}} y\, f_{(Y/X=x)}\, dy$

$$= \int_{\mathbb{R}} y\, e^{x-y}\, \mathbb{1}_{(0<x<y<+\infty)}\, dy$$

$$= e^{x} \int_{x}^{+\infty} y e^{-y}\, dy \qquad (\text{I.P.P})$$

$$\begin{cases} u' = e^{-y} \\ v = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = -e^{-y} \\ v' = 1 \end{cases}$$

$$= e^{x}\left[\left(-y e^{-y}\right)_{x}^{+\infty} + \int_{x}^{+\infty} e^{-y}\, dy\right]$$

$$= e^{x}\left[\left[-y e^{-y}\right]_{x}^{+\infty} + \left[-e^{-y}\right]_{x}^{+\infty}\right] \qquad x>0$$

$$= e^{x}\left(0 + x e^{-x} - 0 + e^{-x}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{E(Y/X=x) = x+1}$$

$$\Rightarrow \boxed{E(Y/X) = X+1}$$

EX(4) (1) $f_T(t) = f_X * f_Y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(t-x)\, dx$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathbb{1}_{(x>1)}}{x^2} \times \frac{\mathbb{1}_{(t-x>1)}}{(t-x)^2}\, dx.$$

- $f_X(x) \neq 0 \iff x>1$
- $f_Y(t-x) \neq 0 \iff t-x>1 \iff x<t-1$

$\Rightarrow 1 < x < t-1$ à <u>condition que</u> $t-1 > 1$

$\Rightarrow \boxed{t > 2}$

$\Rightarrow$ $t \leq 2$: $f_T(t) = 0$

$t > 2$, $f_T(t) = \displaystyle\int_1^{t-1} \frac{1}{x^2(t-x)^2}\, dx$

on pose :

$$A(x) = \frac{1}{x^2(t-x)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{t-x} + \frac{d}{(t-x)^2}$$

$$xA(x) = a + \frac{b}{x} + \frac{cx}{t-x} + \frac{dx}{(t-x)^2} \; ; \; x \to +\infty \Rightarrow \boxed{a - c = 0}$$

$$x^2 A(x)\Big)_{x \to 0} \Rightarrow \boxed{b = \frac{1}{t^2}}$$

$$(t-x)^2 A(x)\Big)_{x \to t} \Rightarrow \boxed{d = \frac{1}{t^2}}$$

$$x = 2t \Rightarrow A(t) = \frac{1}{t^4} = \frac{a}{2t} + \frac{b}{4t^2} - \frac{c}{t} + \frac{d}{t^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} a = c \\ b = d = \frac{1}{t^2} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{a = c = \frac{2}{t^3}}$$

$$\Rightarrow f_T(t) = \int_1^{t-1} \left(\frac{2}{t^3 x} + \frac{1}{t^2 x^2} + \frac{2}{t^3(t-x)} + \frac{1}{(t-x)^2 t^2} \right) dx$$

$$= \left[\frac{2}{t^3}\ln(x) - \frac{1}{t^2 x} - \frac{2}{t^3}\ln(t-x) - \frac{1}{t^2(t-x)} \right]_1^{t-1}$$

$$\Rightarrow \boxed{f_T(t) = \frac{4}{t^3}\ln(t-1)\; \mathbb{1}(t > 2)}$$

2) $E(g(Z,W)) = E\left(g\left(\ln(X), 1+\frac{\ln(Y)}{\ln(X)}\right)\right)$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} g\left(\ln(x), 1+\frac{\ln(y)}{\ln(x)}\right) f_{(X,Y)}(x,y)\, dx\, dy$$

X et Y indépendante $\Rightarrow f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$

$$= \int_1^{+\infty}\int_1^{+\infty} g\left(\ln(x), 1+\frac{\ln(y)}{\ln(x)}\right) \frac{dx}{x^2}\frac{dy}{y^2}$$

$$\begin{cases} z = \ln(x) \\ w = 1+\frac{\ln(y)}{\ln(x)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = e^{z} \\ y = e^{z(w-1)} \end{cases}$$

