Université Moulay Ismail
Faculté des Sciences Meknès
Département de Mathématiques

Année universitaire: 2019-2020
Filière: SMA S6
Module: Prob et Proc Stoch
Prof: Souhail Boumour

TD 5

Exercice 1

Soit $(X_n)_n$ une suite de v.a de lois $\Big(\mathcal{B}(n,p_n)\Big)_n$, telles que $np_n \to \lambda > 0$, lorsque $n \to +\infty$.

1) Montrer par deux méthodes que $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ qui suit $\mathcal{P}(\lambda)$.

2) En déduire X dans le cas où chaque $X_n \sim \mathcal{B}(n, \frac{1}{n})$.

3) Calculer exactement et par approximation: $P(Y=1)$ si $Y \sim \mathcal{B}(10^3, 10^{-3})$.

Exercice 2

Soit X une v.a.r à densité continue. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose: $X_n = Xe^{\frac{1}{n}}$.

On note F_X la fonction de répartition de X et F_{X_n} celle de X_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) Exprimer F_{X_n} en fonction de F_X.

2) En déduire que $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

3) Soit $(Y_n)_n$ une suite de v.a de lois $\Big(\mathcal{P}(\frac{1}{n})\Big)_n$. Déterminer Y tel que $Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Y$.
(Remarque: distinguer les deux cas: $P(Y_n = 0)$ et $P(Y_n = k \neq 0)$).

Exercice 3

Pour tout entier naturel n non nul, on considère la fonction f_n définie par:

$$f_n(x) = 1_{(x>0)} n^2 x \exp\Big(-\frac{n^2x^2}{2}\Big).$$

1) Montrer que f_n est une densité de probabilité.

2) Soit $(X_n)_n$ une suite de v.a telle que, pour tout entier $n \geq 1$, X_n admet pour densité f_n. Démontrer que $X_n \xrightarrow{P} X = 0$.

Exercice 4

On souhaite estimer $I(f) = \int_0^1 f(x)dx$, où f est une fonction continue sur $[0, 1]$.
Soit $(X_n)_n$ une suite de v.a i.i.d définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ de loi commune la loi uniforme sur $[0, 1]$. On pose:

$$\overline{f}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(X_i).$$

1) Déterminer à l'aide de loi forte des grandes nombres la limite p.s de $\overline{f}_n$ lorsque $n \to +\infty$.

2) Calculer la limite p.s de la suite:

$$Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2.$$

3) Pratiquement, proposer un algorithme d'estimation de $I(f)$.

Exercice 5

Soit $(U_n)_n$ une suite de v.a i.i.d de loi $\mathcal{U}([0, 1])$. On pose: $M_n = \max\{U_1, ..., U_n\}$ et $X_n = n(1 - U_n)$.

1) Déterminer la fonction de répartition de M_n.

2) En déduire que la fonction de répartition de X_n est donnée par:

$$F_{X_n} = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - (1 - \frac{x}{n})^n & \text{si } 0 \leq x \leq n \\ 1 & \text{si } x \geq n \end{cases}$$

(Remarque: Utiliser le fait que $1 - \frac{x}{n} \in [0, 1] \Leftrightarrow x \in [0, n]$).

3) En déduire que $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ où $X \sim exp(1)$.

Exercice 6

Soit $(X_n)_n$ une suite de v.a i.i.d et de carré intégrable. On note m leur espérance commune. Étudier la convergence p.s de la suite:

$$S_n = \frac{X_1X_2 + X_2X_3 + \ldots + X_{n-2}X_{n-1} + X_{n-1}X_n}{n}.$$

(Remarque: sans perte de généralité, supposez que $n = 2p$ est pair et écrivez S_n comme somme de deux suites convenables de v.a pour appliquer la loi forte des grands nombres).

