

# *Cours 2: Tenseur des Contraintes*

*Université Moulay Ismail  
Faculté des Sciences  
Département de Physique  
Meknès*

*Parcours Mécanique et Énergétique  
Année Universitaire 2012/2013  
Semestre V*

*Mohamed Chaoui*

23 novembre 2012

# Plan

## 1 Forces

- Forces à distance/Forces Extérieures

## 2 Force de Contact

- Tenseur des Contraintes Internes
- Mise en Évidence du Tenseur des Contraintes Internes
- Formulation Générale du Tenseur des Contraintes Internes
- Notion Viscosité

# Forces Extérieures/Forces à distance

## Forces à distance

Ces forces sont générées par des champs naturels comme, par exemple, le champ de la pesanteur ou les champs électromagnétiques. Les forces fictives induites par des référentiels en accélération telles que la force centrifuge ou la force de Coriolis sont aussi des forces à distance. Ces forces sont proportionnelles aux éléments de volume ou de masse et agissent de la même manière sur toutes les particules fluides d'un petit élément de volume. On les appelle *forces de volume (ou volumique)* ou *force de masse (ou massique)*.

Dans les équations du mouvement, une force  $d\vec{F}$  s'exerçant sur un élément de volume  $\delta V$  centré en  $P/\overrightarrow{OP} = \vec{x}$ , s'exprime à un instant  $t$  où elle

$$d\vec{F} = \vec{f}(\vec{x}, t) \rho \delta V;$$

$\vec{f}(\vec{x}, t)$  est la distribution de force par unité de masse qui vaut dans le cas de la pesanteur  $\vec{g}$  et vaut  $(2\vec{v}_r \wedge \vec{\omega})$  ou  $(-\frac{1}{2}\omega^2\vec{x})$  dans le cas des forces fictives d'inertie;  $\vec{\omega}$  est le vecteur rotation du repère par rapport à un référentiel galiléen.

# Plan

## 1 Forces

- Forces à distance/Forces Extérieures

## 2 Force de Contact

- Tenseur des Contraintes Internes
- Mise en Évidence du Tenseur des Contraintes Internes
- Formulation Générale du Tenseur des Contraintes Internes
- Notion Viscosité

# Force de Contact/Tenseur des Contraintes Internes

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$$

$$\partial\mathcal{D} = \partial\mathcal{D}_1 \cup \partial\mathcal{D}_2$$

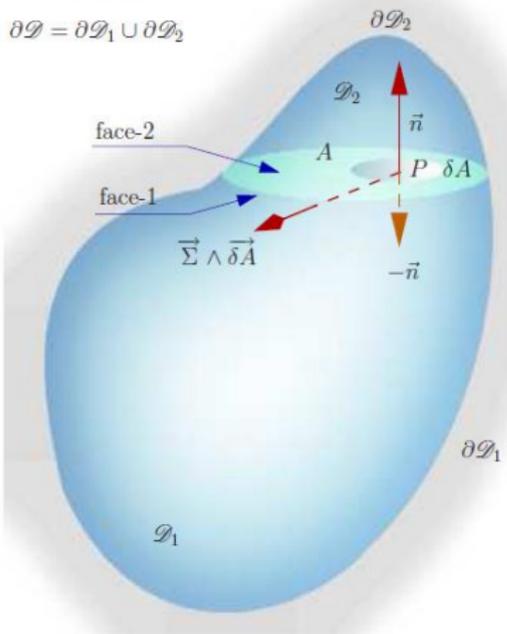


FIGURE: Force agissant sur un élément du fluide suivant Ox dans un écoulement de couette plan

Forces d'origine *molculaire* qui décroissent rapidement avec la distance entre les éléments en interaction **effet local**.

Ex : (1) *Contrainte de pression normale à la surface*, (2) *Contrainte de cisaillement agissant parallèlement à la surface* exprimées en fonction de leur densité surfacique.