$x > 1 \Rightarrow e^{z} > 1 \Rightarrow z > 0$

$y > 1 \Rightarrow e^{z(w-1)} > 1 \Rightarrow z(w-1) > 0 \Rightarrow w > 1$

$\varphi(x,y) = \left(\ln(x), 1+\frac{\ln(y)}{x}\right) \Rightarrow \varphi^{-1}(z,w) = \left(e^{z}, e^{z(w-1)}\right)$

$$\left|\mathrm{Jac}\,\varphi^{-1}(z,w)\right| = \begin{vmatrix} e^{z} & 0 \\ (w-1)e^{z(w-1)} & z e^{z(w-1)} \end{vmatrix} = z e^{zw}$$

$$\Rightarrow E(g(Z,W)) = \int_0^{+\infty}\int_1^{+\infty} g(z,w)\, \frac{z e^{zw}\, dz\, dw}{e^{2z} e^{2z(w-1)}}$$

$$= \iint_{\mathbb{R}^2} g(z,w)\, z e^{-zw}\, \mathbb{1}_{(z>0)} \mathbb{1}_{(w>1)}\, dz\, dw$$

$$\Rightarrow \boxed{f_{(Z,W)}(z,w) = z e^{-zw}\, \mathbb{1}_{(z>0)} \mathbb{1}_{(w>1)}}$$

8

(3) A cause de e^{-zw}, $g(z,w)$ ne peut pas être produit d'une fonction en z et une fonction en z $\Rightarrow$ Z et W <u>non</u> indépendantes

(4) $$f_W(w) = \int_{\mathbb{R}} f_{(Z,W)}(z,w)\,dz$$
$$= \left(\int_0^{+\infty} z e^{-zw}\,dz\right) \mathbb{1}_{(w>1)}$$

I.P.P Intégration par partie

$$= \frac{\mathbb{1}_{(w>1)}}{w^2} \Rightarrow \boxed{W \sim \text{Pareto de paramètre } 2}$$

(5) $$f_Z(z) = \int_{\mathbb{R}} f_{(Z,W)}(z,w)\,dw$$
$$= \mathbb{1}_{(z>0)} \int_1^{+\infty} z e^{-zw}\,dw$$
$$= \mathbb{1}_{(z>0)} \left[-e^{-zw}\right]_1^{+\infty}$$

$$\boxed{f_Z(z) = e^{-z}\,\mathbb{1}_{(z>0)}} \Rightarrow \boxed{Z \sim \mathcal{E}xp(1)}$$

(6) $$f_{(W/Z=z)}(z,w) = \frac{f_{(Z,W)}(z,w)}{f_Z(z)} = z e^{-z(w-1)}\,\mathbb{1}_{(w>1)}$$

$$E(W/Z=z) = \int_{\mathbb{R}} w f_{(W/Z=z)}(z,w)\,dw = \int_1^{+\infty} w z e^{-z(w-1)}\,dw$$

(I.P.P) $\boxed{E(W/Z=z) = 1 + \frac{1}{z}} \Rightarrow \boxed{E(W/Z) = 1 + \frac{1}{Z}}$

7 $f_{(Z/W=w)}(z,w) = \dfrac{f_{(Z,W)}(z,w)}{f_W(w)}$

$$= \frac{z e^{-zw} \mathbb{1}(z>0)\mathbb{1}(w>1)}{\frac{\mathbb{1}(w>1)}{w^2}}$$

$$\boxed{= w^2 z e^{-zw} \mathbb{1}(z>0)}$$

$$E(Z/W=w) = \int_{\mathbb{R}} z f(Z/W=w)(z,w)\, dz$$

$$= \int_0^{+\infty} w^2 z^2 e^{-zw}\, dz$$

(I.P.P) Integ par partie deux fois

$$\Rightarrow E(Z/_{W=w}) = \frac{2}{w} \Longrightarrow \boxed{E(Z/W) = \frac{2}{W}}$$

8) $E\left(\dfrac{2}{W}\right) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{2}{w} f_W(w)\, dw = \int_1^{+\infty} \frac{2}{w^3}\, dw$

$$= \left[\frac{-1}{w^2}\right]_1^{+\infty} = \boxed{1}$$

ou bien : $E\left(\dfrac{2}{W}\right) = \underbrace{E(E(Z/W))}_{\text{Voir cours}} = E(Z) = 1$