TD 5 (SMA - S6)

EX 1

1 1^{re} méthode :

$$X_n \rightsquigarrow \mathcal{B}(n, p_n) \Rightarrow P(X_n = k) = C_n^k p_n^k (1-p_n)^{n-k}$$

$$X \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda) \Rightarrow P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

Montrons que $\lim_{n \to +\infty} P(X_n = k) = P(X = k)$??

on a : $\boxed{n p_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \lambda} \Rightarrow n p_n \underset{+\infty}{\sim} \lambda$

$$\Rightarrow p_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\lambda}{n}$$

$$\Rightarrow \boxed{p_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0}$$

$$P(X_n = k) = C_n^k p_n^k (1-p_n)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p_n^k (1-p_n)^{n-k}$$

$$= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)\cancel{(n-k)!}}{k!\,\cancel{(n-k)!}} p_n^k (1-p_n)^{n-k}$$

$$= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} p_n^k (1-p_n)^{n-k}$$

on a : $\left.\begin{array}{l} n \underset{+\infty}{\sim} n \\ n-1 \underset{+\infty}{\sim} n \\ \vdots \\ n-k+1 \underset{+\infty}{\sim} n \end{array}\right\} \Rightarrow n(n-1)\cdots(n-k+1) \underset{+\infty}{\sim} \boxed{n^k}$

$$\Rightarrow P(X_n = k) \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^k p_n^k}{k!} (1-p_n)^{n-k}$$

$$\underset{+\infty}{\sim} \frac{(np_n)^k}{k!} e^{(n-k)\ln(1-p_n)}$$

$$\underset{+\infty}{\sim} \frac{(np_n)^k}{k!} e^{-(n-k)p_n \frac{\ln(1-p_n)}{-p_n}}$$

$$\underset{+\infty}{\sim} \frac{(np_n)^k e^{-np_n+kp_n}}{k!}$$

$$\frac{\ln(1+x)}{x} \underset{0}{\sim} 1$$

$$\begin{cases} np_n \longrightarrow \lambda \\ p_n \longrightarrow 0 \end{cases} \Longrightarrow (np_n)^k e^{-np_n+kp_n} \longrightarrow \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\lim_{n\to+\infty} P(X_n=k) = P(X=k)}$$

$$\Longrightarrow X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{L} X.$$

2ème méthode :

$$X_n \rightsquigarrow \mathcal{B}(n,p_n) \Longrightarrow \varphi_{X_n}(t) = \left(1-p_n+e^{it}p_n\right)^n$$

$$X \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda) \Longrightarrow \varphi_X(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}$$

Montrons que $\begin{cases} \lim_{n\to+\infty} \varphi_{X_n}(t) = \varphi_X(t) \\ \text{et } \varphi_X \text{ continue au pt } 0 \end{cases}$ (très clair)

- $\varphi_{X_n}(t) = e^{n\ln(1-p_n+e^{it}p_n)}$

$$= e^{n\frac{\ln(1-p_n+e^{it}p_n)}{-p_n+e^{it}p_n}(-p_n+e^{it}p_n)}$$

$$\frac{\ln(1+x)}{x} \underset{0}{\sim} 1$$

$$\underset{+\infty}{\sim} e^{-np_n+np_ne^{it}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-\lambda+\lambda e^{it}} = \varphi_X(t).$$

2) $X_n \sim \mathcal{B}(n, \frac{1}{n}) \Rightarrow \begin{cases} p_n = \frac{1}{n} \longrightarrow 0 \\ n p_n = 1 = \lambda \end{cases}$

$\Rightarrow \boxed{X_n \sim \mathcal{P}(1)}$

$\Rightarrow \begin{cases} X_n(\Omega) = \mathbb{N} \\ \forall k \in \mathbb{N},\ P(X_n = k) = \frac{e^{-1}}{k!} \end{cases}$

3) Exactement : $Y \sim \mathcal{B}(10^3, 10^{-3})$

$P(Y=1) = C^1_{10^3}(10^{-3})^1 \times (1-10^{-3})^{10^3-1}$

$= C^1_{1000}(0,001)(0,999)^{999}$

$\Rightarrow \boxed{P(Y=1) \simeq 0,3680...}$

Par approximation :

$\begin{cases} Y \sim \mathcal{B}(10^3, 10^{-3}) \\ n = 10^3 \\ p_n = 10^{-3} \\ n p_n = 1 \end{cases} \sim \mathcal{P}(\lambda = 1)$ d'après (2)

