Chapitre 3 : Exemples et Remarques

1 Théorème de Baire et ses conséquences

Remarque 1 *Le Théorème de Baire affirme que l'intersection des U_n est dense. Cette intersection n'est pas nécessairement ouverte. Comme le montre l'exemple suivant :*

Exemple 2 *Soit l'espace métrique complet $(\mathbb{R}, |.|)$ Puisque $\mathbb{Q}$ est dénombrable, $\mathbb{Q} = \{r_n; n \geq 0\}$. Soit $U_n = \mathbb{R} \setminus \{r_n\}$. Alors U_n est ouvert et dense dans $\mathbb{R}$. Par le Théorème de Baire $\bigcap_{n\geq 0} U_n = \bigcap_{n\geq 0}(\mathbb{R} \setminus \{r_n\}) = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, est bien dense dans $\mathbb{R}$. Mais $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ n'est ni ouvert ni fermé.*

Remarque 3 *(1) Souvent le Théorème de Baire est utilisé sous la forme suivante : Soit (E, d) est un espace métrique complet non vide. Soit $(E_n)_{n\geq 1}$ une suite d'ensembles de fermés de E tel que $E = \bigcup_{n\geq 1} E_n$, alors il existe $n_0 \geq 1$ tel que $int(E_{n_0}) \neq \emptyset$.*
(2) Sans l'hypothèse dénombrable, le Théorème de Baire peut être faux.

Exemple 4 *Soit l'espace métrique complet $(\mathbb{R}, |.|)$. Alors $\mathbb{R} = \bigcup_{n\geq 1}\{x\}$, or $\{x\}$ est fermé d ?intérieur vide par contre $\mathbb{R}$ n'est pas d'intérieur vide.*

Remarque 5 *La conclusion du Théorème de Baire est appelée la propriété de Baire. Un espace topologique qui admet cette propriété est dit espace de Baire (ou espace de second catégorie).*

2 Conséquences du Théorème de Baire

2.1 Théorème de Banach-Steinhaus

Sans l'hypothèse "E espace de Banach", le Théorème de Banach- Steinhauss, peut être faux.

Exemple 6 $E = C_{00}(\mathbb{N}) = \{(x_n)_n \subseteq \mathbb{C}; \exists N \in \mathbb{N}, x_n = 0, \forall n \geq N\}$ *muni de la norme* $\|.\|_\infty$ *est un espace normé. Soit $T_n : E \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $T_n(x) = \sum_{k=1}^{n} kx_k$, $x = (x_n)_n \in E$. Alors $T_n(x) \leq (\sum_{k=1}^{n} k)\|x\|_\infty$.*
Ceci implique que $T_n \in L(E, \mathbb{C})$. D'autre part, $\forall x \in E$ $lim_{n\to\infty}T_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} kx_k$.
Cette série ne contient qu'un nombre fini de termes non nuls. Donc la suite $(T_n(x))_n$ est bornée pour tout $x \in E$, par conséquent les hypothèses du Théorème de Banach-Steinhauss sont vérifiées, par contre la conclusion n'est pas vérifiée. En effet si $x = (x_n)_n \in E$ avec $x_1 = x_2 = ... = x_n = 1$ et $x_k = 0, \forall k \geq n, alors \|T_n\| \geq \|T_n(x)\| = \sum_{k=1}^{n} k \geq n$. Explication : L'espace normé $(C_{00}(\mathbb{N}), \|.\|_\infty)$ n'est pas complet.

2.2 Théorème de l'application ouverte

Remarque 7 *Rappelons que une fonction f est continue si et seulement si l'image réciproque d'un ouvert de F est un ouvert de E (i.e. si U est un ouvert de F, $f^{-1}(U) = \{x \in E;\ f(x) \in U\}$ est un ouvert de E. Dans le cas des espaces normés, on a la caractérisation des applications linéaires ouvertes :*

Remarque 8 *La réciproque du Théorème de l'application ouverte est vraie même avec seulement l'hypothèse E, F espaces normés.*

Remarque 9 *Soit $E = C_{00}$ muni de la norme $\|.\|_\infty$. Soit $T : E \longrightarrow E$ définie par $T((x_n)_n) = (\frac{1}{n}x_n)_n,$. Alors $T \in L(E)$, bijective, et sa bijection réciproque est définie par $T^{-1}((x_n)_n) = (nx_n)_n$ n'est pas continue. Donc le Théorème Isomorphisme de Banach, est faux si E n'est pas complet.*

Remarque 10 *(importante) Dans la présentation des résultats de cette section, nous montrons que : Théorème Application Ouverte $\Longrightarrow$ Théorème Isomorphisme de Banach $\Longrightarrow$ Théorème du graphe fermé . En faite les trois Théorèmes sont équivalents. En effet :*

1) *Pour montrer que Théorème du graphe fermé$\Rightarrow$ Théorème d'Isomorphisme de Banach, il suffit de remarquer que si T est linéaire et bijective alors le graphe de T est fermé si et seulement si le graphe de T^{-1} est fermé.*
2) *Pour montrer que Théorème Isomorphisme de Banach $\Rightarrow$ Théorème de l'Application Ouverte, on utilise la factorisation $T = So\pi$ via le quotient de E sur $Ker(T)$. Alors π est ouverte et S continue injective. De plus si T est surjective alors S est bijective. Par le Théorème Isomorphisme de Banach, S^{-1} est continue. Donc si $\Omega \subseteq E$ est un ouvert, alors $T(\Omega) = S(\pi(\Omega) = (S^{-1})^{-1}(\pi(\Omega))$ est ouvert puisque $\pi(\Omega)$ est un ouvert et S^{-1} est continue.*

Pr. Mohammed KACHAD
Faculté des Sciences et Techniques
Errachidia.