Exp(1)

Rappel : $\boxed{\begin{array}{l} X \sim \mathcal{E}xp(\lambda) \Rightarrow E(X) = \dfrac{1}{\lambda} \\ \text{Ici} : \lambda = 1 \end{array}}$

10

9) $E\left(1+\frac{1}{Z}\right) = 1 + E\left(\frac{1}{Z}\right) = \boxed{1+\int_0^{+\infty} \frac{1}{z} e^{-z}\, dz}$

$E\left(1+\frac{1}{Z}\right) = E\left(E\left(W/Z\right)\right) = E(W) = \int_1^{+\infty} w \frac{1}{w^2}\, dw$

$= \int_1^{+\infty} \frac{1}{w}\, dw$

$= \left[\ln(w)\right]_1^{+\infty} = \boxed{+\infty}$

$\Rightarrow 1 + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-z}}{z}\, dz = +\infty$

$\Rightarrow \boxed{\int_0^{+\infty} \frac{e^{-z}}{z}\, dz = +\infty}$

EX 5 * (X,Y) vecteur gaussien dans $\mathbb{R}^2$ centré

donc
- $m = E(X,Y) = \left(E(X), E(Y)\right) = (0,0)$
- $\Gamma_{(X,Y)} = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} V(X) = V(Y) = 1 \\ Cov(X,Y) = 0 \end{cases}$
- $\Gamma_{(X,Y)}$ diagonale $\Leftrightarrow$ X et Y indépendantes. $(X \perp Y)$

1 (X,Y) gaussien dans $\mathbb{R}^2$ donc toute combinaison linéaire de (X,Y) ie $\alpha X + \beta Y$ est gaussienne dans $\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ • $\alpha = \beta = 1/2 \Rightarrow Z = \frac{X+Y}{2}$ gaussien dans $\mathbb{R}$

$\Rightarrow \begin{cases} E(Z) = \frac{E(X)+E(Y)}{2} = \frac{0+0}{2} = 0 \\ V(Z) = \frac{V(X)+V(Y)}{4} = \frac{1+1}{4} = \frac{1}{2} \end{cases}$ $(X \perp Y) \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{Z \sim \mathcal{N}(0, 1/2)}$

• $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\beta = -1/2 \Rightarrow Q = \frac{X-Y}{2}$ gaussien dans $\mathbb{R}$

$$\Rightarrow E(Q) = \frac{E(X)-E(Y)}{2} = \frac{0-0}{2} = 0$$

$$X \perp Y \Rightarrow V(Q) = \frac{V(X)+V(Y)}{4} = \frac{1+1}{4} = 1/2$$

$$\Rightarrow \boxed{Q \sim \mathcal{N}(0, \tfrac{1}{2})}$$

2) $\Gamma_{(Z,Q)} = \begin{pmatrix} V(Z) & cov(Z,Q) \\ cov(Q,Z) & V(Q) \end{pmatrix}$ $V(Z) = V(Q) = \frac{1}{2}$

$$cov(Z,Q) = cov(Q,Z) = E(ZQ) - E(Z)E(Q) = E(ZQ)$$

$$= E(ZQ) - 0 \times 0$$

$$= E\left[\left(\frac{X+Y}{2}\right)\left(\frac{X-Y}{2}\right)\right] = \frac{E(X^2) - E(Y^2)}{4}$$

$$V(X) = 1 = E(X^2) - \underbrace{E(X^2)}_{0} \Rightarrow E(X^2) = 1$$

de même $V(Y) = 1 \Rightarrow E(Y^2) = 1$

$$\Rightarrow cov(Z,Q) = \frac{1-1}{4} = 0$$

$$\Rightarrow \Gamma(Z,Q) = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \boxed{\frac{1}{2} I_2}$$

3) $\Gamma(Z,Q)$ est diagonale et (Z,Q) est vecteur gaussien car transformation linéaire de (X,Y) alors Z et Q sont indépendantes.