Soit  $\vec{\Sigma}(\vec{n}, \vec{x}, t)$ , la distribution de force de contact par unité de surface (appelée aussi *contrainte locale*), exercée par  $\mathcal{D}_2$  sur  $\mathcal{D}_1$  à travers  $\delta A$  plan centré en  $P(\vec{x}, t)$  et  $\vec{\Sigma}(-\vec{n}, \vec{x}, t)$  celle exercée par  $\mathcal{D}_1$  sur  $\mathcal{D}_2$ . Compte tenu du principe de l'action et de la réaction, la résultante des forces de surface en  $P$  est nulle. Ainsi

$$\vec{\Sigma}(\vec{n}, \vec{x}, t)\delta A = -\vec{\Sigma}(-\vec{n}, \vec{x}, t)\delta A$$

La contrainte locale  $\vec{\Sigma}$  est donc une fonction vectorielle impaire.

# Plan

## 1 Forces

- Forces à distance/Forces Extérieures

## 2 Force de Contact

- Tenseur des Contraintes Internes
- Mise en Évidence du Tenseur des Contraintes Internes
- Formulation Générale du Tenseur des Contraintes Internes
- Notion Viscosité

# Mise en Évidence du Tenseur des Contraintes Internes

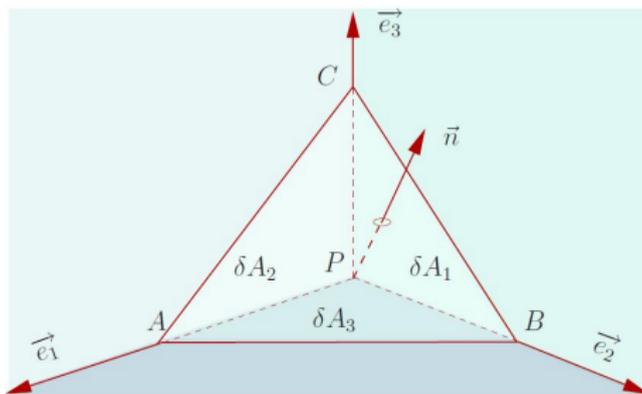


FIGURE: Volume de fluide élémentaire représenté par un tétraèdre à faces orthogonales

Expression de la contrainte locale  $\vec{\Sigma}$  en fonction de la normale  $\vec{n}$ .

Soit un tétraèdre droit de sommet  $P$  en position par rapport à  $\mathcal{B}(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  OND.

Soient  $(\vec{\delta A} = \delta A \vec{n}, \vec{\delta A}_1 = \delta A_1 \vec{n}_1, \vec{\delta A}_2 = \delta A_2 \vec{n}_2, \vec{\delta A}_3 = \delta A_3 \vec{n}_3)$  les vecteurs surface sortants du trièdre.

# Mise en Évidence du Tenseur des Contraintes Internes

## Calcul des vecteur surfaces

$$\overrightarrow{\delta A_1} = \delta A_1 \vec{n}_1 = \frac{1}{2} \left\| a_3 \vec{e}_3 \wedge a_2 \vec{e}_2 \right\| \vec{n}_1 = \frac{a_2 a_3}{2} \left\| -\vec{e}_1 \right\| \vec{n}_1 = \frac{a_2 a_3}{2} \vec{n}_1$$

$$\overrightarrow{\delta A_2} = \delta A_2 \vec{n}_2 = \frac{1}{2} \left\| a_1 \vec{e}_1 \wedge a_3 \vec{e}_3 \right\| \vec{n}_2 = \frac{a_1 a_3}{2} \left\| -\vec{e}_2 \right\| \vec{n}_2 = \frac{a_1 a_3}{2} \vec{n}_2$$

$$\overrightarrow{\delta A_3} = \delta A_3 \vec{n}_3 = \frac{1}{2} \left\| a_2 \vec{e}_2 \wedge a_1 \vec{e}_1 \right\| \vec{n}_3 = \frac{a_1 a_2}{2} \left\| -\vec{e}_3 \right\| \vec{n}_3 = \frac{a_1 a_2}{2} \vec{n}_3$$

$$\overrightarrow{\delta A} = \delta A \vec{n} = \frac{1}{2} \left\| \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \right\| \vec{n} = \frac{1}{2} \left\| (\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PB}) \wedge (\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PC}) \right\| \vec{n}$$

$$= \frac{1}{2} \left\| (-a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2) \wedge (-a_1 \vec{e}_1 + a_3 \vec{e}_3) \right\| \vec{n}$$

