Cours 3: ***Cinématique***

Université Moulay Ismail
Faculté des Sciences
Département de Physique
Meknès

Parcours ***Mécanique et Énergétique***
Année Universitaire ***2011/2012***
Semestre ***V***

Mohamed Chaoui

23 novembre 2012

Plan

Mouvement d'une Particule

La position géométrique et la vitesse à l'instant t sont définirent au centre $M(x_1, x_2, x_3)$ de la particule par les vecteurs $\overrightarrow{x}(M,t) = \overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{v}(M,t) = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$.
La trajectoire au cours du temps de la particule est définit par :

$$\overrightarrow{x}(M,t) - \overrightarrow{x_0}(M_0,t_0) = \int_{t_0}^{t} \overrightarrow{v}(P,\tau)d\tau.$$

Classification géométrique des écoulements.

(a) Un écoulement est dit permanent si la vitesse en tout point P de l'espace ne dépend que de ses coordonnées. $\overrightarrow{v}(M,t) = \overrightarrow{v}(M)$.

(b) Un écoulement est dit uniforme si à un instant donné toutes les particules ont la même vitesse. $\overrightarrow{v}(M,t) = \overrightarrow{v}(M_0,t)$.

(c) Un écoulement est bidimensionnel si dans un système approprié de coordonnées la vitesse s'écrit $\overrightarrow{v}(M,t) = (v_x(x,y), v_y(x,y), v_z = 0)$. Ainsi que $\rho = \rho(x,y)$.

Classification physique des écoulements.

(a) Un mouvement est dit incompressible si $\rho = C^{te}$.

(b) Un mouvement est dit visqueux si la viscosité n'est pas négligeable.

Plan

1. *Généralités*
   - Mouvement d'une Particule
   - Description d'un écoulement
   - Schématisation d'un écoulement
   - Dérivée Particulaire

Description Eulérienne et Lagrangienne.

⋆ Description Eulérienne : L'étude de l'écoulement $\overrightarrow{V}(\vec{x}, t)$ se fait au cours du temps t dans une position arbitraire M paramétrée par les variables $(\vec{x}, t)$ appelées variables d'Euler.

⋆ Description Lagrangienne : La description de l'écoulement à l'etat $(\vec{x}, t)$ est basée sur l'état $(\overrightarrow{x_0}, t_0)$ d'une particule que l'on suit dans son mouvement. Ainsi, la vitesse est exprimée par $\overrightarrow{V}(\vec{x}(\overrightarrow{x_0}, t_0), t) \equiv \overrightarrow{V}(\overrightarrow{x_0}, t)$. $(\overrightarrow{x_0}, t)$ sont appelée variables lagrangiennes.

Considérons l'écoulement exprimé en variables d'Euler : $\overrightarrow{V} = (ax, -ay, 0)$, a C^{te}.
La trajectoire de la particule est calculée par intégration de la vitesse
$\left\{x = x_0 e^{a(t-t_0)}, \quad y = y_0 e^{-a(t-t_0)}, \quad z = z_0\right\}$.
La vitesse en coordonnées Lagrangiennes est la dérivée par rapport au temps t avec $\overrightarrow{x_0} = (x_0, y_0, z_0)$ fixe : $\vec{v} = \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial t}\right)_{\overrightarrow{x_0}} = \left(a x_0 e^{a(t-t_0)}, -a y_0 e^{-a(t-t_0)}, 0\right)$

- L'accélération lagrangienne est :
  $(\partial \vec{v}/\partial t)_{\overrightarrow{x_0}} = \left(a^2 x_0 e^{a(t-t_0)}, a^2 y_0 e^{-a(t-t_0)}, 0\right) = a^2 \vec{x}$;
- L'accélération eulérienne : $(\partial \vec{v}/\partial t)_{\vec{x}} = (\partial(ax, -ay, 0)/\partial t)_{\vec{x}} = 0$.

$$(\partial \vec{v}(\vec{x}_0, t)/\partial t)_{\overrightarrow{x_0}} \neq (\partial \vec{v}(\vec{x}, t)/\partial t)_{\overrightarrow{x}}$$

Plan

Trajectoire, ligne de courant, ligne d'émission.