4) $E(U) = E\left(\frac{(X-Z)^2}{2}\right) + E\left(\frac{(Y-Z)^2}{2}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(E\left(\left(X - \frac{X+Y}{2}\right)^2\right) + E\left(\left(Y - \frac{X+Y}{2}\right)^2\right)\right)$

$= \frac{1}{2}\left(E\left(\left(\frac{X-Y}{2}\right)^2\right) + E\left(\left(\frac{X-Y}{2}\right)^2\right)\right)$

$= \frac{1}{2}\left(E(Q^2) + E(Q^2)\right) = E(Q^2)$

$= V(Q) + (E(Q))^2 = \frac{1}{2} + 0 = \boxed{\frac{1}{2}}$

$\Rightarrow \boxed{E(U) = \frac{1}{2}}$ $\boxed{U = Q^2}$

5) $E(g(Z,U)) = E(g(Z,Q^2))$

$= \iint_{\mathbb{R}^2} g(z,q^2)\, f_{(Z,Q)}(z,q)\, dz\, dq$

$= \iint_{\mathbb{R}^2} g(z,q^2)\, f_{(Z)}(z)\, f_Q(q)\, dz\, dq$

car d'après (3) (Z et Q indépendantes)

$Z \sim N(0,\frac{1}{2}) \Rightarrow f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-z^2)$

$Q \sim N(0,1/2) \Rightarrow f_Q(q) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-q^2)$

$$\dots = \iint_{\mathbb{R}^2} g(z,q^2)\,\frac{1}{\pi}\,e^{\dots}\,dz\,dq$$

$$\begin{cases} z' = z \\ u = q^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = z' \\ q = \sqrt{u} \end{cases} \Rightarrow |J_{\varphi^{-1}}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\sqrt{u}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{u}}$$

$$= \int_{\mathbb{R}}\int_0^{+\infty} g(z',u)\,\frac{1}{\pi}\exp\left(-(z'^2+u)\right)\frac{1}{2\sqrt{u}}\,dz'\,du$$

$$= \iint_{\mathbb{R}^2} g(z',u)\underbrace{\left[\frac{\exp(-z'^2)}{\sqrt{\pi}}\right]}_{g_Z}\underbrace{\left[\frac{\exp(-u)}{2\sqrt{u\pi}}\mathbb{1}(u>0)\right]}_{g_U}dz'\,du$$

$$\Rightarrow \boxed{f_{(Z,U)}(z,u) = f_Z(z)\,f_U(u)}$$

$\Rightarrow$ Z et U sont indépendantes.

6) les lois :

$$f_Z(z) = \frac{e^{-z^2}}{\sqrt{\pi}} \Rightarrow \boxed{Z \sim N(0, 1/2)}$$

$$\boxed{f_U(u) = \frac{1}{2\sqrt{\pi u}}\exp(-u)\,\mathbb{1}(u>0)}$$

Ex 5 $R \sim \exp\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow f_R(r) = \frac{1}{2} e^{-r/2} \mathbb{1}_{(r>0)}$

$\theta \sim U[0, 2\pi] \Rightarrow f_\theta(\theta) = \frac{1}{2\pi} \mathbb{1}_{[0,2\pi]}(\theta).$

1) $E(g(X,Y)) = E\left[g\left(\sqrt{R}\cos(\theta), \sqrt{R}\sin(\theta)\right)\right]$

$$= \int_0^{+\infty}\int_0^{2\pi} g\left(\sqrt{r}\cos(\theta), \sqrt{r}\sin(\theta)\right) \underbrace{f_R(r) f_\theta(\theta)}_{\text{car indépendantes}} \, dr \, d\theta$$

$= f_{(R,\theta)}(r,\theta)$

$$= \int_0^{+\infty}\int_0^{2\pi} g\left(\sqrt{r}\cos(\theta), \sqrt{r}\sin(\theta)\right) \frac{e^{-r/2}}{2} \times \frac{1}{2\pi} \, dr \, d\theta$$

$$\begin{cases} x = \sqrt{r}\cos(\theta) \\ y = \sqrt{r}\sin(\theta) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} r = x^2 + y^2 \\ \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \\ (r,\theta) = \varphi^{-1}(x,y) \end{cases}$$

