TD N°4 2018-2019

**Ex1.** $x(t)$ processus stationnaire au sens large (SSL) de moyenne nulle. et de fonction d'autocorrélation $R_{xx}(\tau)$. Soit $y(t) = x(t) + At$.

avec $A$. v.a de moyenne nulle et de variance égale à 1 et indépendante de $x(t)$.

1 - Calcul $E(y(t))$ et $R_{yy}(t+\tau, t)$

$$E(y(t)) = E[x(t) + At]$$
$$= E[x(t)] + E[At].$$
$$= 0 + t\,E[A].$$
$$= 0.$$

$$R_{yy}(t+\tau, t) = E[y(t+\tau)\,y^*(t)]$$
$$= E[(x(t+\tau) + A(t+\tau))(x^*(t) + At)]$$
$$= E[x(t+\tau).x(t) + x(t+\tau)At + A(t+\tau)x(t) + A(t+\tau).At.]$$
$$= E[x(t+\tau)x^*(t)] + E[x(t+\tau)A.t] + E[A(t+\tau)x(t)] + E[A(t+\tau).A.t]$$
$$= R_{xx}(t+\tau, t) + t\,E[x(t+\tau).A] + (t+\tau)E[A.x(t)] + t(t+\tau)E[\underbrace{A^2}_{=1}.]$$
$$= R_{xx}(t+\tau, t) + E[x(t+\tau)]E[A] + (t+\tau)E[A].E[x(t)] + t(t+\tau). = [R_{xx}(t+\tau) + 0 + 0 + t(t+\tau)]$$ dépend de $t$

TD N° 4 2018 - 2019

Ex1 (suite).

On a $R_{yy}(t+\tau, t)$ dépend de t

donc $y(t)$ n'est pas SSL.

3°) Calcul de $R_{xy}(t+\tau, t)$.

$$R_{xy}(t+\tau, t) = E(x(t+\tau)\, y(t))$$
$$= E[x(t+\tau) \cdot (x(t) + At)]$$
$$= E[x(t+\tau) \cdot x(t) + x(t+\tau) \cdot At]$$
$$= E[x(t+\tau)x(t)] + E[x(t+\tau) \cdot A \cdot t]$$
$$= E[x(t+\tau)x(t)] + t\, E[x(t+\tau) \cdot A]$$
$$= R_{xx}(t+\tau, t) + t \cdot \underbrace{E[x(t+\tau)]}_{0} \underbrace{E[A]}_{0}$$
$$= R_{xx}(t+\tau, t)$$

Ex 2 TD N° 4 (1) 2017-2018

Filtre de R.I $h(t)$

On applique à l'entrée du filtre un signal aléatoire $e(t)$ :

$$e(t) = x(t) + b(t) \quad ; \quad x(t) = \lambda \cos(2\pi f_0 t)$$

$\lambda, f_0$ des constants ; $b(t)$ : bruit blanc stationnaire de densité spectrale de puissance $\sigma_b^2$.

$$h(t) = \exp(-at) \cdot u(t) \quad ; \quad a > 0 \ ; \ u(t) : \text{fct. Eheavi}$$

1°/ $TF(h(t)) = TF(u(t)\, e^{-at}) = \int_0^{+\infty} e^{-at} \cdot e^{-j2\pi f t}\, dt$

$$H(f) = \int_0^{+\infty} e^{-(a+j2\pi f)t}\, dt = \frac{\left[e^{-(a+j2\pi f)t}\right]_0^{+\infty}}{-(a+j2\pi f)} = \frac{1}{a+j2\pi f}$$

donc $\boxed{TF(h(t)) = \frac{1}{a+j2\pi f}}$ : Transmittance du filtre ou Fonction de transfert

Fonction

2°/ Puissance du signal $g_b(t) = b(t) * h(t)$ notée $P_{g_b}$

$DSP = S_{g_b}(f) =$ ?

on a $G_b(f) = TF(g_b(t)) = TF(b(t) * h(t)) = TF(b(t)) \cdot TF(h(t))$

$$= B(f) \cdot H(f)$$

$\Rightarrow DSP = S_{g_b}(f) = B^2(f) \cdot H^2(f) = S_b(f) \cdot |H(f)|^2$

$$= \sigma_b^2 \cdot \frac{1}{a^2 + 4\pi^2 f^2} \quad ; \text{ posons } 2\pi f = ax, \quad df = \frac{a}{2\pi} dx$$

