Université My Ismaïl
Faculté des Sciences
Département de Physique

Année universitaire 2019-2020

Série 5 (mécanique quantique SMP)

Exercice 1 .

On considère un système quantique dont l'Hamiltonien H ne dépend pas du temps. Dans la description de l'équation de Schrödinger, l'état quantique $|\psi(t)\rangle$, à l'instant t, est déterminé à partir de l'état quantique $|\psi(t_0)\rangle$ par l'action d'un opérateur linéaire ou opérateur d'évolution $U(t, t_0)$.

$$|\psi(t)\rangle = U(t, t_0)\,|\psi(t_0)\rangle$$

$$U(t_0, t_0) = 1, \forall\, t_0$$

1- Montrer que $U(t, t_0)$ satisfait à l'équation différentielle suivante :

$$\frac{i\hbar dU(t, t_0)}{dt} = HU(t, t_0)$$

$$\forall\, |\psi(t_0)\rangle$$

2- En déduire l'expression $U(t, t_0)$ en fonction de H.

3- Montrer que l'hermicité de H impose à $U(t, t_0)$ d'être unitaire.

Exercice 2 : probabilité de mesure et évolution d'un système.

On considère un système physique décrit, à t=0, par le vecteur d'état :

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|u_1\rangle + \frac{1}{2}\,|u_2\rangle + \frac{1}{\sqrt{8}}\,|u_3\rangle + \frac{1}{\sqrt{8}}\,|u_4\rangle$$

$\{|u_i\rangle\}$ étant une base ortonormée.

Dans cette base l'opérateur Hamiltonien H est représenté par :

$$H = \hbar\omega \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1-Calculer la norme de $|\psi(0)\rangle$.

2-On mesure, à t=0, l'énergie de système, quelle valeurs obtient-on et avec quelle probabilité ?

3- Lors d'une mesure, à t=0, quelle est la probabilité de trouver le système dans l'état $|u_3\rangle$?

4- Calculer la valeur moyenne de H dans l'état $|\psi(0)\rangle$.

5-Quelle est la probabilité d'obtenir précisément cette valeur moyenne lorsqu'on mesure l'énergie du système à t=0 ?

6- Calculer l'écart quadratique moyen correspondant à cette valeur moyenne.

7- On fait évoluer le système dans le temps, donner l'expression de l'état $|\psi(t)\rangle$.

8-Quelle est la probabilité de trouver le système, à l'instant t, dans l'état $|u_3\rangle$? Conclure.

Exercice 3

On considère un espace des états muni de la base orthonormée $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle\}$

L'hamiltonien H du système et une observable A sont représentés dans cette base par les matrices suivantes :

$$H = \hbar\omega\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix}$$

Avec ω,a et b sont des constantes réelles et positives.

A l'instant t=0, l'état du système est décrit par le ket normé à l'unité :

$$|\psi(0)\rangle = a|u_1\rangle + \frac{i}{\sqrt{3}}|u_2\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|u_3\rangle$$

1-Déterminer la valeur de a.

2-Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A.

3-A l'instant t=0, on mesure la grandeur physique représentée par A. Quelles valeurs peut-on trouver et avec quelles probabilités ? Vérifier que la somme des probabilités est égale à l'unité. En déduire la valeur moyenne de A à cet instant.

4-Déterminer l'état $|\psi(t)\rangle$ du système à un instant t ultérieur. $|\psi(t)\rangle$ et $|\psi(0)\rangle$ décrivent ils deux états physiquement indiscernables ?

5-La grandeur physique représentée par A est-elle une constante de mouvement ? Justifier.

6-Trouver l'état du système juste après la mesure de l'énergie.