$\Rightarrow (x,y) = \varphi(r,\theta)$

$$\Rightarrow |J_{\varphi^{-1}}| = \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ \left(-\frac{y}{x^2}\right) \times \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} & \left(\frac{1}{x}\right) \times \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{vmatrix} = \frac{2(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = |2|$$

$$= \iint_{\mathbb{R}^2} g(x,y) \frac{e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}}}{4\pi} \, 2 \, dx \, dy$$

2) $$= \iint_{\mathbb{R}^2} g(x,y) \left(\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\right)\left(\frac{e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\right) dx \, dy$$

$f_X(x) \times f_Y(y) = f_{(X,Y)}(x,y)$

$\Rightarrow \boxed{X \text{ et } Y \sim N(0,1)}$

15

EX 7 1) c'est clair que Γ est symétrique.

De plus Γ est positive car :

$\forall x \in \mathbb{R}^3$: $x'\Gamma x = (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$x' = (x_1, x_2, x_3) = {}^t x$

$= x_1^2 - 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + 5x_3^2$

$= (x_1 - x_3)^2 + 2(x_2 + x_3)^2 + 2x_3^2 \geq 0$

$\Rightarrow \forall x : x'\Gamma x \geq 0$

$\Rightarrow$ Il existe un vecteur gaussien X associé à Γ de moyenne quelconque m, on peut donc choisir :

$m = {}^t(0,1,1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

2) on a : $\Gamma_X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

on sait que pour un vecteur gaussien alors :

X_i et X_j $(i \neq j)$ sont indépendantes $\Leftrightarrow cov(X_i, X_j) = 0$

or d'après Γ_X on a : $cov(X_1, X_2) = 0$

donc X_1 et X_2 sont indépendantes

3) a) $\forall \alpha' = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ on a : (combinaison linéaire)

$\alpha' Y = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i Y_i = \alpha_1(X_1 + X_3) + \alpha_2(\alpha X_1 + 2X_2 + \beta X_3)$

$+ \alpha_3(-X_1 - X_2 + X_3)$

16

$$= X_1(\underbrace{\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3}_{\beta_1}) + X_2(\underbrace{2\alpha_2 - \alpha_3}_{\beta_2}) + X_3(\underbrace{\alpha_1 + \alpha_2\beta + \alpha_3}_{\beta_3})$$

$$= \beta' X \quad \text{avec } \beta' = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$$

or X gaussien ds $\mathbb{R}^3 \Rightarrow \beta' X$ gaussien dans $\mathbb{R}$

$\Rightarrow Y$ gaussien dans $\mathbb{R}^3$

Autrement: $Y = AX$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \alpha & 2 & \beta \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

donc Y transformation linéaire de X

$\Rightarrow Y$ gaussien dans $\mathbb{R}^3$.

(*) $Y = AX \Rightarrow \begin{cases} E(Y) = A\,E(X) \\ E(X) = (E(X_1), E(X_2), E(X_3)) \\ \quad = (0, 1, 1) = m' \end{cases}$

$\Rightarrow \boxed{E(Y) = {}^t(1, 2+\beta, 0)}$ $\quad A' = {}^tA$

$$\begin{cases} \Gamma_Y = A \Gamma_X A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \alpha & 2 & \beta \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \alpha & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & \beta & 1 \end{pmatrix} \\ \text{D'après cours} \end{cases}$$

$$= \begin{pmatrix} \beta & 4+4\beta & 2 \\ 4+4\beta & \alpha^2 - 2\alpha\beta + 5\beta^2 + 8\beta + 8 & -2\alpha + 4\beta \\ 2 & -2\alpha + 4\beta & 6 \end{pmatrix}$$

b) Γ_Y n'est pas diagonale $\Rightarrow$ les composantes (Y_1, Y_2, Y_3) ne sont pas mutuellement indépendantes.

c) puisque Y gaussien, alors Y_2 et Y_3 sont indépendantes $\Rightarrow$ $Cov(Y_2, Y_3) = 0$

$\Rightarrow -2\alpha + 4\beta = 0$

$\Rightarrow$ $\boxed{\alpha = 2\beta}$

FIN