Université Moulay Ismail
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
et Informatique

Année universitaire 16-17
Filières : SMA
Ana.fonct (S_6)

Examen Session Ordinnaire
Durée : 01 H 30 mn

Exercice 1 :

Soient E et F deux espaces de Banach.

1. Montrer que si f est une application linéaire continue et surjective de E sur F, alors il existe $c > 0$ tel que $\forall x \in E$, $d(x, kerf) \leq c\|f(x)\|$.

2. Soient E_1, E_2 deux sous-espaces vectoriels fermés de E tels que $E = E_1 + E_2$. On désigne par π_i, $i \in \{1, 2\}$, la surjection canonique de E sur E/E_i c'est à dire l'application $x \mapsto x + E_i$ de E sur E/E_i

   i) On considère l'application

$$\begin{array}{rccl} \pi : & E & \longrightarrow & E/E_1 \times E/E_2 \\ & x & \mapsto & (\pi_1(x) \, , \, \pi_2(x)). \end{array}$$

   Montrer que pour tous (u_1, u_2) , $(v_1, v_2) \in E_1 \times E_2$, $(\pi_1(u_1+u_2), \pi_2(v_1+v_2)) = \pi(v_1+u_2)$. En déduire que π est surjective.

   ii) On munit $(E/E_1) \times (E/E_2)$ de la norme définie par:

$$\|(\pi_1(x), \pi_2(y))\| = \|\pi_1(x)\| + \|\pi_2(y)\|.$$

   Montrer qu'il existe $c > 0$ tel que :

$$\forall x \in E, \; d(x, E_1 \cap E_2) \leq c[d(x, E_1) + d(x, E_2)].$$

Exercice 2 :

Dans tout cet exercie E désigne un e.v.n réel et C une partie convexe d'intérieur non vide de E. Pour tous $x \in E$ et $r > 0$, on note $B(x, r)$ la boule ouverte de centre x et de rayon r et pour tous a, $b \in E$, on note $]a, b[$ l'ensemble des éléments de E de la forme $(1 - \alpha)a + \alpha b$, $\alpha \in]0, 1[$.

I) On se propose de montrer que $int(C)$ est convexe et que $\overline{int(C)} = \overline{C}$.

1. Soient a, $b \in E$, $\alpha \in]0, 1[$ et $x_\alpha = (1 - \alpha)a + \alpha b$. Montrer que pour tout $r > 0$,
$$B(x_\alpha, (1 - \alpha)r) = (1 - \alpha)B(a, r) + \alpha b.$$
Ind: (On pourra utiliser que $\forall x \in E$, $\forall r > 0$, $B(x, r) = x + rB(0, 1)$).

2. Montrer que pour tous $a \in int(C)$ et $b \in C$, $]a, b[\subset int(C)$. En déduire que $C \subset \overline{int(C)}$ et que $intC$ est convexe.

3. Montrer que $\overline{int(C)} = \overline{C}$

II) soit $b \in F_r(C)$.

1. Montrer qu'il existe une forme linéaire continue non nulle ξ sur E et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $\xi(b) = \alpha$ et $\forall x \in \overline{C}$, $\xi(x) \leq \alpha$.

2. On suppose en plus que C est un cône (c'est à dire $\forall x \in C, \forall t > 0$, $tx \in C$). Montrer que $\xi(b) = 0$.

Corrigé

Exercice 1

1°) f étant linéaire continue et surjective et les espaces E et F sont des espaces de Banach, donc d'après une conséquence du Th. de l'application ouverte, il existe une application g de F dans E et une constante $c>0$ tels que :

$$\begin{cases} \forall y \in F, & f(g(y)) = y \,; \\ \|g(y)\| \leq c\|y\|. \end{cases}$$

En particulier, on a

$$\forall x \in E, \quad f(g(f(x))) = f(x) \quad \text{et} \quad \|g(f(x))\| \leq c\|f(x)\|.$$

cela implique que

$$\forall x \in E, \quad x - g(f(x)) \in \operatorname{Ker} f \quad \text{et} \quad \|g(f(x))\| \leq c\|f(x)\|$$

D'où $\quad d(x, \operatorname{Ker} f) \leq \|x - (x - g(f(x)))\| \leq c\|f(x)\|.$

Remarque : Plus généralement, nous avons montré en T.D qu'il existe $c>0$ tel que :

$$\forall x \in E, \forall y \in F, \quad d(x, f^{-1}(y)) \leq c\|y - f(x)\|.$$

Pour $y=0$, on obtient $\forall x \in E$, $d(x, \operatorname{Ker} f) \leq c\|f(x)\|$.

2) i) Sachant que $\forall u \in E_1$, $\Pi_1(u) = 0$ et $\forall v \in E_2$, $\Pi_2(v) = 0$, on peut écrire : $\Pi_1(u_1 + u_2) = \Pi_1(u_2) = \Pi_1(v_1 + u_2)$

et $\Pi_2(v_1 + v_2) = \Pi_2(v_1) = \Pi_2(v_1 + u_2)$.

Donc $(\Pi_1(u_1 + u_2), \Pi_2(v_1 + v_2)) = \Pi(v_1 + u_2)$.

Montrons que Π est surjective.

Soit $(y_1, y_2) \in E/E_1 \times E/E_2$, il existe $(u, v) \in E \times E$ tel que $y_1 = \Pi_1(u)$ et $y_2 = \Pi_2(v)$.

Puisque $E = E_1 + E_2$, $\exists (u_1, u_2) \in E_1 \times E_2$ et $\exists (v_1, v_2) \in E_1 \times E_2$ tels que $u = u_1 + u_2$ et $v = v_1 + v_2$.

Alors $(y_1, y_2) = (\Pi_1(u_1 + u_2), \Pi_2(v_1 + v_2)) = \Pi(v_1 + u_2)$.

Donc Π est surjective.

ii) E_1 et E_2 sont fermés dans E qui est un espace de Banach, donc E/E_1 et E/E_2 sont des espaces de Banach et par suite $E/E_1 \times E/E_2$ est un espace de Banach. D'autre part Π est une application linéaire continue et surjective.

Donc, d'après 1°), $\exists c > 0$ tq $\forall x \in E$, $d(x, \operatorname{Ker}\Pi) \leq c \|\Pi(x)\|$.

On a $\operatorname{Ker}\Pi = \{x \in E / x \in E_1 \text{ et } x \in E_2\} = E_1 \cap E_2$ et $\|\Pi(x)\| = \|\Pi_1(x)\| + \|\Pi_2(x)\| = d(x, E_1) + d(x, E_2)$. Donc

$\forall x \in E$, $d(x, E_1 \cap E_2) \leq c[d(x, E_1) + d(x, E_2)]$.