$$= \frac{1}{2} \left\| a_2 a_3 \vec{e}_1 + a_1 a_3 \vec{e}_2 + a_1 a_2 \vec{e}_3 \right\| \vec{n}$$

$$= \underbrace{\frac{\sqrt{(a_1 a_2)^2 + (a_2 a_3)^2 + (a_1 a_3)^2}}{2}}_{\delta A} \underbrace{\left[ \frac{(a_2 a_3 \vec{e}_1 + a_1 a_3 \vec{e}_2 + a_1 a_2 \vec{e}_3)}{\sqrt{(a_1 a_2)^2 + (a_2 a_3)^2 + (a_1 a_3)^2}} \right]}_{\vec{n}}$$

# Mise en Évidence du Tenseur des Contraintes Internes

## Bilan des contraintes locales

Face	Aire	Normale extérieure	Force de contact
$ABC$	$\delta A$	$\vec{n}$	$\vec{\Sigma}(\vec{n}) \delta A$
$BPC$	$\delta A_1 = \vec{e}_1 \cdot \vec{n} \delta A$	$\vec{n}_1 = -\vec{e}_1$	$\vec{\Sigma}(\vec{n}_1) \delta A_1$
$CPA$	$\delta A_2 = \vec{e}_2 \cdot \vec{n} \delta A$	$\vec{n}_2 = -\vec{e}_2$	$\vec{\Sigma}(\vec{n}_2) \delta A_2$
$APB$	$\delta A_3 = \vec{e}_3 \cdot \vec{n} \delta A$	$\vec{n}_3 = -\vec{e}_3$	$\vec{\Sigma}(\vec{n}_3) \delta A_3$

$$\vec{\delta A} = \frac{1}{2} (a_2 a_3 \vec{e}_1 + a_1 a_3 \vec{e}_2 + a_1 a_2 \vec{e}_3) = \delta A_1 \vec{e}_1 + \delta A_2 \vec{e}_2 + \delta A_3 \vec{e}_3$$

Au premier ordre d'approximation, où  $\vec{\Sigma}(-\vec{n}_i) = \vec{\Sigma}(\vec{e}_i)$  désigne la contrainte locale s'exerçant sur l'élément de surface  $\delta A_i$  supposé plan.

Soit  $\mathcal{D} = \{\delta V = \rho R_\varepsilon \delta A, / O(R_\varepsilon) = \varepsilon \ll 1\}$ .

$R_\varepsilon$  est un rayon équivalent associé au trièdre élémentaire.

# Mise en Évidence du Tenseur des Contraintes Internes

Le PFD s'écrit

$$\rho \vec{a} \delta V = \rho \vec{f} \delta V + \vec{\Sigma}(\vec{n}) \delta A + \vec{\Sigma}(\vec{n}_1) \delta A_1 + \vec{\Sigma}(\vec{n}_2) \delta A_2 + \vec{\Sigma}(\vec{n}_3) \delta A_3$$

$$\rho \vec{a} \delta V = \rho \vec{f} \delta V + \left( \vec{\Sigma}(\vec{n}) + \vec{\Sigma}(\vec{n}_1) \vec{e}_1 \cdot \vec{n} + \vec{\Sigma}(\vec{n}_2) \vec{e}_2 \cdot \vec{n} + \vec{\Sigma}(\vec{n}_3) \vec{e}_3 \cdot \vec{n} \right) \delta A$$

$$\rho \left( \vec{a} - \vec{f} \right) \frac{\delta V}{\delta A} = \left( \vec{\Sigma}(\vec{n}) + \vec{\Sigma}(\vec{n}_1) \vec{e}_1 \cdot \vec{n} + \vec{\Sigma}(\vec{n}_2) \vec{e}_2 \cdot \vec{n} + \vec{\Sigma}(\vec{n}_3) \vec{e}_3 \cdot \vec{n} \right)$$

