Cours 5: ***Déformation***

Université Moulay Ismail
Faculté des Sciences
Département de Physique
Meknès

Parcours ***Mécanique et Energétique***
Année Universitaire ***2011/2012***
Semestre ***V***

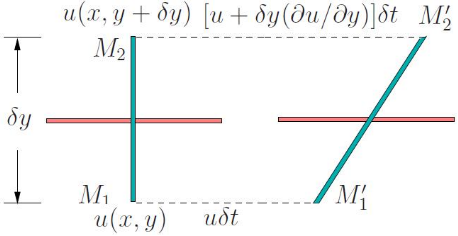
Mohamed Chaoui

18 décembre 2011

Déformation d'une ligne fluide

Tout élément fluide subit au cours de son mouvement trois changements :

- Une translation.
- Une rotation.
- Une déformation.



Un élément fluide vertical emporté par un champ de vitesse $u\overrightarrow{e_x}$ subit pendant δt

- Une translation. Celle de son centre vaut $\frac{1}{2}\left(\delta y \frac{\partial u}{\partial y}\right)\delta t$.
- Une rotation valant $\alpha \equiv (M_1M_2, M_1'M_2') \simeq tg(\alpha) = \frac{\delta y\,(\partial u/\partial y)\,\delta t}{\delta y} = \frac{\partial u}{\partial y}\delta t$
- Une déformation(élongation) de module

$$D = \delta y' - \delta y = \sqrt{\delta y^2 + \left(\delta y \frac{\partial u}{\partial y}\delta t\right)^2} - \delta y = \delta y\left(\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\delta t\right)^2} - 1\right) \simeq \delta y \frac{\partial u}{\partial y}\delta t, \text{si } \frac{D}{\delta y} \ll 1$$

Modélisation de la Déformation fluide.

Soit une ligne fluide infinitésimale, dont les extrémités sont en $\vec{x}$ et en $(\vec{x}+\vec{\xi})$, mise en mouvement par le champ de vitesse $\overrightarrow{v}(\vec{x},t)$. En utilisant le développement de Taylor, écrivons les transformations suivantes :

$$\begin{aligned}
\vec{x} \quad &\longmapsto \quad \vec{x}+\overrightarrow{v}(\vec{x},t)\delta t \\
\vec{x}+\vec{\xi} \quad &\longmapsto \quad \vec{x}+\vec{\xi}+\overrightarrow{v}(\vec{x}+\vec{\xi},t)\delta t \\
&= \quad \vec{x}+\vec{\xi}+\overrightarrow{v}(\vec{x},t)\delta t+\left(\vec{\xi}\cdot\overrightarrow{\nabla}\right)\overrightarrow{v}(\vec{x},t)\delta t+O(\overrightarrow{\xi}^{2}) \\
&\simeq \quad \vec{x}+\vec{\xi}+\overrightarrow{v}(\vec{x},t)\delta t+\left(\vec{\xi}\cdot\overrightarrow{\nabla}\right)\overrightarrow{v}(\vec{x},t)\delta t
\end{aligned}$$

$\overrightarrow{v}(\vec{x},t)\delta t$ Vecteur déplacement en bloc de l'élément.
$\left(\vec{\xi}\cdot\overrightarrow{\nabla}\right)\overrightarrow{v}(\vec{x},t)\delta t$ Tenseur déplacement relatif $\vec{x}+\vec{\xi}$ par rapport à $\vec{x}$ qui peut être décomposé en un tenseur symétrique et un tenseur antisymétrique.

$$\partial v_i/\partial x_j = \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}-\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)}_{=r_{ij},\ \text{Antisymétrique}}+\underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)}_{=e_{ij},\text{Symétrique}} \Rightarrow \xi_j\delta t(\partial v_i/\partial x_j)=\xi_j\delta t(r_{ij}+e_{ij}), \tag{1}$$

Tenseur antisymétrique.

Le tenseur antisymétrique $\vec{\vec{r}}$ s'écrit sous forme matricielle

$$\vec{\vec{r}} = \begin{pmatrix} 0 & -r_{12} & r_{13} \\ r_{12} & 0 & -r_{23} \\ -r_{13} & r_{23} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -R_3 & R_2 \\ R_3 & 0 & -R_1 \\ -R_2 & R_1 & 0 \end{pmatrix} \text{ où } \vec{R} = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix}$$