Exercice 2

I) 1. On a
$$
\begin{aligned}
B(x_\alpha, (1-\alpha)r) &= x_\alpha + (1-\alpha) B(0, r) \\
&= (1-\alpha)a + \alpha b + (1-\alpha) B(0, r) \\
&= (1-\alpha)(a + B(0, r)) + \alpha b \\
&= (1-\alpha) B(a, r) + \alpha b
\end{aligned}
$$

2) Soient $a \in \text{int}(C)$ et $b \in C$, il existe $r > 0$ tel que $B(a,r) \subset C$. Soit $x \in]a,b[$, il existe $\alpha \in]0,1[$ tel que $x = (1-\alpha)a + \alpha b$. Alors

$$B(x,(1-\alpha)r) = (1-\alpha)B(a,r) + \alpha b.$$

Puisque $B(a,r) \subset C$ et C est convexe, on a $(1-\alpha)B(a,r) + \alpha b \subset C$. Donc $B(x,(1-\alpha)r) \subset C$.

Donc $x \in \text{int}(C)$. Ce qui montre que $]a,b[\subset C$.

• Montrons que $C \subset \overline{\text{int}(C)}$

Puisque $\text{int}(C) \neq \emptyset$, il contient un élément a. Soit b un élément quelconque de C. On a $]a,b[\subset \text{int}(C)$, donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = (1-\frac{n}{n+1})a + \frac{n}{n+1}b \in \text{int}(C)$. Or (x_n) converge vers b. Donc $b \in \overline{\text{int}(C)}$. Ce qui montre que $C \subset \overline{\text{int}(C)}$

• Montrons que $\text{int}(C)$ est convexe.

Soient $x, y \in \text{int}(C)$. On a $]x,y[\subset \text{int}\, C$ et $x, y \in \text{int}(C)$

Donc $[x,y] \subset \text{int}(C)$. Ce qui implique que $\text{int}(C)$ est convexe.

3. On a $\text{int}(C) \subset C$. Donc $\overline{\text{int}(C)} \subset \overline{C}$. D'autre part, on a $C \subset \overline{\text{int}(C)}$ et $\overline{\text{int}(C)}$ est fermé. Donc $\overline{C} \subset \overline{\text{int}(C)}$. Finalement, on a $\overline{\text{int}(C)} = \overline{C}$

II) 1) On a $b \notin \text{int}(C)$ et $\text{int}(C)$ est un ensemble convexe ouvert non vide. Donc d'après le Th. de Hahn-Banach, il existe une forme linéaire continue ξ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que :

$\xi(b) = \alpha$ et $\forall x \in \text{int}(C)$, $\xi(x) < \alpha$.

cela implique que ξ est non nulle et que $\mathrm{int}(C) \subset \{x \in E \mid \xi(x) \leq \alpha\}$. Comme $\{x \in E \mid \xi(x) \leq \alpha\}$ est fermé, on a $\overline{\mathrm{int}(C)} \subset \{x \in E \mid \xi(x) \leq \alpha\}$. D'autre part, on a $\overline{\mathrm{int}(C)} = \bar{C}$. Donc $\forall x \in \bar{C}$, $\xi(x) \leq \alpha$.

2. Soit $a \in C$, on a $\forall t > 0$, $ta \in C$, donc $\xi(ta) \leq \alpha = \xi(b)$. En faisant tendre t vers 0, on obtient $\xi(b) \geq 0$.
D'autre part, puisque $b \in Fr(C) \subset \bar{C}$, il existe une suite b_n de C qui converge vers b. On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $2b_n \in C$, donc $\xi(2b_n) \leq \alpha = \xi(b)$. En passant à la limite, on obtient : $\xi(2b) \leq \xi(b)$. Ce qui implique que $\xi(b) \leq 0$.
On conclut alors que $\xi(b) = 0$.

Université Moulay Ismail
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
et Informatique

Année universitaire 16-17
Filières : SMA
Ana.fonct (S_6)

Examen Session de Rattrapage
Durée : 01 H 30 mn

N.B. Tous les espaces vectoriels considérés dans cette epreuve sont des espaces vectoriels reéls.

Partie I (7,5 pts)

Soient E et F deux espaces de Banach et f une application linéaire continue et surjective de E sur F.

1) Soit A une partie de E.

5 *i)* Montrer que si $f(A)$ est fermé dans F, alors $A + Kerf$ est fermé dans E.

,1,5 *ii)* Montrer que $(f(A))^c = f((A + Kerf)^c)$. En déduire la réciproque de *i)*.

,5 2) On suppose que F est de dimension finie. Montrer que pour tout sous-espace vectoriel M de E, $M + Kerf$ est fermé dans E.

Partie II (8 pts)

Soient E, F_1, F_2 trois espaces de Banach, $f_1 : E \to F_1$, $f_2 : E \to F_2$ des applications linéaires continues et surjectives et f l'application de E dans $F_1 \times F_2$ définie par: $f(x) = \big(f_1(x), f_2(x)\big)$, $\forall x \in E$. On suppose que $Kerf_1 + Kerf_2$ est fermé dans E et on se propose de montrer que Imf est fermée dans $F_1 \times F_2$. Soit (x_n) une suite d'éléments de E telle que $\big(f(x_n)\big)$ converge vers un élément $(y_1, y_2) \in F_1 \times F_2$.

1) Montrer qu'il existe $c > 0$ et il existe une suite (h_n) d'éléments de E tels que :

$$\forall n \in I\!N, \quad f_1(h_n) = y_1 - f_1(x_n) \text{ et } \|h_n\| \leq c \parallel y_1 - f_1(x_n) \parallel .$$

2) Soit $x \in E$ tel que $y_1 = f_1(x)$. Posons $u_n = x - x_n - h_n$.

1 *i)* Montrer que $u_n \in Kerf_1$ et $lim\big(f_2(u_n)\big) = f_2(x) - y_2$.

1,5 *ii)* Montrer que $f_2(Kerf_1)$ est fermé. En déduire qu'il existe $u \in Kerf_1$ tel que $y_2 = f_2(x - u)$.

5 *iii)* Conclure que Imf est fermée dans $F_1 \times F_2$.

Partie III (7,5 pts)

Soient E et F deux espaces de Banach, $f : E \to F$ une application linéaire continue et surjective et $J : E \to I\!R$ une forme linéaire continue non nulle. On suppose que J possède un minimum en 0 sur $Kerf$.

1) Montrer que J est surjective.

5 2) Montrer que l'image de l'application $(f, J) : x \to \big(f(x), J(x)\big)$ de E dans $F \times I\!R$ est fermée.(Appliquer les résultats des parties I et II)

3) Montrer que $(0, -1) \notin Im(f, J)$.

4) Montrer qu'il existe une forme linéaire continue ξ sur F telle $J = \xi \circ f$.