$\Rightarrow P_{g_b} = \int \frac{\sigma_b^2}{\ldots} df = \frac{\sigma_b^2 a}{\ldots} \int \frac{1}{\ldots} dx = \frac{\sigma_b^2}{\ldots}$

Ex 2 — TD N° 4 — (2) — 2017-2018

3°) $g_x(t) = x(t) * h(t)$

$$G_x(f) = TF(g_x(t)) = TF(x(t) * h(t)) = TF(x(t)) \cdot TF(h(t))$$

$$= X(f) \cdot H(f)$$

$$= X(f) \cdot \frac{1}{a + j2\pi f} = \frac{\lambda}{2} \left[ \delta(f-f_0) + \delta(f+f_0) \right] \cdot \frac{1}{a+j2\pi f}$$

$$H(f) = \frac{1}{a + j2\pi f} = \frac{1}{\sqrt{a^2+4\pi^2 f^2}} (a - j2\pi f)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2+4\pi^2f^2}} e^{j\left(\mathrm{Arctg}\frac{2\pi f}{a}\right)}$$

$$\Rightarrow G_x(f) = \frac{\lambda}{2} \left( \delta(f-f_0) + \delta(f+f_0) \right) H(f)$$

$$= \frac{\lambda}{2} \left( \delta(f-f_0) + \delta(f+f_0) \right) A(f) \exp(j\phi(f))$$

$$= \frac{\lambda}{2} \left( \delta(f-f_0) A(f_0) \exp(j\phi(f_0)) + \delta(f+f_0) A(-f_0) \exp(j\phi(-f_0)) \right)$$

$$= \frac{\lambda}{2} A(f_0) \left[ \delta(f-f_0) \exp j(\phi(f_0)) + \delta(f+f_0) \exp(j\phi(-f_0)) \right]$$

4°) $$g_x(t) = \frac{\lambda}{2} \cdot A(f_0) \left[ e^{+j2\pi f_0 t} \cdot \exp(j\phi(f_0)) + e^{-j2\pi f_0 t} \cdot e^{-j\phi(f_0)} \right]$$

$$\boxed{g_x(t) = \lambda A(f_0) \cos(2\pi f_0 t + \phi(f_0))}$$

la puissance $$P_{g_x} = \int g_x^2(t)\,dt = \frac{\lambda^2 A^2(f_0)}{2} = \frac{\lambda^2}{2} \frac{1}{a^2+4\pi^2 f_0^2}$$

Ex 2 TD N° 4 2017-2018

5°/ Rapport signal-bruit $RSB = \frac{P_{yx}}{P_{yb}} = \frac{\lambda^2 \cdot 2a}{\sigma_b^2 2 (a^2 + 4\pi^2 f_0^2)}$

$$\Rightarrow \boxed{RSB = \frac{\lambda^2 a}{\sigma_b^2 (a^2 + 4\pi^2 f_0^2)}} = g(a)$$

RSB Bruit maximale pour $g'(a) = 0$

$$\Rightarrow a^2 + 4\pi^2 f_0^2 - 2a^2 = 0$$

soit $\boxed{a = 2\pi f_0}$

$$RSB = 10 \log_{10} \left(\frac{P_{ys}}{P_{yb}}\right)$$

TD N°4 2018-2019

Ex 2

$$s(t) = x(t) + A\cos(2\pi f_0 t)$$

$x(t)$ bruit stationnaire de moyenne nulle et $A\cos 2\pi f_0 t$ signal déterministe.

1) Montrer que $s(t)$ n'est pas stationnaire et calculer sa puissance moyenne.

$$E(s(t)) = E[x(t) + A\cos 2\pi f_0 t]$$
$$= E[x(t)] + E[A\cos 2\pi f_0 t]$$
$$= E[x(t)] + A\cos 2\pi f_0 t$$
$$= A\cos 2\pi f_0 t \quad (\text{dépend du temps})$$

donc $s(t)$ n'est pas stationnaire.