Le mouvement relatif dû à ce tenseur oriente $\vec{\xi} = (\xi)_i$ ainsi

$$\begin{aligned} \xi_i \longmapsto \xi_i + \frac{1}{2}\xi_j \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)\delta t \quad &\Longleftrightarrow \quad \vec{\xi} \longmapsto \vec{\xi} + \frac{1}{2}\left(\vec{\vec{\nabla}}\vec{v} - \vec{\vec{\nabla}}\vec{v}^{\,T}\right)\cdot\vec{\xi}\,\delta t \\ \longmapsto \xi_i + r_{ij}\xi_j\delta t \quad &\Longleftrightarrow \quad \longmapsto \vec{\xi} + \vec{\vec{r}}\cdot\vec{\xi}\,\delta t \\ \longmapsto \xi_i + \varepsilon_{ijk}R_j\xi_k\delta t \quad &\Longleftrightarrow \quad \longmapsto \vec{\xi} + \vec{R}\wedge\vec{\xi}\,\delta t \end{aligned}$$

Cette partie du mouvement de l'élément linéïque $\vec{\xi}$ est rotationnel au sens de la cinématique des solides. Le vecteur rotation instantanée est égale à $\vec{R} = \frac{1}{2}\vec{\vec{\nabla}} \wedge \vec{v}$ ou en écriture indicielle $R_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\partial_j v_k$. $\vec{R}$ parfois noté $\vec{\Omega}$ représente le vecteur rotation (dit vitesse angulaire) de l'élément linéïque $\vec{\xi}$. Il usuellement appellé vecteur tourbillon. Le vecteur $\vec{\omega} = \vec{\vec{\nabla}} \wedge \vec{v}$ est appelé vorticité.

Tenseur Symétrique.

Analyse de la partie du mouvement associée à la déformation.
Le tenseur symétrique $\vec{\vec{e}}$ s'écrit en diagonale dans la base des vecteurs propres.

$$\vec{\vec{e}} = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{12} & e_{22} & e_{23} \\ e_{13} & e_{23} & e_{33} \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_C} = \begin{pmatrix} e_1 & 0 & 0 \\ 0 & e_2 & 0 \\ 0 & 0 & e_3 \end{pmatrix}_{\mathscr{B}_P} = \frac{1}{2}\left(\vec{\vec{\nabla}}\vec{v} + \vec{\vec{\nabla}}\vec{v}^{\,T}\right)$$

Le tenseur $\vec{\vec{e}}$ transforme l'élément $\overrightarrow{\xi}$ par

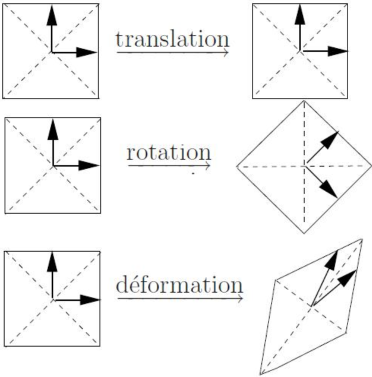
$$\xi_i \longmapsto \xi_i + e_{ij}\xi_j\delta t = \xi_{\underline{i}}^D(1 + e_{\underline{i}}\delta t) \Longleftrightarrow \overrightarrow{\xi} \longmapsto \overrightarrow{\xi} + \vec{\vec{e}}\cdot\overrightarrow{\xi}\delta t = (\mathbb{I} + \delta t\vec{\vec{e}})\cdot\overrightarrow{\xi}$$

Les composantes ξ_i^D sont dilatées de $(1 + e_i\delta t)$. Certains éléments e_i peuvent être négatifs et correspondent par conséquent à une compression.

Déformation d'un Volume.

Soient (ξ_1, ξ_2, ξ_3) les côtés d'un cube. Soient $(\xi'_1\xi'_2\xi'_3)$ les cotés du déformé. Son volume est donnée par est

$$\begin{aligned}
\xi'_1\xi'_2\xi'_3 &= (1+e_1\delta t)(1+e_2\delta t)(1+e_3\delta t)\xi_1\xi_2\xi_3 \\
&= \{1+(e_1+e_2+e_3)\delta t\}\,\xi_1\xi_2\xi_3, \quad \delta t^2 \to 0 \\
&= \left\{1+Tr(\vec{e})\delta t\right\}\xi_1\xi_2\xi_3 \\
&= \left\{1+\nabla\cdot\overrightarrow{v}\,\delta t\right\}\xi_1\xi_2\xi_3
\end{aligned}$$



Ainsi le taux de changement de volume est localement égale à $\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{v}$, ce qui est en accord avec $\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{v}=0$ pour un écoulement incompressible. Il est évident que $\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{v}=0$ implique que parmi les valeurs des éléments e_i il y en a certaines qui sont positives et d'autres qui sont négatives.

Exemple.