Partie I

1) i) on a $f^{-1}(f(A)) = \{x \in E \mid f(x) \in f(A)\}$
$= \{x \in E \mid \exists a \in A,\ f(x) = f(a)\}$
$= \{x \in E \mid \exists a \in A,\ x - a \in \operatorname{Ker} f\}$
$= \{x \in E \mid \exists a \in A, \exists h \in \operatorname{Ker} f,\ x = a + h\}$
$= A + \operatorname{Ker} f$

Donc si $f(A)$ est fermé dans F, alors puisque f est continue, $f^{-1}(f(A)) = A + \operatorname{Ker} f$ est fermé dans E.

ii) On a : $f(A) = f(A + \operatorname{Ker} f)$. Donc $[f(A)]^c = [f(A + \operatorname{Ker} f)]^c$.
Soit $y \in F$. Puisque f est surjective, $\exists x \in E$ tq $y = f(x)$.
supposons que $y \in [f(A)]^c$, alors $y \notin f(A + \operatorname{Ker} f)$.
Donc $x \notin A + \operatorname{Ker} f$. C'est à dire $x \in (A + \operatorname{Ker} f)^c$. Donc $y \in f((A + \operatorname{Ker} f)^c)$. Inversement si $y \in f((A + \operatorname{Ker} f)^c)$, alors $\exists x' \in (A + \operatorname{Ker} f)^c$ tq $y = f(x')$. supposons que $y \in f(A)$, alors $\exists x \in A$ tq $y = f(x)$. D'où $f(x) = f(x')$ et par suite $x' - x \in \operatorname{Ker} f$. Ce qui implique que $x' \in x + \operatorname{Ker} f \subset A + \operatorname{Ker} f$. D'où contradiction. Donc $y \in [f(A)]^c$.

2) Soit M un s.e.v. de E. Puisque f est linéaire $f(M)$ est un sous-espace vectoriel de F. Comme F est de dimension finie, $f(M)$ est fermé dans F. Donc, d'après 1) i), $M + \operatorname{Ker} f$ est fermé dans E.

Partie II

1) Puisque E et F_1 sont des espaces de Banach et f_1 est une application linéaire continue et surjective, il existe une application g de F_1 dans E et il existe $c > 0$ tels que :

$$\forall y \in F_1, \quad f_1(g(y)) = y \quad \text{et} \quad \|g(y)\| \leq c\|y\|.$$

Posons $h_n = g(y_1 - f_1(x_n))$, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f_1(h_n) = y_1 - f_1(x_n) \quad \text{et} \quad \|h_n\| \leq c\|y_1 - f_1(x_n)\|.$$

2) i) On a $f_1(u_n) = f_1(x) - f_1(x_n) - (y_1 - f_1(x_n)) = 0$.
Donc $u_n \in \operatorname{Ker} f_1$. Il reste à montrer que $\lim f_2(u_n) = f_2(x) - y_2$.
On a $f_2(u_n) = f_2(x) - f_2(x_n) - f_2(h_n)$.
Puisque $(f(x_n))$ converge vers (y_1, y_2), $(f_2(x_n))$ converge vers y_2 et puisque $\|f_2(h_n)\| \leq \|f_2\| \|h_n\| \leq$
$\leq c\|f_2\| \|y_1 - f_1(x_n)\|$, $(f_2(h_n))$ tend vers zéro. Donc $(f_2(u_n))$ tend vers $f_2(x) - y_2$.

ii) E et F_2 sont des espaces de Banach et f_2 est une application linéaire continue et surjective. De plus $\operatorname{Ker} f_1 + \operatorname{Ker} f_2$ est fermé dans E. Donc d'après 1) ii) de la partie I, $f_2(\operatorname{Ker} f_1)$ est fermé. Donc puisque $(f_2(u_n)) \in f_2(\operatorname{Ker} f_1)$ et $(f_2(u_n))$ converge vers $f_2(x) - y_2$, on a $f_2(x) - y_2 \in f_2(\operatorname{Ker} f_1)$.
càd, il existe $u \in \operatorname{Ker} f_1$ tel que $f_2(x) - y_2 = f_2(u)$. Donc $y_2 = f_2(x - u)$ avec $u \in \operatorname{Ker} f_1$.

iii) On a $y_1 = f_1(x) = f_1(x-u)$ et $y_2 = f_2(x-u)$. Donc $(y_1, y_2) =$
$= f(x-u)$. Ce qui montre que $(y_1, y_2) \in \operatorname{Im} f$. Ainsi nous avons montré que pour toute suite $(f(x_n))$ d'éléments de $\operatorname{Im} f$ qui converge dans $F_1 \times F_2$, sa limite $\in \operatorname{Im} f$. Donc $\operatorname{Im} f$ est fermé.

Rattrapage 16-17

Partie III

1) Puisque J est linéaire, $\mathrm{Im}\, J$ est un s.e.v. de $\mathbb{R}$. Donc $\mathrm{Im}\, J = \{0\}$ ou $\mathrm{Im}\, J = \mathbb{R}$. Puisque $J \neq 0$, $\mathrm{Im}\, J \neq \{0\}$. Donc $\mathrm{Im}\, J = \mathbb{R}$ ce qui montre que J est surjective.

2) f et J sont deux applications linéaires continues et surjectives et les espaces $E, F, \mathbb{R}$ sont des espaces de Banach. Donc, d'après II), pour montrer que $\mathrm{Im}(f, J)$ est fermée, il suffit de montrer que $\mathrm{Ker} f + \mathrm{Ker} J$ est fermé dans E. D'autre part, $\mathbb{R}$ est de dimension finie. Donc d'après I) 2) pour tout s.e.v. M de E, $M + \mathrm{Ker} J$ est fermé dans E. On prenant $M = \mathrm{Ker} f$, on obtient $\mathrm{Ker} f + \mathrm{Ker} J$ est fermé dans E, On peut donc conclure que $\mathrm{Im}(f, J)$ est fermée dans $F \times \mathbb{R}$.

3) Supposons que $(0,-1) \in \mathrm{Im}(f, J)$, alors il existe $x_0 \in E$ tel que $f(x_0) = 0$ et $J(x_0) = -1$. Or J possède un minimum en 0 sur $\mathrm{Ker} f$, donc $\forall x \in \mathrm{Ker} f$, $J(x) \geq J(0) = 0$. En prenant $x = x_0$, on obtient $J(x_0) \geq 0$. Ce qui contredit que $J(x_0) = -1$. Donc $(0,-1) \notin \mathrm{Im}(f, J)$.