• Puissance : $P = E(s^2(t))$

$$= E[(x(t) + A\cos 2\pi f_0 t)^2]$$
$$= E[(x(t))^2 + 2A\cos 2\pi f_0 t \, x(t) + (A\cos(2\pi f_0 t))^2]$$
$$= E[x^2(t)] + 2A\cos 2\pi f_0 t \, E[x(t)] + (A\cos(2\pi f_0 t))^2$$
$$= E[x^2(t)] + A^2\cos^2(2\pi f_0 t)$$
$$= R_{xx}(0) + A^2\cos^2(2\pi f_0 t)$$

Puissance du bruit — Puissance du signal.

2018-2019

# TD N°4

## Ex 3 (suite)

2°) Puissance moyenne temporelle de s(t)

$$P = \langle s^2(t) \rangle = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s^2(t)\,dt$$

$$= \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left( x^2(t) + 2A\cos 2\pi f_0 t\, x(t) + A^2\cos^2 2\pi f_0 t \right) dt$$

$$= \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t)\,dt + \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} 2A\cos 2\pi f_0 t\, x(t)\,dt$$

$$+ \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} A^2 \cos^2 2\pi f_0 t\,dt$$

$$= R_{xx}(0) + \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} 2A\cos 2\pi f_0 t\, x(t)\,dt$$

$$+ \lim_{T \to +\infty} \frac{A^2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos^2(2\pi f_0 t)\,dt$$

$$= R_{xx}(0) + \lim \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} 2A\cos 2\pi f_0\, x(t)\,dt + \frac{A^2}{2}$$

$$\neq R_{xx}(0) + A^2 \cos^2 2\pi f_0 t \quad \text{généralement}$$

donc moyenne temporelle $\neq$ moyenne statistique.

Puissance ... Puissance

3°) Ex 3 (suite) TD N°4 2015 - 2019

Calcul de la fonction d'autocorrélation de $s(t)$.

$$R_{ss}(t+\tau, t) = E\left[s(t+\tau)\, s(t)\right]$$

$$= E\left\{\left[x(t+\tau) + A\cos 2\pi f_0(t+\tau)\right]\left[x(t) + A\cos 2\pi f_0 t\right]\right\}$$

$$= E\left\{\left[x(t+\tau)\,x(t) + x(t+\tau)\cdot A\cos 2\pi f_0 t + A\cos 2\pi f_0 t \cdot x(t) + A^2\cos(2\pi f_0(t+\tau))\cos(2\pi f_0 t)\right]\right\}$$

$$= E\left[x(t+\tau)\,x(t)\right] + E\left[A\cos 2\pi f_0 t \cdot x(t+\tau)\right] + E\left[A\cos 2\pi f_0 t\; x(t)\right] + E\left[A^2\cos(2\pi f_0(t+\tau))\cos 2\pi f_0 t\right]$$

$$= R_{xx}(\tau) + 0 + 0 + \frac{A^2}{2}\left[\cos\left(2\pi f_0(2t+\tau)\right) + \cos(2\pi f_0 \tau)\right]$$

- Calcul de la valeur moyenne temporelle.

$$\langle R_{ss}(t+\tau, t)\rangle = \langle R_{xx}(\tau)\rangle + \left\langle \frac{A^2}{2}\cos(2\pi f_0(2t+\tau)) + \cos 2\pi f_0 \tau\right\rangle$$

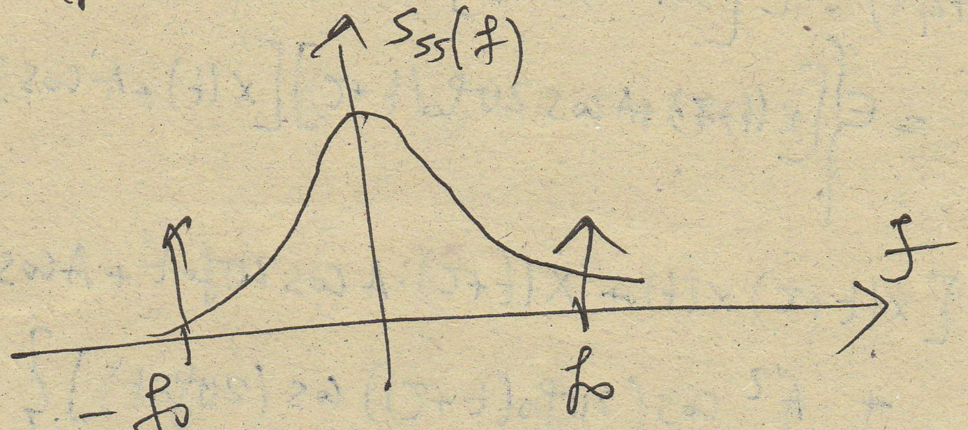
$$= R_{xx}(\tau) + \frac{A^2}{2}\cos(2\pi f_0 \tau)$$