Soit l'écoulement ($u = \beta y, v = 0$). La fonction de courant associée est telle que ($u = \dfrac{\partial \psi}{\partial y}, v = -\dfrac{\partial \psi}{\partial x}$). Ainsi, $\psi = \frac{1}{2}\beta y^2$ et $\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{v} = -\beta \vec{k}$.

$$\nabla \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \vec{\vec{e}} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\beta & 0 \\ \frac{1}{2}\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \vec{\vec{r}} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\beta & 0 \\ -\frac{1}{2}\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le vecteur rotation est donc $\overrightarrow{\Omega} = \overrightarrow{R} = (0, 0, -\frac{1}{2}\beta)$.

Les valeurs propres e de $\vec{\vec{e}}$ sont solutions de l'équation caractéristique $det(\vec{\vec{e}} - e\vec{\vec{\mathbb{I}}}) = 0$.

Les valeurs propres solutions sont $e_1 = \frac{1}{2}\beta, e_2 = -\frac{1}{2}\beta, e_3 = 0$.

Les vecteurs propores $\overrightarrow{E}$ correspondants sont solutions de $\vec{\vec{e}} \cdot \overrightarrow{E} = e\overrightarrow{E}$.

$\mathscr{B}_P = \left(\overrightarrow{E_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\vec{i} + \vec{j}\right), \overrightarrow{E_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\vec{i} + \vec{j}\right), \overrightarrow{E_3} = \vec{k}\right)$

Ainsi la déformation résultante de l'élément fluide est la superposition d'une élongation au taux e_1 le long de $\overrightarrow{E_1}$ et d'une compression au taux e_2 le long de $\overrightarrow{E_2}$. Suivant $\overrightarrow{E}_3 = \overrightarrow{k}$, $e_3 = 0$, la déformation est nulle. Une sphère sera aplatit suivant $\overrightarrow{E_2}$ et allongée suivant $\overrightarrow{E_1}$ pour donner une ellipse. La longueur du grand axe croit au cours du temps autant que celle du petit axe décroit.

Vitesse de Déformation.

Cherchons la variation des vitesses liées aux deux points voisins $\vec{x}$ et $\vec{x}+\vec{\xi}$. En utilisant le développement de Taylor, l'i^{me} composante de la vitesse $\overrightarrow{v}(\vec{x}+\vec{\xi})$ en fonction de la vitesse $\overrightarrow{v}(\vec{x})$, est donnée par :

$$\begin{aligned} v_i(\vec{x}+\vec{\xi}) &= v_i\,(\vec{x})+\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\xi_j+O(\vec{\xi}^2) &\Leftrightarrow \overrightarrow{v}(\vec{x}+\vec{\xi}) &= \overrightarrow{v}\,(\vec{x})+\overrightarrow{\overrightarrow{\nabla}}\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{\xi}+O(\overrightarrow{\xi}^2) \\ &\simeq v_i\,(\vec{x})+(r_{ij}+e_{ij})\xi_j &\Leftrightarrow &\simeq \overrightarrow{v}(\vec{x})+(\vec{\vec{r}}+\vec{\vec{e}})\cdot\overrightarrow{\xi} \\ &\simeq v_i\,(\vec{x})+\varepsilon_{ijk}R_j\xi_k+e_{ij}\xi_j &\Leftrightarrow &\simeq \overrightarrow{v}(\vec{x})+\vec{R}\wedge\vec{\xi}+\vec{\vec{e}}\cdot\vec{\xi} \end{aligned}$$

La variation de vitesse entre deux points voisins est constitué de deux contributions : la première est due à la rotation de l'élément fluide et la deuxième due à la déformation, soit

$$\overrightarrow{v}(\vec{x}+\vec{\xi}) = \overbrace{\overrightarrow{v}(\vec{x})+\underbrace{\frac{1}{2}(\overrightarrow{\nabla}\wedge\overrightarrow{v})\wedge\overrightarrow{\xi}}_{\substack{\text{Variation due}\\ \text{à la rotation}}}}^{\substack{\text{Analogue avec un solide rigide}\\ \overrightarrow{v}(M_2)=\overrightarrow{v}(M_1)+\overrightarrow{\Omega}\wedge\overrightarrow{M_1M_2}}} + \underbrace{\overrightarrow{\overrightarrow{e}}\cdot\overrightarrow{\xi}}_{\substack{\text{Variation due}\\ \text{à la déformation}}}$$

La variation de vitesse due à la rotation d'un élément fluide ressemble à celle d'un solide rigide en rotation animé par une rotation instantané $\overrightarrow{\Omega}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\omega}$

Etude du Vecteur Tourbillon.