4) $\mathrm{Im}(f, J)$ est un ensemble convexe fermé non vide et $(0,-1) \notin \mathrm{Im}(f, J)$. Donc, d'après le Th. de séparation stricte, il existe une forme linéaire continue φ sur $F \times \mathbb{R}$ et il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que : $\varphi((0,-1)) > \alpha$ et $\varphi(z) < \alpha$, $\forall z \in \mathrm{Im}(f, J)$. Soit $z \in \mathrm{Im}(f, J)$. On a $\forall t > 0$, $tz \in \mathrm{Im}(f, J)$, donc $\varphi(tz) < \alpha$. Ce qui implique que $\varphi(z) < \frac{\alpha}{t}$. $t \to +\infty \Rightarrow \varphi(z) \leq 0$. On a aussi $\varphi(-z) \leq 0$. Donc $\varphi(z) = 0$, $\forall z \in \mathrm{Im}(f, J)$. Posons $\varphi(0,1) = a$ et $\xi(y) = \varphi(y, 0)$, $\forall y \in F$. On a $\varphi(0,-1) = -a > \alpha$ et $0 \in \mathrm{Im}(f, J)$ donc $\varphi(0) < \alpha$ $\Rightarrow \alpha > 0 \Rightarrow a > 0$. On peut donc écrire $\forall x \in E$, $\varphi(f(x), J(x)) = 0 \Rightarrow$ $\varphi(f(x), 0) + J(x)\varphi(0,1) = 0 \Rightarrow \xi(f(x)) + a J(x) = 0 \Rightarrow J = \left(-\frac{\xi}{a}\right) \circ f$.

Université Moulay Ismail
18
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
et Informatique

Année universitaire 17-

Filières : SMA
Analyse Fonctiuonnelle (S_5)

Examen: Session ordinaire
Durée : 01 H 30 mn

Exercice 1. (13,5 pts)

Soient E un e.v.n., F_1 et F_2 deux s.e.v. de E. On suppose que E est la somme directe algébrique de F_1 et F_2. On désigne par p_1 la projection de E sur F_1 parallélement à F_2 et par p_2 la projection de E sur F_2 parallélement à F_1.

1pt 1) Montrer que : p_1 est continue $\Leftrightarrow$ p_2 est continue.

1,5pt 2) Montrer que si p_1 est continue alors F_1 et F_2 sont fermés.

3,5 pts 3) Montrer que p_1 est continue ssi il existe $c > 0$ tel que

$$\|x_2\| \leq c\, d(x_2, F_1), \quad \forall x_2 \in F_2.$$

4) On suppose que F_1 est fermé et on considère l'application linéaire

$$f \ : \ \begin{array}{ccc} F_2 & \rightarrow & E/F_1 \\ x_2 & \mapsto & \dot{x}_2 \end{array}$$

3 pts i) Montrer que f est bijective, continue et déterminer $f^{-1}(\dot{x})$, $\forall \dot{x} \in E/F_1$.

3,5 pts ii) Déduire de 3) que p_1 est continue ssi f^{-1} est continue.

2 pts 5) Déduire de 4) que si E est un espace de Banach et F_1 et F_2 sont fermés alors p_1 est continue.

Exercice 2.

Soient E un espace de Banach, F un s.e.v. de E et f une forme linéaire continue sur F.

2 pts 1) Montrer que $\overline{F}$ est un s.e.v. de E.

2,5 pts 2) Montrer qu' on peut prolonger f en une application continue sur $\overline{F}$ et que ce prolongement est linéaire.

2 pts 3) On suppose que E est un espace de Hilbert. Montrer qu'on peut prolonger f en une forme linéaire continue sur E. (Remarquer que $\overline{F}$ est un espace de Hilbert et utiliser le Théorème de représentation de Riesz)

Exercice 1.

1) On a $p_1 + p_2 = id_E$. Donc $p_1 = id_E - p_2$ et $p_2 = id_E - p_1$. Comme id_E est continue, on a : p_1 est continue ssi p_2 est continue.

2) Supposons que p_1 est continue, alors p_2 est aussi continue. D'autre part, on a :

$$E_1 = \{x \in E \mid p_2(x) = 0\} = p_2^{-1}(\{0\})$$

et

$$E_2 = \{x \in E \mid p_1(x) = 0\} = p_1^{-1}(\{0\}).$$

Donc, puisque $\{0\}$ est fermé, E_1 et E_2 sont fermés.

3) Supposons que p_1 est continue, alors p_2 est continue. Comme p_2 est une application linéaire, il existe $c > 0$ tel que :

$$\forall x \in E, \qquad \|p_2(x)\| \leq c\|x\|.$$

Soit $x_2 \in F_2$, on a : $\forall x_1 \in F_1$, $\|p_2(x_1 - x_2)\| \leq c\|x_1 - x_2\|$.

Or $\|p_2(x_1 - x_2)\| = \|-x_2\| = \|x_2\|$ et $\|x_1 - x_2\| = \|x_2 - x_1\|$.

Donc $\|x_2\| \leq c\|x_2 - x_1\|$, $\forall x_1 \in F_1$

Ce qui implique que $\|x_2\| \leq c\, d(x_2, F_1)$.

Inversement, supposons qu'il existe $c > 0$ tel que

$$\|x_2\| \leq c\, d(x_2, F_1), \quad \forall x_2 \in F_1 :$$

Soit $x \in E$, il existe $x_1 \in F_1$ et $x_2 \in F_2$ tels que $x = x_1 + x_2$. Puisque F_1 est un sev, $-x_1 \in F_1$. Donc $d(x_2, F_1) \leq \| x_2 - (-x_1) \|$. Alors :

$$\| x_2 \| \leq c\, d(x_2, F_1) \leq c \, \| x_1 + x_2 \|$$

càd

$$\| p_2(x) \| \leq c \, \| x \| .$$

Ceci étant vrai $\forall x \in E$. Donc p_2 est continue.

$\Rightarrow p_1$ est continue.

4°) i) • Montrons que f est injective. On a :

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} f &= \{ x_2 \in F_2 \mid \dot{x}_2 = \dot{0} \} = \{ x_2 \in F_2 \mid x_2 \in F_1 \} \\ &= F_1 \cap F_2 = \{0\} . \end{aligned}$$

Donc f est injective.

• Montrons que f est surjective.

Soit $\dot{x} \in E/F_1$. $\exists x_1 \in F_1$ et $\exists x_2 \in F_2$ tels que $x = x_1 + x_2$. Alors $\dot{x} = \dot{x}_1 + \dot{x}_2 = \dot{x}_2 = f(x_2)$. Donc f est surjective.

• Montrons que f est continue.

On a $\forall x_2 \in F_2$, $\| f(x_2) \| = \| \dot{x}_2 \| = d(x_2, F_1) \leq \| x_2 - 0 \| = \| x_2 \|$. Donc f est continue.

• $\forall \dot{x} \in E/F_1$, $f^{-1}(\dot{x}) = x_2$ où $x_2 = p_2(x)$.

ii) Supposons que p_1 est continue. Alors, d'après 3°), $\exists c > 0$ tq $\| x_2 \| \leq c\, d(x_2, F_1)$, $\forall x_2 \in F_2$. Soit $\dot{x} \in E/F_1$. $\exists x_1 \in F_1$ et $\exists x_2 \in F_2$ tels que $x = x_1 + x_2$. D'où $\| f^{-1}(\dot{x}) \| = \| x_2 \| \leq c\, d(x_2, F_1) = c \| \dot{x}_2 \| = c \| \dot{x} \|$. Donc f^{-1} est continue.