On obtient quand  $(\delta V / \delta A) \rightarrow 0$ ,

$$\vec{0} = \vec{\Sigma}(\vec{n}) + \vec{\Sigma}(\vec{n}_1) \vec{e}_1 \cdot \vec{n} + \vec{\Sigma}(\vec{n}_2) \vec{e}_2 \cdot \vec{n} + \vec{\Sigma}(\vec{n}_3) \vec{e}_3 \cdot \vec{n}$$

$$\vec{\Sigma}(\vec{n}) = \vec{\Sigma}(\vec{e}_1) \vec{e}_1 \cdot \vec{n} + \vec{\Sigma}(\vec{e}_2) \vec{e}_2 \cdot \vec{n} + \vec{\Sigma}(\vec{e}_3) \vec{e}_3 \cdot \vec{n}$$

$$\Sigma_i(\vec{n}) = \Sigma_i(\vec{e}_1) n_1 + \Sigma_i(\vec{e}_2) n_2 + \Sigma_i(\vec{e}_3) n_3$$

$$\Sigma_i(\vec{n}) = \sum_{j=1}^{j=3} (\Sigma_i(\vec{e}_j) n_j) = \sum_{j=1}^{j=3} (\sigma_{ij} n_j) \quad \text{où} \quad \vec{\Sigma}(\vec{n}) = \vec{\sigma} \cdot \vec{n}$$

$$\vec{dF} = \vec{\sigma} \cdot \vec{dS} = \vec{\sigma} \cdot \vec{n} dS \quad \text{où} \quad dF_i = \sigma_{ij} dS_j = \sigma_{ij} n_j dS$$

$\sigma_{ij}$  est la  $i^{\text{ème}}$  composante de la force de contact par unité de surface s'exerçant à travers un élément de surface plane normale à la direction  $\vec{e}_j$  et associé à l'instant  $t$ , à la position  $\vec{x}$  dans le milieu fluide. On appelle tenseur des contraintes le tenseur  $\vec{\sigma}$  dont les composantes sont  $\sigma_{ij}$

# Propriétés du Tenseur des Contraintes Internes

## Symétrie

Soit le moment subit par l'élément  $\mathcal{D}$

$$\vec{M} = \int_S \vec{x} \wedge d\vec{F} = \int_S \vec{x} \wedge (\vec{\sigma} \cdot \vec{n}) dS$$

$$\vec{M} = M_i \vec{e}_i = \int_S ((\epsilon_{ijk} x_j \sigma_{kl}) n_l) dS \vec{e}_i = \int_V \frac{\partial}{\partial x_l} (\epsilon_{ijk} x_j \sigma_{kl}) dV \vec{e}_i, \quad \vec{r} = x_i \vec{e}_i$$

Nous obtenons  $M_i = \int_V \epsilon_{ijk} \left( \sigma_{kj} + x_j \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial x_l} \right) dV$ , avec  $\frac{\partial x_j}{\partial x_l} = \delta_{jl}$

$dV \rightarrow 0 \Rightarrow \delta V \sim O(\varepsilon^3)$ ,  $\left( \|\vec{\sigma}\|, \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial x_l}, \|\rho \vec{a}\| \right) \sim O(1)$ .

$$\underbrace{\int_V [\vec{x} \wedge (\rho \vec{a})]_i dV}_{\sim O(\varepsilon^4)} = \underbrace{\int_V [\vec{x} \wedge (\rho \vec{f})]_i dV}_{\sim O(\varepsilon^4)} + \underbrace{\int_V \epsilon_{ijk} \sigma_{kj} dV}_{\sim O(\varepsilon^3)} + \underbrace{\int_V \epsilon_{ijk} x_j \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial x_l} dV}_{\sim O(\varepsilon^4)}$$

$(\epsilon_{ijk} \sigma_{kj})_i = \frac{\epsilon_{ijk}}{2} [\sigma_{kj} - \sigma_{jk}]_i = 0 \Rightarrow \vec{\sigma}$  Symétrique  $\Rightarrow$  6 composantes indépendantes

★ 3 composantes diagonales qui sont des *contraintes normales*.

