Cours 3: ***Conservation de la Masse***

Université Moulay Ismail
Faculté des Sciences
Département de Physique
Meknès

Parcours ***Mécanique et Energétique***
Année Universitaire ***2011/2012***
Semestre ***V***

Mohamed Chaoui

18 décembre 2011

Équation de continuité

Une loi fondamentale de la mécanique est la conservation de la masse.
Le bilan de masse sur le domaine fixe P_i est :

$$+\rho S_{i+1} v_{i+1} \delta t - \rho S_i v_i \delta t = 0 \Longrightarrow v_i S_i = v_{i+1} S_{i+1}, \text{ avec } i = 1, 2 \tag{1}$$

Ainsi, $S_1 < S_2 < S_3 \Longrightarrow v_1 > v_2 > v_3$.

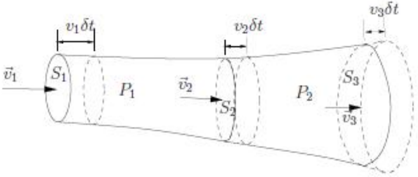
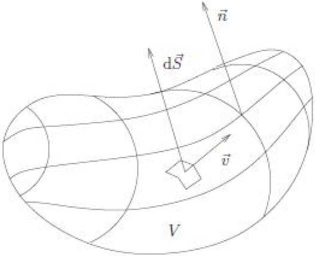


FIGURE: Écoulment dans une conduite à section variable de S_1 à S_3 avec $S_1 < S_2 < S_3$; la vitesse étant supposée uniforme à toute section S.

Forme Différentielle.

On considère maintenant un volume V fixe dans l'espace et délimité par une surface "dérivable" S. Le débit massique Q_m du fluide entrant dans V est



Le débit massique à tavers la surface S :

$$Q_m = -\oint_S \rho\vec{v} \cdot \overrightarrow{dS} = -\int_V \nabla \cdot (\rho\vec{v}) dV$$

La variation de masse dans V fixe :

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt}\int_V \rho dV = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

Or, la conservation de la masse implique

$$\int_V \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \overrightarrow{v}) \right\} dV = 0$$

D'où l'équation de continuité locale :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \overrightarrow{v}) &= 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \overrightarrow{v} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \overrightarrow{v} &= 0 \\ \frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \overrightarrow{v} \cdot \nabla \rho &= 0 \end{aligned}$$

L'équation de continuité d'un écoulement incompressible.

$$\nabla \cdot \overrightarrow{v} = 0$$