Inversement, supposons que f^{-1} est continue. Alors il existe $c>0$ tel que : $\forall \dot{x} \in E/_{F_1}$, $\|f^{-1}(\dot{x})\| \leq c\|\dot{x}\|$.
En particulier, $\forall x_2 \in F_2$, $\|f^{-1}(\dot{x}_2)\| \leq c\|\dot{x}_2\|$.
càd : $\forall x_2 \in F_2$, $\|x_2\| \leq c \; d(x_2, F_1)$. Donc, d'après 3°), p_1 est continue.

5°) Supposons que E est un espace de Banach et que F_1 et F_2 sont fermés. Alors F_2 et $E/_{F_1}$ sont des espaces de Banach et puisque f est bijective et continue f^{-1} est continue (d'après un corollaire du Th. de l'appl. ouverte). Donc d'après 4°) ii), p_1 est continue.

__Exercice 2__

1) $F \neq \emptyset$ donc $\bar{F} \neq \emptyset$. Soient $x, y \in \bar{F}$ et $\alpha, \beta \in K$. M.q. $\alpha x + \beta y \in \bar{F}$. Puisque $x, y \in \bar{F}$, il existe deux suites (x_n) et (y_n) d'éléments de F telles que : (x_n) converge vers x et (y_n) converge vers y. F étant un s.e.v. de E donc

$$\alpha x_n + \beta y_n \in F \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

La suite $(\alpha x_n + \beta y_n)$ converge vers $\alpha x + \beta y$. Donc $\alpha x + \beta y \in \bar{F}$
c.q.f.d

2) f est une application linéaire continue, donc elle est lipschitzienne et par suite elle est uniformément continue. Donc, d'après le cours, on peut prolonger f par continuité à $\bar{F}$. Soit $\tilde{f}$ ce prolongement. Montrons que $\tilde{f}$ est linéaire

Soient $x, y \in \bar{F}$ et $\alpha, \beta \in K$. M.q $\tilde{f}(\alpha x+\beta y)=\alpha\tilde{f}(x)+\beta\tilde{f}(y)$.
Puisque $x, y \in \bar{F}$, il existe deux suites (x_n) et (y_n) d'éléments de F telle que $\lim x_n = x$ et $\lim y_n = y$. On a :

$$f(\alpha x_n+\beta y_n) = \alpha f(x_n) + \beta f(y_n) \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

En faisant tendre n vers l'infini, on obtient :

$$\tilde{f}(\alpha x+\beta y) = \alpha \tilde{f}(x) + \beta \tilde{f}(y).$$

Donc $\tilde{f}$ est linéaire.

3°) D'après 2°), on peut prolonger f en une forme linéaire continue $\tilde{f}$ sur $\bar{F}$. Puisque $\bar{F}$ est un espace de Hilbert, d'après le Th. de Riesz, il existe $a \in \bar{F}$ tel que :

$$\forall x \in \bar{F}, \quad \tilde{f}(x) = \langle x \mid a \rangle.$$

Soit g l'application :

$$\begin{aligned} E &\longrightarrow K \\ x &\longmapsto \langle x \mid a \rangle \end{aligned}$$

Alors g est une forme linéaire continue qui coincide avec f sur F.

Université Moulay Ismail
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année universitaire 17-18
Filières : SMA
Analyse Fonctionnelle (S_6)

Examen: Session de Rattrapage
Durée : 01 H 30 mn

Exercice 1. (5pts)

2,5 **1) Soit A une partie d'un espace métrique X. Montrer que:**

$$\forall x \in X, \quad d(x, A) = d(x, \bar{A}).$$

2,5 **2) Soient E un e.v.n. et F un s.e.v. fermé de E. On suppose qu'il existe $r \in [0, 1[$ tel que**

$$\forall x \in B_f(0, 1), \quad d(x, F) < r.$$

Montrer que $F = E$.

Exercice 2. (4pts)
Soient E un espace de Hilert et F un s.e.v. fermé de E et différent de E. Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que

$$\| x \| = 1 \ \text{ et } \ d(x, F) = 1.$$

Exercice 3. (5pts)
Soient E un e.v.n., $a \in E$ et $r > 0$. Montrer que l'intérieur de la boule fermée de centre a et de rayon r est la boule ouverte de centre a et de rayon r. Ce résultat est-il vrai dans un espace métrique quelconque ? Justifier votre réponse.

Exercice 4. (6pts)

Soit N une norme sur l'espace E des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que:

i) (E, N) est complet.

ii) Pour toute suite $(f_n)_n$ qui converge vers une limite f dans (E, N), la suite $(f_n)_n$ converge simplement vers f.

Pour tout $x \in [0, 1]$, on désigne par T_x l'application:

$$\begin{array}{ccc} E & \rightarrow & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & f(x). \end{array}$$

2 **1) Montrer que T_x est continue sur (E, N), $\forall x \in [0, 1]$.**

3 **2) On désigne par N_∞ la norme de la convergence uniforme. Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que $N_\infty(f) \leq CN(f)$, $\forall f \in E$. (Appliquer le Théorème de Banach-Steinhaus à la famille $(T_x)_{x\in[0,1]}$)**

1 **3) En déduire que les normes N et N_∞ sont équivalentes.**

Exercice 1

1) Soit $x \in X$. Montrons que $d(x, \bar{A}) \leq d(x, A)$.

On a $\forall a \in A$, $a \in \bar{A}$. Donc $d(x, \bar{A}) \leq d(x, a)$. Ceci étant vrai $\forall a \in A$. Donc $d(x, \bar{A}) \leq d(x, A)$.

Montrons que $d(x, A) \leq d(x, \bar{A})$. Soit $a \in \bar{A}$, il existe une suite (a_n) d'éléments de A telle que $\lim(a_n) = a$.

On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $d(x, A) \leq d(x, a_n)$

En faisant tendre n vers l'infini, on obtient :

$$d(x, A) \leq d(x, a)$$

Ceci étant vrai $\forall a \in \bar{A}$. Donc $d(x, A) \leq d(x, \bar{A})$.

2) Désignons par π la projection de E sur E/F. On a $\forall x \in E$, $d(x, F) = \|\dot{x}\| = \|\pi(x)\|$. Donc $\forall x \in B_E(0,1)$, $\|\pi(x)\| < r$. Cela implique que $\|\pi\| \leq r < 1$. Si F était différent de E, on aurait $\|\pi\| = 1$. Ce qui n'est pas. Donc $F = E$.