$\Rightarrow P(Y=1) \simeq \frac{e^{-1}(1)^1}{1!} = \frac{1}{e} \simeq \boxed{0,3678...}$

EX② ①

$$F_{X_n}(x) = P(X_n \le x)$$
$$= P(X e^{1/n} \le x)$$
$$= P(X \le x e^{-1/n})$$

$$\boxed{F_{X_n}(x) = F_X(x e^{-1/n})}$$

②

on a: $\begin{cases} x e^{-1/n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} x \\ F_X \text{ continue} \end{cases}$

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$$

$$\Rightarrow X_n \xrightarrow[n \to +\infty]{L} X$$

③

$Y_n \sim \mathcal{P}(1/n) \Rightarrow \begin{cases} Y_n(\Omega) = \mathbb{N} \\ P(Y_n = k) = \dfrac{e^{-1/n}}{k!}\left(\dfrac{1}{n}\right)^k \end{cases}$

- $P(Y_n = 0) = \dfrac{e^{-1/n}}{0!}\left(\dfrac{1}{n}\right)^0 = e^{-1/n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$
- $k \ne 0$; $P(Y_n = k) = \dfrac{e^{-1/n}}{k!}\left(\dfrac{1}{n}\right)^k \longrightarrow \dfrac{1}{k!} \times 0 = 0$

$$\Rightarrow Y_n \xrightarrow[n \to +\infty]{L} Y \text{ tq: } \begin{cases} P(Y = 0) = 1 \\ P(Y \ne 0) = 0 \end{cases}$$

④

Ex 3 1) $\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx = \int_0^{+\infty} n^2 x e^{-\frac{n^2x^2}{2}}\,dx$

f_{X_n}

$= \left[-e^{-\frac{n^2x^2}{2}}\right]_0^{+\infty} = \boxed{1} \Rightarrow$ densité de probabilité

2) Montrons que $\forall \varepsilon > 0,\ P(|X_n| > \varepsilon) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

ou bien $P(|X_n| < \varepsilon) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

on a :

$$P(|X_n| < \varepsilon) = P(-\varepsilon < X_n < \varepsilon)$$

$$= \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f_n(x)\,dx$$

$$= \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} n^2 x e^{-\frac{n^2x^2}{2}} \mathbb{1}_{(x>0)}\,dx$$

$$= \int_0^{\varepsilon} n^2 x e^{-\frac{n^2x^2}{2}}\,dx$$

$$= \left[-e^{-\frac{n^2x^2}{2}}\right]_0^{\varepsilon} = -e^{-\frac{n^2\varepsilon^2}{2}} + 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

$$\Rightarrow \boxed{X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{P} X = 0}$$

<u>Remarque</u> :

$$\boxed{\begin{array}{ccccc} p.s & \Longrightarrow & P & \Longrightarrow & L \\ & & \Uparrow & & \\ & & L^p & & \end{array}}$$

Ex 4 (1) on pose : $Y_i = f(X_i)$

les (X_i) sont iid $\Rightarrow$ les (Y_i) sont iid

d'après la loi forte des grands nombres L.f.G.N

$$m_0 = \overline{Y}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s} E(Y_1) = m$$

$$\Rightarrow \overline{f}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(X_i) \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s} E(f(X_1))$$

$$X_1 \sim U[0,1] \Rightarrow E(f(X_1)) = \int_0^1 f(x)\,dx = I(f)$$

$$\Rightarrow f_{X_1}(x) = \mathbb{1}_{[0,1]}$$

$$\Rightarrow \boxed{\overline{f}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s} I(f)}$$

(2) $f(x) = x^2 \Rightarrow Y_n = \overline{f}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s} I(f)$

et $I(f) = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$

$$\Rightarrow \boxed{Y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s} \frac{1}{3}}$$

(3) $I(f) \underset{+\infty}{\sim} \overline{f}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(X_i)$

on utilise la méthode de monte Carlo

avec $X_i \sim U(0,1)$

EX 5 1)
$$\begin{cases} x \leq 0 \Rightarrow F_{M_n}(x) = 0 \\ x \geq 1 \Rightarrow F_{M_n}(x) = 1 \end{cases}$$