★ 3 composantes croisées liées au cisaillement

# Propriétés du Tenseur des Contraintes Internes

$\vec{\sigma}$  s'écrit dans la base des axes principaux sous la forme

$$\begin{pmatrix} \sigma'_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma'_{33} \end{pmatrix}$$

La trace de tout tenseur est invariante (absolue), soit :

$$Tr(\vec{\sigma}') = \sigma'_{ii} = \sigma'_{11} + \sigma'_{22} + \sigma'_{33} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \sigma_{ii} = Tr(\vec{\sigma})$$

On décompose  $\vec{\sigma}$  en la somme d'un *tenseur isotrope* et d'un *tenseur déviateur* :

$$(\vec{\sigma}') = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{3} Tr(\vec{\sigma}) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} Tr(\vec{\sigma}) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} Tr(\vec{\sigma}) \end{pmatrix}}_{\text{tenseur isotrope}} + \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma'_{11} - \frac{1}{3} Tr(\vec{\sigma}) & 0 & 0 \\ 0 & \sigma'_{22} - \frac{1}{3} Tr(\vec{\sigma}) & 0 \\ 0 & 0 & \sigma'_{33} - \frac{1}{3} Tr(\vec{\sigma}) \end{pmatrix}}_{\text{tenseur déviateur}}$$

## Propriétés du Tenseur des Contraintes Internes

Ainsi le tenseur des contraintes s'exprime sous la forme :

$$\vec{\sigma}' = \frac{1}{3} \text{Tr}(\vec{\sigma}') \vec{\mathbf{1}} + \vec{\mathbf{D}}, \text{ où } \vec{\mathbf{D}} = \begin{pmatrix} \sigma'_{11} - \frac{1}{3} \text{Tr}(\vec{\sigma}') & 0 & 0 \\ 0 & \sigma'_{22} - \frac{1}{3} \text{Tr}(\vec{\sigma}') & 0 \\ 0 & 0 & \sigma'_{33} - \frac{1}{3} \text{Tr}(\vec{\sigma}') \end{pmatrix}$$

- En général, le signe du terme isotrope  $\sigma_{ii}$  est négatif et par conséquent il s'agit d'une pression uniforme, en tout point  $P$ , dans toutes les directions. Si la forme de l'élément est sphérique, alors suite à une compression uniforme l'élément conserve sa forme sphérique.
- Le tenseur déviateur, il est impératif qu'il soit constitué à la fois d'éléments aux signes négatifs et positifs car la somme des éléments diagonaux doit être nulle compte tenu de la décomposition du tenseur des contraintes.
- Pour un fluide au repos,  $\vec{\mathbf{D}}$  contient des éléments négatifs de compression et des éléments positifs de traction (tension). Par conséquent, l'élément fluide se déforme et passe d'une sphère à un ellipsoïde. Suite à quoi l'élément se met en mouvement ce qui contredit le fait que le fluide est au repos.

En Conclusion : **La composante déviatrice du tenseur des contraintes doit s'annuler pour tout fluide au repos.**

# Plan

## 1 Forces

- Forces à distance/Forces Extérieures

## 2 Force de Contact

- Tenseur des Contraintes Internes
- Mise en Évidence du Tenseur des Contraintes Internes
- Formulation Générale du Tenseur des Contraintes Internes
- Notion Viscosité

# Formulation du Tenseur des Contraintes Internes

(a) Pour un fluide au repos le tenseur des contraintes se réduit à

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} \quad \text{où} \quad \vec{\sigma} = -p \vec{\mathbb{I}}$$

où  $p$  est la pression du fluide et  $\vec{\mathbb{I}}$  le tenseur unité

(b) La composante déviatrice du tenseur des contraintes dépend du mouvement et est liée à la viscosité du fluide et aux forces de cisaillement. Ces forces s'annulent pour un fluide au repos.

En thermodynamique l'état d'un fluide à l'équilibre est défini par une relation appelée *équation d'état*, écrite en général, sous la forme :

$$f(p, \rho, T) = 0$$

$p$  peut être considérée comme une variable *statique* caractéristique de l'état du fluide. Lorsque le fluide est visqueux et en mouvement, le tenseur des contraintes prend la forme suivante :

$$\begin{array}{ccc} \vec{\sigma} & = - & p & \vec{\mathbb{I}} + & \vec{\tau} \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \text{Tenseur des} & & \text{pression} & & \text{Tenseur des} \\ \text{contraintes} & & & & \text{contraintes visqueuses} \end{array}$$