Exercice 2

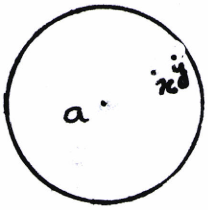
On a $E = F \oplus F^{\perp}$ et $F \neq E$. Donc $F^{\perp} \neq \{0\}$. Soit $e \in F^{\perp} \setminus \{0\}$ et $x = \frac{e}{\|e\|}$. Alors $x \in F^{\perp}$ et $\|x\| = 1$. Montrons que $d(x, F) = 1$. On a $d(x, F) \leq d(x, 0) = \|x\| = 1$. Il reste à montrer que $1 \leq d(x, F)$. Soit $y \in F$. Alors $\langle x | y \rangle = 0$. Donc $\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 = 1 + \|y\|^2 \geq 1$. Cela implique que $\|x - y\| \geq 1$. cad $d(x, y) \geq 1$. Ceci étant vrai $\forall y \in F$. Donc $d(x, F) \geq 1$

cqfd

Exercice 3

$B_o(a,r)$ est un ouvert contenu dans $B_f(a,r)$. Donc $B_o(a,r) \subset \text{int}(B_f(a,r))$. Inversement, soit $x \in \text{int}(B_f(a,r))$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B_o(x,\varepsilon) \subset B_f(a,r)$.

Posons $y = x + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{x-a}{\|x-a\|}$



On a $y \in B_o(x,\varepsilon)$. Donc

$y \in B_f(a,r)$. Cela implique que $\|y-a\| \leq r$. Càd $\left(1 + \frac{\varepsilon}{2\|x-a\|}\right)\|x-a\| \leq r$.

D'où $\|x-a\| \leq \frac{r}{\left(1+\frac{\varepsilon}{2\|x-a\|}\right)} < r$. Ce qui montre que

$x \in B_o(a,r)$.

Ce résultat n'est pas vrai dans un espace métrique quelconque. Par exemple. Dans un espace métrique discret :

$B_o(a,1) = \{a\}$, $B_f(a,1) = E$ et $\text{int}(B_f(a,1)) = E$

Exercice 4

1) Soit $f \in E$. Montrons que T_x est continue en f. Soit (f_n) une suite d'éléments de E qui converge vers f pour la norme N. D'après ii) la suite $(f_n(x))$ converge vers $f(x)$. càd $(T_x(f_n))$ converge vers $T_x(f)$. Donc T_x est continue en f.

2) Soit $x \in [0,1]$, montrons que T_x est linéaire. Soient $f, g \in E$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On a $T_x(\alpha f + g) = (\alpha f + g)(x)$ $= \alpha f(x) + g(x) = \alpha T_x(f) + T_x(g)$. Donc T_x est linéaire.

De plus, T_x est continue $\forall x \in [0,1]$, (E,N) est un espace de Banach et $\sup |T_x(f)| \leq N_\infty(f)$, $\forall f \in E$. Donc d'après le Th. de Banach-Steinhaus, il existe $c>0$ tel que $\forall x \in [0,1]$, $\|T_x\| \leq c$. Cela signifie que $\forall x \in [0,1]$, $\forall f \in E$, $|T_x(f)| \leq c N(f)$. Càd $N_\infty(f) \leq c\, N(f)$, $\forall f \in E$.

3) (E,N) et (E,N_∞) est un espace de Banach et il existe $c>0$ tel que $N_\infty(f) \leq c\, N(f)$, $\forall f \in E$. Donc d'après le cours, les normes N et N_∞ sont équivalentes.

Université Moulay Ismail
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année universitaire 18-19
Filières : SMA
Analyse Fonctionnelle (S_6)

Examen: session ordinaire
Durée : 01 H 30 mn

Exercice 1. [(1.5+3+1.5+2 = 8)pts]

Soient E et F deux espaces métriques et f une application de E dans F.

1) a) Montrer que tout ensemble borné de E est contenu dans une boule fermée de E.

b) On suppose que toute boule fermée de E est compacte. Montrer que E est complet.

2) On suppose que f est uniformément continue sur toute boule fermée.

a) Montrer que pour toute suite de Cauchy (a_n) de E, $(f(a_n))$ est une suite de cauchy de F.

b) On suppose en plus que f est bijective et son invese f^{-1} est continue. Montrer que si F est complet, alors E est complet.

Exercice 2. [3pts]

Soient E et F deux espaces topologiques et $f : E \to F$ une application continue. On suppose que:

i) E est connexe

ii) $\forall a \in E, \exists V_a \in \mathcal{V}(a) : f(x) = f(a), \ \forall x \in V_a$.

Soit $x_0 \in E$. Montrer que $f(x) = f(x_0), \ \forall x \in E$.

Exercice 3. [(2+2+2+1.5+1.5 = 9)pts]

Soient E et F deux e.v.n. , $f : E \to F$ une application linéaire, $a \in E$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$. On suppose que $f\big(B_0(a\,;\,\alpha)\big) = B_0\big(f(a)\,;\,\beta\big)$

1) Montrer que $f\big(B_0(0\,;\,1)\big) = B_0\big(0\,;\,\frac{\beta}{\alpha}\big)$.

2) On suppose que $F \neq \{0\}$. Montrer que $\|f\| = \frac{\beta}{\alpha}$.

3) Montrer que f est une application ouverte .

4) On suppose que f est bijective . Montrer que $\|f^{-1}\| = \frac{\alpha}{\beta}$.

5) Montrer que pour tout $c > \frac{\alpha}{\beta}$, il existe une application g de F dans E telle que :

$$\begin{cases} \forall y \in F, & f(g(y)) = y \\ \|g(y)\| & \leq \ c\|y\|. \end{cases}$$

Corrigé de l'examen d'analyse fonctionnelle

Session ordinaire 18-19.

Exercice1

1) a) Soit A un ensemble borné. Si $A = \emptyset$, alors A est contenu dans n'importe boule fermée. Si $A \neq \emptyset$, soit $a \in A$, alors $\forall x \in A$, $d(x,a) \leq \delta(A) < +\infty$. Donc $x \in B_f(a, \delta(A))$. Ainsi, $A \subset B_f(a, \delta(A))$.

b) Soit (x_n) une suite de Cauchy dans E. Alors (x_n) est bornée. Donc d'après a) (x_n) est contenue dans une boule fermée B. Comme B est compacte, (x_n) possède une v.a et comme (x_n) est de Cauchy, elle converge vers cette v.a. Donc E est complet.

2) a) Soit (a_n) une suite de Cauchy dans E. D'après 1)a) (a_n) est contenue dans une boule fermée B. Comme f est uniformément continue sur B, $(f(a_n))$ est une suite de Cauchy dans F.

b) Supposons F complet. Soit (a_n) une suite de Cauchy dans E. D'après 2) a), $(f(a_n))$ est une suite de Cauchy dans F. Comme F est complet, $(f(a_n))$ est convergente et comme f^{-1} est continue, $(f^{-1}(f(a_n)))$ est convergente. Càd (a_n) est convergente. Donc E est complet.

<u>Exercice 2</u> Considérons l'ensemble $A = \{x \in E \mid f(x) = f(x_0)\}$.