4°) Densité spectrale de $s(t)$.

$$S_{ss}(f) = TF\left(R_{ss}(t)\right) = S_{xx}(f) + \frac{A^2}{2}\left[\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)\right]$$

4(c) si $x(t)$ est un bruit gaussien

$S_{ss}(f)$ a l'allure suivante :



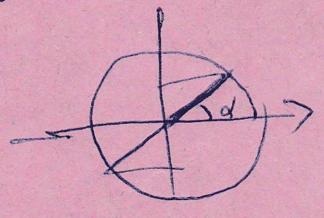
Ex 4 TD N°4 2017-2018

$$s(t) = \cos(\omega_0 t + \theta) + b(t).$$

$$H(\omega) = \frac{R/L}{\frac{R}{L} + j\omega}$$ ; $b(t)$ : bruit, moyenne nulle et $R_b(\tau) = k\delta(\tau)$

$\omega_0 = cst$ ; $\theta$ : v.a uniforme sur $]\pi, 2\pi[$

$b(t)$ et $\theta$ sont indépendants.



1°/ Moyenne de $s(t)$.

$$E[s(t)] = E[\cos(\omega_0 t + \theta) + b(t)] = E[\cos(\omega_0 t + \theta)]$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi} \cos(\omega_0 t + \theta)\, d\theta = \frac{1}{\pi}\Big[\sin(\omega_0 t + \theta)\Big]_{\pi}^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}\Big[\sin(\omega_0 t + 2\pi) - \sin(\omega_0 t + \pi)\Big]$$

$$= \frac{1}{\pi}\Big[\sin(\omega_0 t) + \sin \omega_0 t\Big] = \frac{2}{\pi}\sin \omega_0 t$$

2°/ Calcul de fonction de corrélation : $R_{ss}(t+\tau, t)$.

$$R_{ss}(t) = E[s(t+\tau).s(t)] = E\Big[\big(\cos(\omega_0(t+\tau)+\theta) + b(t+\tau)\big)\big(\cos(\omega_0 t + \theta) + b(t)\big)\Big]$$

$$= E\Big[\cos(\omega_0(t+\tau)+\theta).\cos(\omega_0 t+\theta)\Big] + \underbrace{E\Big[\cos(\omega_0(t+\tau)+\theta).b(t)\Big]}_{0}$$

$$+ \underbrace{E\Big[b(t+\tau).\cos(\omega_0 t+\theta)\Big]}_{0} + E\Big[b(t+\tau)\,b(t)\Big]$$

$$= E\Big[\cos(\omega_0(t+\tau)+\theta).\cos(\omega_0 t+\theta)\Big] + k\,\delta(\tau).$$

$$= k\delta(\tau) + \frac{1}{2}E\Big[\cos(\omega_0(2t+\tau)+2\theta) + \cos(\omega_0\tau)\Big]$$

Ex 4. TD N°4 2017-2018

3°/ s(t) est-il stationnaire ?

E(s(t)) n'est pas constante $\left(= \frac{2}{\pi} \sin w_0 t\right)$

donc s(t) n'est SSL

4°/ b(t) est-il stationnaire au SL.

On a b(t) de moyenne nulle et de fct. de corrélation

$K\delta(\tau) \Rightarrow$ b(t) SSL

5°/ Moyenne de $y(t) = h(t) * s(t)$

$$E[y(t)] = E[h(t) * s(t)] = \int$$

and,

$$h(t) * s(t) = h(t) * \left(\cos(w_0 t + \theta) + b(t)\right)$$

$$H(w) = \frac{R/L}{jw + R/L} = \frac{a}{a + jw} = a \cdot \frac{1}{a + jw} = a \cdot TF\left(e^{-at}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{h(t) = a e^{-at}}$$

$$h(t) * s(t) = \left(a e^{-at}\right) * \left(\cos(w_0 t + \theta) + b(t)\right)$$