⋆ Trajectoire : Lieu des positions successives d'une particule au cours du temps. La trajectoire est obtenue par intégration du système suivant.

$$\frac{dx_i}{v_i(\overrightarrow{x}, t)} = dt \Longrightarrow x_i = \int v_i dt + C_i,\ i = 1, 2, 3.$$

Les trois constantes d'intégration sont déterminées par la donnée de la position initiale $\overrightarrow{x_0}$ de la particule en question.

⋆ Ligne de courant : Courbe dont la tangente en chacun de ses point est colinéaire au vecteur vitesse pendant une succession de séquences de l'écoulement. Si $\overrightarrow{dx}$ est la tangente au vecteur vitesse $\overrightarrow{v}$ en un point $\overrightarrow{x}$, alors $\overrightarrow{dx} \wedge \overrightarrow{v} = 0$. Soit

$$\frac{dx_i}{v_i(\overrightarrow{x}, t)} = dq,\ i = 1, 2, 3.$$ t fixé et q paramètre séquentiel d'intégration

L'intégration de ce système découle conduit à trois équations paramétriques. Les lignes de courant sont obtenu en éliminant le temps qui est dans ce cas un paramètre et non une variable.

⋆ Lignes d'émission : d'un point P à un instant t le lieu géométrique des positions occupées à l'instant t par les particules qui sont passées par P à un instant antérieur $t' \leq t$.

⋆ Tube de courant : On appelle surface de courant la surface engendrée par les lignes de courant qui s'appuient sur $\mathscr{C}$, si elles existent. Dans le cas ou $\mathscr{C}$ est une courbe fermée, on appelle une telle surface *tube de courant*.

Plan

Dérivée Particulaire.

Soit une fonction scalaire dérivable $F(\vec{x}, t)$ qui est décrite en variables d'Euler. Sa variation de l'état $(\vec{x}, t)$ à l'état $(\vec{x} + \Delta\vec{x}, t + \Delta t)$ s'écrit,

$$\begin{aligned}
\frac{dF(\vec{x}, t)}{dt} &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{F(\vec{x} + \Delta\vec{x}, t + \Delta t) - F(\vec{x}, t)}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \left\{ \frac{F(\vec{x}, t+\Delta t) - F(\vec{x}, t)}{\Delta t} + \frac{F(\vec{x}+\Delta\vec{x}, t+\Delta t) - F(\vec{x}, t+\Delta t)}{\Delta t} \right\} \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \left\{ \frac{\partial F(\vec{x}, t)}{\partial t} + O(\Delta t) + \frac{\nabla F(\vec{x}, t + \Delta t) \cdot \Delta\vec{x} + O(\Delta\vec{x}^2)}{\Delta t} \right\} \\
&= \frac{\partial F(\vec{x}, t)}{\partial t} + \lim_{\Delta t \to 0} \left\{ \frac{\nabla F(\vec{x}, t + \Delta t) \cdot \left[\overrightarrow{v}(\vec{x}, t)\Delta t + O(\vec{v}^2 \Delta t^2) \right]}{\Delta t} \right\}
\end{aligned}$$

$$\underbrace{\frac{dF(\vec{x}, t)}{dt}}_{\text{Dérivée particulaire}} = \underbrace{\frac{\partial F(\vec{x}, t)}{\partial t}}_{\text{Variation locale}} + \underbrace{\overrightarrow{v}(\vec{x}, t) \cdot \nabla F(\vec{x}, t)}_{\text{Variation due à la convection}}$$

Appelée aussi dérivée matérielle associée à une particule lors de son mouvement.

Calcul de l'accélération.

L'accélération $\overrightarrow{\gamma}(\vec{x}, t) = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ s'écrit par définition

$$\overrightarrow{\gamma}(\vec{x}, t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{v}(\vec{x} + \Delta\vec{x}, t + \Delta t) - \overrightarrow{v}(\vec{x}, t)}{\Delta t}$$

C'est la dérivée matérielle de $\vec{v}$. On trouve

$$\gamma_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Cela s'écrit sous la forme vectorielle

$$\overrightarrow{\gamma} = \frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} + \overrightarrow{v} \cdot \nabla \overrightarrow{v},$$

ou

$$\overrightarrow{\gamma} = \frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} + (\nabla \wedge \overrightarrow{v}) \wedge \overrightarrow{v} + \nabla \left(\frac{1}{2} \overrightarrow{v}^2 \right),$$

dite *expression de Helmholtz*.