Montrons que A est fermé. Soit $b \in E \backslash A$, il existe un voisinage V_b de b tel que $f(x) = f(b)$, $\forall x \in V_b$. Puisque $f(b) \neq f(x_0)$, on a $V_b \subset E \backslash A$. Donc $E \backslash A$ est ouvert $\Rightarrow$ A est fermé. Montrons que A est ouvert.

Soit $a \in A$, il existe $V_a \in \mathcal{V}(a)$ tq $\forall x \in V_a$, $f(x) = f(a) = f(x_0)$. Donc $V_a \subset A$. Ainsi A est voisinage de tous ses points. Donc A est ouvert. Maintenant A est ouvert, fermé et non vide (car $x_0 \in A$). De plus E est connexe. Donc $A = E$. càd $\forall x \in E$, $f(x) = f(x_0)$.

<u>Exercice 3</u>

1) Soit $x \in B_o(0;1)$. On a $\|(a+\alpha x) - a\| = \alpha\|x\| < \alpha$.
Donc $a + \alpha x \in B_o(a, \alpha)$ et par suite $f(a+\alpha x) \in B_o(f(a); \beta)$
càd $\|f(a+\alpha x) - f(a)\| < \beta \iff \alpha\|f(x)\| < \beta \iff \|f(x)\| < \frac{\beta}{\alpha}$
$\iff f(x) \in B_o(0; \frac{\beta}{\alpha})$. Donc $f(B_o(0;1)) \subset B_o(0; \frac{\beta}{\alpha})$.

Inversement, soit $y \in B_o(0; \frac{\beta}{\alpha})$. On a :
$\|(f(a) + \alpha y) - f(a)\| < \beta$. Donc $f(a) + \alpha y \in B_o(f(a); \beta)$
et par suite il existe $x \in B_o(a, \alpha)$ tel que
$f(a) + \alpha y = f(x)$. D'où $y = f\left(\frac{x-a}{\alpha}\right)$ avec
$\left\|\frac{x-a}{\alpha}\right\| < 1$. Donc $y \in f(B_o(0;1))$. Ce qui montre que $B_o(0; \frac{\beta}{\alpha}) \subset f(B_o(0;1))$.

2°) On a : $\forall x \in B_f(0;1)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(1 - \frac{1}{n})x \in B_o(0;1)$.
Donc $f((1-\frac{1}{n})x) \in B_o(0; \frac{\beta}{\alpha})$. càd :

$$\|f(1-\tfrac{1}{n})x\| < \frac{\beta}{\alpha} \iff (1-\tfrac{1}{n})\|f(x)\| < \frac{\beta}{\alpha}.$$

En faisant tendre n vers l'∞. On obtient $\|f(x)\| \leq \frac{\beta}{\alpha}$.
Donc $\sup\{\|f(x)\|, \|x\| \leq 1\} \leq \frac{\beta}{\alpha} \Rightarrow \|f\| \leq \frac{\beta}{\alpha}$.

Il reste à montrer que $\|f\| \geq \frac{\beta}{\alpha}$. Soit $y \in F \setminus \{0\}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{\beta}{\alpha}(1-\frac{1}{n})\frac{y}{\|y\|} \in B_o(0;\frac{\beta}{\alpha})$. Donc il existe $x_n \in B_o(0,1)$ tel que : $\frac{\beta}{\alpha}(1-\frac{1}{n})\frac{y}{\|y\|} = f(x_n)$.
Alors $\|f(x_n)\| = \frac{\beta}{\alpha}(1-\frac{1}{n})$. Or $\|f(x_n)\| \leq \|f\|\|x_n\|$.
Donc $\frac{\beta}{\alpha}(1-\frac{1}{n}) \leq \|f\|\|x_n\| < \|f\|$ (car $\|x_n\|<1$).
En passant à la limite, on obtient $\frac{\beta}{\alpha} \leq \|f\|$.

3°) Soit A un ouvert de E. Montrons que $f(A)$ est voisinage de tous ses points. Soit $x \in A$, il existe $r>0$ tel que $B_o(x;r) \subset A$. Alors $f(B_o(x,r)) \subset f(A)$. Or $B_o(x,r) = x + r\,B_o(0;1)$. Donc $f(B_o(x;r)) = f(x) + r\,f(B_o(0;1))$
$= f(x) + r\,B_o(0;\frac{\beta}{\alpha}) = B_o(f(x); r\frac{\beta}{\alpha})$. Donc
$B_o(f(x); r\frac{\beta}{\alpha}) \subset f(A)$. Ce qui montre que $f(A) \in \mathcal{V}(x)$.
Donc $f(A)$ est ouvert.

4°) On a : $f(B_o(a;\alpha)) = B_o(f(a);\beta)$. Donc
$f^{-1}(B_o(f(a);\beta)) = B_o(a;\alpha)$. En posant $b=f(a)$, on obtient : $f^{-1}(B_o(b;\beta)) = B_o(f^{-1}(b);\alpha)$. On peut donc remplacer dans 2°) f par f^{-1}, α par β et β par α. On obtient alors $\|f^{-1}\| = \frac{\alpha}{\beta}$.

5°) Soit $c > \frac{\alpha}{\beta}$. Pour tout $y \in F\setminus\{0\}$, $\frac{1}{c}.\frac{y}{\|y\|} \in B_o(0;\frac{\beta}{\alpha})$.
Donc $\exists\, x_y \in B_o(0;1)$ tel que $\frac{1}{c}.\frac{y}{\|y\|} = f(x_y)$.
Alors $y = f(c\|y\|x_y)$. Posons pour tout $y \in F$,

$$\begin{cases} g(y) = c\|y\|x_y & \text{si } y \neq 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$$

Alors g vérifie les conditions demandées.

Université Moulay Ismail
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année universitaire 18-19
Filière : SMA
Analyse Fonctionnelle (S_6)

Examen: Session de rattrapage
Durée : 01 H 30 mn

Exercice 1. [6 points]

Soient (E, d) et (F, d') deux espaces métriques et f une application de E dans F . Montrer que f est uniformément continue sur E ssi pour toutes suites (x_n) et (y_n) de E telles que $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0$, on a $\lim\limits_{n\to\infty} d'\Big(f(x_n), f(y_n)\Big) = 0$.

Exercice 2. [8 points]

Soient (E, d) un espace métrique et A une partie non vide de E . On note $\rho(A)$ le diamètre de A .

1) Montrer que si A est bornée , alors ils existe deux suites (x_n) et (y_n) de A telles que $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = \rho(A)$.

2) On suppose que A est compacte .

i) Montrer que A est bornée .

ii) Montrer qu'il existe deux suites (a_n) et (b_n) de A qui sont convergentes telles que $\lim\limits_{n\to\infty} d(a_n, b_n) = \rho(A)$.

iii) Montrer par deux méthodes qu'il existe $(a, b) \in A\times A$ tel que $d(a, b) = \rho(A)$

α) En utilisant ce qui précède .