$$= \int a e^{-a(t-\tau)} \left(\cos(w_0 t + \theta) + b(t)\right) dt$$

**Solution de l'exercice 1 : signal bruité**

**s(t) = cos ( $\omega_0$ t + $\theta$ ) + b ( t )**

1-

$$\begin{aligned}
\overline{x}(t) &= E[x(t)] = E[\cos(\omega_0 t + \theta) + E[N(t)] \\
&= E[\cos(\omega_0 t + \theta)] = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega_0 t + \alpha) p_\theta(\alpha) d\alpha \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi} \cos(\omega_0 t + \alpha) d\alpha = \frac{1}{\pi}[\sin(\omega_0 t + \alpha)]_{\pi}^{2\pi} = \frac{1}{\pi}\sin(\omega_0 t + 2\pi) - \frac{1}{\pi}\sin(\omega_0 t + \pi) \\
&= \frac{2}{\pi}\sin\omega_0 t
\end{aligned}$$

2-

$$\begin{aligned}
R_x(t+\tau, t) &= E[x(t+\tau)x(t)] = E[[\cos(\omega_0(t+\tau)+\theta) + N(t+\tau)][\cos(\omega_0(t)+\theta) + N(t)]] \\
&= E[\cos(\omega_0(t+\tau)+\theta)\cos(\omega_0 t+\theta)] + E[N(t+\tau)N(t)] \\
&= E[\cos(\omega_0(t+\tau)+\theta)\cos(\omega_0 t+\theta)] + R_N(\tau) \\
&= K\delta(\tau) + E[\cos(\omega_0(t+\tau)+\theta)\cos(\omega_0 t+\theta)] = K\delta(\tau) + \frac{1}{2}\cos\omega_0\tau = R_x(\tau)
\end{aligned}$$

3- La moyenne $\overline{x}(t)$ n'est pas constante donc $x(t)$ n'est pas SSL.

4- $E[N(t)] = 0$ et $E[N(t+\tau)N(t)] = K\delta(\tau)$ donc $N(t)$ est un bruit blanc SSL d'intensité $K$. $N(t_1)$ et $N(t_2)$ sont décorrélés $\forall\, t_1 \neq t_2$.

5- Si $h(t)$ est la réponse impulsionnelle du filtre linéaire et $a = R/L$, la moyenne de $y(t)$ est donnée par :

$$\overline{y}(t) = E[y(t)] = h(t) \star x(t) = \frac{2a}{\pi} \int_{-\infty}^{t} e^{-a(t-\tau)} \sin \omega_0 \tau d\tau$$

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{t} e^{-a(t-\tau)} \sin \omega_0 \tau d\tau = \frac{-1}{\omega_0} \left[ e^{-a(t-\tau)} \cos \omega_0 \tau \right]_{-\infty}^{t} + \frac{a}{\omega_0} \int_{-\infty}^{t} e^{-a(t-\tau)} \cos \omega_0 \tau d\tau \\ &= \frac{-1}{\omega_0} \left[ e^{-a(t-\tau)} \cos \omega_0 \tau \right]_{-\infty}^{t} + \frac{a}{\omega_0^2} \left[ e^{-a(t-\tau)} \sin \omega_0 \tau \right]_{-\infty}^{t} - \frac{a^2}{\omega_0^2} \int_{-\infty}^{t} e^{-a(t-\tau)} \sin \omega_0 \tau d\tau \\ &= \frac{\omega_0^2}{a^2 + \omega_0^2} e^{-at} \left[ e^{a\tau} (a \sin \omega_0 \tau - \omega_0 \cos \omega_0 \tau) \right]_{-\infty}^{t} \end{aligned}$$

$$\overline{y}(t) = \frac{2a}{\pi(a^2 + \omega_0^2)} [a \sin \omega_0 \tau - \omega_0 \cos \omega_0 \tau]$$

6- La densité spectrale de puissance de $N$ est donnée par :

$$\Psi_N(\omega) = K$$

7- Notons $\Psi_x(\omega) = TF[R_x(\tau)]$ la transformée de Fourier de $R_x(\tau)$.