# Plan

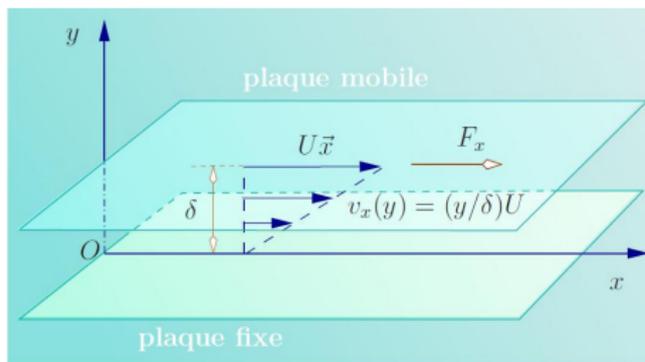
## 1 Forces

- Forces à distance/Forces Extérieures

## 2 Force de Contact

- Tenseur des Contraintes Internes
- Mise en Évidence du Tenseur des Contraintes Internes
- Formulation Générale du Tenseur des Contraintes Internes
- Notion Viscosité

# Notion de Viscosité



**FIGURE:** Expérience de Newton : Écoulement de cisaillement simple entre deux plaques séparées par une petite distance  $\delta$ . La plaque inférieure est fixe et celle du haut est animée d'une vitesse  $U\vec{e}_x$ . Pour de nombreux fluides, il établit la loi de variation linéaire de la vitesse  $v_x(y) = \left(\frac{y}{\delta}\right) U$

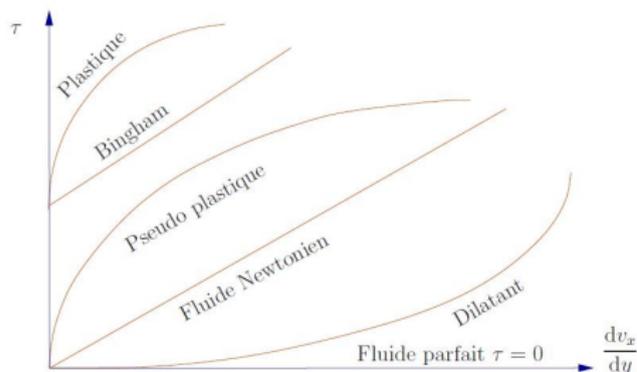
La viscosité dynamique est le coefficient de proportionnalité  $\mu = \left(\frac{F_x}{A}\right) / \left(\frac{U}{\delta}\right)$ . La viscosité dynamique est une propriété du fluide et dépend en général de la température. La force qui s'exerce sur la plaque inférieure par le fluide est

$$\left(\frac{F_x}{A}\right)_{\text{plaque } y=0} = \mu \left(\frac{U}{\delta}\right) = \mu \frac{\partial v_x}{\partial y} = \tau_{xy} \text{ et sur la plaque supérieure}$$

$$\left(\frac{F_x}{A}\right)_{\text{plaque } y = \delta} = -\mu \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\tau_{xy} \text{ L'unité de } \mu \text{ dans le système SI est le}$$

Pascal.seconde (Pa.s), soit :  $1\text{Pa}\cdot\text{s} = \text{N}/\text{m}^2\cdot\text{s} = \text{kg}\cdot\text{m}/\text{s}^2\cdot 1/\text{m}^2\cdot\text{s} = \text{kg}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{s}^{-1}$

# Notion de Viscosité



**FIGURE:** Comportement de la contrainte de cisaillement pour des fluides newtoniens et non newtoniens. Pour un Fluide newtonien la contrainte de cisaillement est une fonction linéaire du gradient des vitesses.

Pour les *fluides de Bingham* au delà d'une contrainte de cisaillement résiduelle  $\tau_0$  le fluide se meut (ex : matières plastiques ; pâte, colle, ...).

$$\tau_{xy} = \tau_0 + \mu \frac{\partial v_x}{\partial y} \quad (1)$$

Pour d'autres fluides non newtoniens la contrainte de cisaillement varie de façon non linéaire en fonction du gradient. Ces *fluides non Newtonien* n'obéissent pas à la loi de Newton, tels que les miels, les huiles lourdes, les boues, des solutions polymériques, ainsi que les poudres comme les sels ou les sables.