β) En considérant l'application :

$$f \;:\; \begin{array}{ccc} E\times E & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & d(x,y). \end{array}$$

Exercice 3 [6 points]

Soient E un espace de Banach, F un e.v.n. , $f : E \to F$ une application linéaire continue et surjective.

1) On suppose qu'il existe $c > 0$ tel que:

$$\forall x \in E, \quad \|x\| \leq c\|f(x)\|.$$

Montrer que F est un espace de Banach.

2) Montrer que F est un espace de Banach ssi il existe $c > 0$ tel que :

$$\forall x \in E, \quad d(x, Kerf) \leq c\|f(x)\|.$$

$\Big($ On admet qu'il existe une application linéaire continue $\overline{f} : E/kerf \to F$ telle que $f = \overline{f}\circ\pi$ où π est la surjection canonique de E sur $E/Kerf$.$\Big)$

Exercice 1

Supposons que f est uniformément continue. Soient (x_n) et (y_n) deux suites de E telles que $\lim_{n \to +\infty} d(x_n, y_n) = 0$. Montrons que $\lim_{n\to+\infty} d'(f(x_n), f(y_n)) = 0$. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall x, y \in E, \quad d(x,y) \leq \eta \implies d'(f(x), f(y)) \leq \varepsilon.$$

puis il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq N, \quad d(x_n, y_n) \leq \eta.$$

Alors

$$\forall n \geq N, \quad d'(f(x_n), f(y_n)) \leq \varepsilon.$$

Donc $\lim_{n\to+\infty} d'(f(x_n), f(y_n)) = 0$.

Inversement, supposons que pour toutes suites (x_n) et (y_n) de E telles que $\lim_{n\to+\infty} d(x_n, y_n) = 0$, on a $\lim_{n\to+\infty} d'(f(x_n), f(y_n)) = 0$ et montrons que f est uniformément continue. Supposons le contraire, alors il existe $\varepsilon > 0$, pour tout $\eta > 0$, il existe $x_\eta \in E$ et $y_\eta \in E$ tels que $d(x_\eta, y_\eta) \leq \eta$ et $d'(f(x_\eta), f(y_\eta)) > \varepsilon$. En particulier :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\exists x_n \in E$, $\exists y_n \in E$ tq $d(x_n, y_n) \leq \frac{1}{n}$ et $d'(f(x_n), f(y_n)) > \varepsilon$.

Cela implique que $(d(x_n, y_n))$ tend vers zéro mais $d'(f(x_n), f(y_n))$ ne converge pas vers zéro. D'où contradiction.

Donc f est unif. cont.

Exercice 2

1) Supposons que A est bornée. Alors

$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists (x_\varepsilon, y_\varepsilon) \in A \times A \quad tq: \quad e(A) - \varepsilon < d(x_\varepsilon, y_\varepsilon) \leq e(A).$

En particulier

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \exists (x_n, y_n) \in A \times A \quad tq \quad e(A) - \frac{1}{n} \leq d(x_n, y_n) \leq e(A).$

Donc (x_n) et (y_n) sont deux suites de A telles que $\lim\limits_{n \to +\infty} d(x_n, y_n) = e(A)$.

2) i) La famille $(B_o(x, 1))_{x \in A}$ est un recouvrement ouvert de A. Puisque A est compacte, il existe $x_1, \dots, x_n \in A$ tels que $A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} B_o(x_i, 1)$. Puisque chaque boule $B_o(x_i, 1)$ est bornée, A est bornée.

ii) D'après 1), il existe deux suites (x_n) et (y_n) de A telles que $\lim\limits_{n \to +\infty} d(x_n, y_n) = e(A)$. Comme $A \times A$ est compacte, il existe une sous suite $((x_{\varphi(n)}, y_{\varphi(n)}))$ de la suite $((x_n, y_n))$ qui est convergente. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = x_{\varphi(n)}$ et $b_n = y_{\varphi(n)}$. Alors (a_n) et (b_n) sont deux suites de A qui sont convergentes et telles que $\lim\limits_{n \to \infty} d(a_n, b_n) = \lim\limits_{n \to +\infty} d(x_n, y_n) = e(A)$.

iii) a) Posons $a = \lim\limits_{n \to +\infty}(a_n)$ et $b = \lim\limits_{n \to +\infty}(b_n)$. Alors, puisque A est fermée, $a \in A$ et $b \in A$. De plus on a : $d(a, b) = \lim\limits_{n \to +\infty} d(a_n, b_n) = e(A)$.

β) L'application f est continue et $A \times A$ est compacte, onc f est bornée et atteint ses bornes sur $A \times A$.

En particulier il existe $(a, b) \in A \times A$ tel que $f(a,b) = \sup\{f(x,y),\ (x,y) \in A \times A\}$. Càd $d(a,b) = e(A)$.

Exercice 3

1) Soit (y_n) une suite de Cauchy dans F. Puisque f est surjective, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in E$ telque $f(x_n) = y_n$. D'après l'hypothèse, on a:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall m \in \mathbb{N},\ \|x_n - x_m\| \leq c\, \|f(x_n - x_m)\|.$$

comme f est linéaire, on a: $f(x_n - x_m) = f(x_n) - f(x_m) = y_n - y_m$

Donc

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall m \in \mathbb{N},\quad \|x_n - x_m\| \leq C\|y_n - y_m\|.$$

Puisque (y_n) est de Cauchy, on a : $\lim\limits_{\substack{n \to +\infty \\ m \to +\infty}} \|y_n - y_m\| = 0$.

Donc $\lim\limits_{\substack{n \to +\infty \\ m \to +\infty}} \|x_n - x_m\| = 0$. Ce qui montre que (x_n) est de Cauchy. Comme E est complet, la suite (x_n) admet une limite x et puisque f est continue, la suite (y_n) converge vers $f(x)$. Donc F est complet.

2) Puisque f est surjective, $\bar{f}$ est un isomorphisme algébrique.
D'autre part, E est complet, donc $E/\ker f$ est complet.
Si F est complet, alors d'après le théorème d'isomorphisme de Banach, $\bar{f}^{-1}$ est continue. Donc il existe $c>0$ tel que

$$\forall y \in F, \quad \|\bar{f}^{-1}(y)\| \leq c\|y\|.$$

En prenant $y = f(x)$, il vient :

$$\forall x \in E, \quad \|\dot{x}\| \leq c\,\|f(x)\|. \qquad (\text{car } y = \bar{f}(\dot{x}) \Rightarrow \dot{x} = \bar{f}^{-1}(y))$$

Or $\|\dot{x}\| = d(x, \ker f)$, donc $\quad d(x, \ker f) \leq c\,\|f(x)\|$.

Inversement, s'il existe $c>0$ tel que :

$$\forall x \in E, \quad d(x, \ker f) \leq c\,\|f(x)\|$$

alors, $\forall \dot{x} \in E/\ker f$, $\quad \|\dot{x}\| \leq c\,\|\bar{f}(\dot{x})\|$.

Donc, d'après 1), F est complet.