$$\begin{aligned} \Psi_x(\omega) &= TF[R_x(\tau)] = TF[K\delta(\tau)] + \frac{1}{2} TF[\cos \omega_0 \tau] \\ &= K + \frac{1}{2} [\pi \delta(\omega + \omega_0) + \pi \delta(\omega - \omega_0)] \end{aligned}$$

8- On applique le résultat du cours 4 :

$$\Psi_y(\omega) = |H(\omega)|^2 \Psi_x(\omega) = \frac{a^2}{\omega^2 + a^2} \left[ K + \frac{\pi}{2} (\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)) \right]$$

9- On obtient :

$$\begin{aligned} R_y(\tau) &= TF^{-1}[\Psi_y(\omega)] = TF^{-1} \left[ \frac{Ka^2}{\omega^2 + a^2} \right] + \frac{a^2}{2} TF^{-1} \left[ \frac{\pi}{\omega^2 + a^2} (\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)) \right] \\ &= \frac{Ka}{2} TF^{-1} \left[ \frac{2a}{\omega^2 + a^2} \right] + \frac{a^2}{2} TF^{-1} \left[ \frac{1}{\omega^2 + a^2} \right] \star \cos \omega_0 \tau \\ &= \frac{Ka}{2} e^{-a|\tau|} + \frac{a^2}{2(\omega_0^2 + a^2)} \cos \omega_0 \tau \end{aligned}$$

JD N° 4 2018-2019

Ex 5

1)- Pour transmettre un signal sans déformation, la fréquence de coupure doit être infinie.

2) En pratique $F_c = 2/T$

$$r(t) = (x(t) + b(t)) * h(t)$$

3°) Fonction d'autocorrélation $C_{rr}(\tau)$

$$C_{rr}(\tau) = \int r(t)\, r^*(t-\tau)\, dt$$

$$= \int (x(t) + b(t))(x(t-\tau) + b(t-\tau))^* dt$$

$$= \int x(t)\, x^*(t-\tau) dt + \underbrace{\int x(t)\, b^*(t-\tau) dt + \int b(t)\, x^*(t-\tau) dt}_{0 \text{ " indépendants" } 0} + \int b(t)\, b^*(t-\tau) dt$$

$$= C_{xx}(\tau) + C_{bb}(\tau)$$

donc $\boxed{C_{rr}(\tau) = C_{xx}(\tau) + C_{bb}(\tau)}$

4°| $S_{rr}(f) = TF(C_{rr}(\tau)) =$

$$= TF[C_{xx}(\tau) + C_{bb}(\tau)]$$

$$= |X(f)|^2 + |b(f)|^2$$

$$= |X(f)|^2 \quad \dots$$

Ex 5

1) Pour transmettre un signal sans déformation, la fréquence de coupure doit être infinie.

2) En pratique $F_c = 2/T$

$$r(t) = (x(t) + b(t)) * h(t)$$

3°) Fonction d'autocorrélation $C_{rr}(\tau)$

$$C_{rr}(\tau) = \int r(t)\, r^*(t-\tau)\, dt$$

$$= \int (x(t) + b(t)) (x(t-\tau) + b(t-\tau))^* dt$$

$$= \int x(t) x^*(t-\tau) dt + \underbrace{\int x(t) b^*(t-\tau) dt}_{0} + \underbrace{\int b(t) x^*(t-\tau) dt}_{0} + \int b(t) b^*(t-\tau) dt$$

" indépendants "

$$= C_{xx}(\tau) + C_{bb}(\tau)$$

donc $\boxed{C_{rr}(\tau) = C_{xx}(\tau) + C_{bb}(\tau)}$

4°) $S_{rr}(f) = TF(C_{rr}(\tau)) =$

$$= TF[C_{xx}(\tau) + C_{bb}(\tau)]$$

$$= |x(f)|^2 + |b(f)|^2$$

$$= |X(f)|^2 + B^2$$

5°/ $\left.\frac{S}{B}\right|_{avant} = \frac{P_S}{P_B} = \frac{C_x(0)}{C_b(0)} = \frac{C_x(0)}{B}$

$$\left.\frac{S'}{B}\right|_{après} = \frac{C_{ra}(0)}{C_{rb}(0)} = \frac{\int S_{xx}(f)\,df}{\int S_{rb}\,df} = \frac{0{,}9499\,A^2}{2BF_c} = \frac{0{,}9499\,T\,A^2}{4B}$$

$= ?$