- $x \in]0,1[\Rightarrow F_{M_n}(x) = P(M_n \leq x)$

$$= P(\max\{U_1, \dots, U_n\} \leq x)$$
$$= P(\forall i : U_i \leq x)$$
$$= P\left(\bigcap_{i=1}^{n} (U_i \leq x)\right)$$
$$= \prod_{i=1}^{n} P(U_i \leq x) \quad \text{(indépendantes)}$$
$$= \left(P(U_1 \leq x)\right)^n \quad \text{(de même loi)}$$
$$= \left(F_{U_1}(x)\right)^n$$

et $F_{U_1}(x) = \int_{-\infty}^{x} f_{U_1}(t)\,dt = \int_0^x 1\,dt = \boxed{x}$

$$\Rightarrow \boxed{F_{M_n}(x) = x^n}$$

2) $F_{X_n}(x) = P(X_n \leq x)$
$$= P(n(1 - U_n) \leq x)$$
$$= P\left(U_n \geq 1 - \frac{x}{n}\right)$$
$$= 1 - P\left(U_n \leq 1 - \frac{x}{n}\right)$$

$$\boxed{F_{X_n}(x) = 1 - F_{U_n}\left(1 - \frac{x}{n}\right)}$$

on a : $1-\frac{x}{n} \in [0,1] \Leftrightarrow x \in [0,1]$

$$F_{M_n}(x) = \begin{cases} 0 & ; \ x<0 \\ x^n & ; \ x \in [0,1] \\ 1 & ; \ x \geq 1 \end{cases}$$

x joue au lieu $1-\frac{x}{n}$

$$\Rightarrow F_{X_n}(x) = \begin{cases} 0 & ; \ x<0 \\ 1-\left(1-\frac{x}{n}\right)^n & ; \ 0 \leq x \leq n \\ 1 & ; \ x \geq n \end{cases}$$

3

$$\Rightarrow F_{X_n}(x) = \left(1-\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\right) \mathbb{1}(0 \leq x \leq n)$$

on a : $1-\left(1-\frac{x}{n}\right)^n = 1-e^{n\ln\left(1-\frac{x}{n}\right)}$

$$= 1-e^{n\frac{\ln(1-x/n)}{-x/n}\left(-\frac{x}{n}\right)}$$

$$\longrightarrow 1-e^{-x}$$

et $\mathbb{1}(0 \leq x \leq n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \mathbb{1}(0 \leq x < +\infty)$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} F_{X_n}(x) = \underline{(1-e^{-x})\,\mathbb{1}(x>0)}$$

qui est la fonction de répartition de $\mathcal{E}xp(1)$

$\Rightarrow$

$$\Rightarrow X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \sim \mathcal{E}xp(1)$$

Ex 6 ✱ L.F.G.N

$$\boxed{(Y_i) \text{ iid} \Rightarrow \bar{Y}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i \xrightarrow[+\infty]{p.s} E(Y_1)}$$

$n = 2p$

$$S_n = \frac{X_1X_2 + X_2X_3 + \cdots + X_{n-1}X_n}{n}$$

$$= \left(\frac{X_1X_2 + X_3X_4 + \cdots + X_{2p-1}X_{2p}}{2p}\right) + \left(\frac{X_2X_3 + \cdots + X_{2p-2}X_{2p-1}}{2p}\right)$$

$$= \frac{\left(\frac{X_1X_2 + \cdots + X_{2p-1}X_{2p}}{p}\right)}{2} + \frac{\left(\frac{X_2X_3 + \cdots + X_{2p-2}X_{2p-1}}{p}\right)}{2}$$

$$\xrightarrow[p.s]{n \to +\infty} \frac{E(X_1X_2)}{2} + \frac{E(X_2X_3)}{2}$$

$$= \frac{E(X_1)E(X_2)}{2} + \frac{E(X_2)E(X_3)}{2}$$

$$= \frac{m^2}{2} + \frac{m^2}{2} = m^2$$

$$\Rightarrow S_n \xrightarrow[n \to +\infty]{p.s} m^2$$

FIN