Université Moulay Ismail
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année universitaire 2019-2020
SMA Semestre VI
Distributions

Cours sur les distributions

Opérations sur les distributions (suite)

1.7. Convolution par une fonction.

Nous avons vu précédemment que si $f \in \mathscr{L}^1(I\!R^d)$ et si $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(I\!R^d)$, alors le produit de convolution de f et de φ définit une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$. Le résultat précédent subsiste pour $f \in \mathscr{L}^1_{loc}(I\!R^d)$.

Proposition 10. *Soient $f \in \mathscr{L}^1_{loc}(I\!R^d)$ et $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(I\!R^d)$, alors $f * g \in \mathcal{C}^\infty(I\!R^d)$ et si f est à support compact, $f * g$ l'est aussi.*

Démonstration. Soient $f \in \mathscr{L}^1_{loc}(I\!R^d)$ et $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(I\!R^d)$. Posons pour presque tout $y \in I\!R^d$ et pour tout $x \in I\!R^d$,

$$g(x, y) = \varphi(x - y)f(y).$$

Exercice.

1. Montrer que la fonction $g : I\!R^d \times I\!R^d \to I\!R$ vérifie toutes les hypothèses permettant les dérivations sous le signe somme.

2. En déduire que la fonction $x \mapsto f * g(x)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans $I\!R^d$.

3. Soit f une fonction définie presque partout sur un ouvert Ω. On appelle ouvert d'annulation de f, le plus grand ouvert $\mathcal{O}_f$ sur lequel f s'annule presque partout. Le support de f est alors le complémentaire dans Ω de $\mathcal{O}_f$. Montrer que si $f \in \mathscr{L}^1(\Omega)$

$$\text{supp} f = \text{supp}\Lambda_f.$$

4. Montrer que si $\text{supp}(f)$ est compact alors $\text{supp}(f * \varphi)$ est compact.

Remarque. Soient $f \in \mathscr{L}^1_{loc}(I\!R^d)$ et $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(I\!R^d)$. Ecrivons pour tout $x \in I\!R^d$

$$f * \varphi(x) = \int_{I\!R^d} \varphi(x - y)f(y)\mathrm{d}y =< \Lambda_f, \varphi(x - .) > .$$

Les dernières égalités montre que l'on peut définir le produit de convolution de la distribution Λ_f et de la fonction φ de classe $\mathcal{C}^\infty$ et à support compact en posant

$$\Lambda_f * \varphi(x) =< \Lambda_f, \varphi(x - .) > .$$

Plus généralement, les propriétés de régularité du produit de convolution d'une distribution et d'une fonction découlera du résultat suivant :

Proposition 11. (Dérivation sous le crochet) *Soit $g \in \mathcal{C}^\infty(\Omega_1 \times \Omega_2)$, où Ω_1 et Ω_2 sont respectivement des ouverts de $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{R}^k$. Supposons qu'il existe un compact $K \subset \Omega_1$ tel que $\varphi(x,y) = 0$ si $x \notin K$, alors pour tout $T \in \mathscr{D}'(\Omega_1)$, la fonction*

$$y \mapsto < T, \varphi(.,y) >$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^k$.

$$\partial_y^\alpha < T, \varphi(.,y) > = < T, \partial_y^\alpha \varphi(.,y) > .$$

démonstration. Pour $y \in \Omega_2$ fixé, on a, d'après la formule de Taylor,

$$\varphi(x, y+h) = \varphi(x,y) + \sum_{j=1}^{n} h_j \frac{\partial \varphi}{\partial y_j}(x,y) + \psi(x,y,h)$$

où pour tout α on a

$$\sup |\partial_x^\alpha \psi(x,y,h)| = O(|h|^2) \text{ lorsque } \; h \to 0.$$

$$< T, \varphi(., y+h) > = < T, \varphi(.,y) > + \sum_{j=1}^{n} h_j < T, \frac{\partial \varphi}{\partial y_j}(.,y) > + O(|h|^2)$$

Il en résulte que pour tout $j \in [\![1, d]\!]$

$$\partial_{y_j} < T, \varphi(.,y) > = < T, \partial_{y_j} \varphi(.,y) >$$

et ceci termine la démonstration.

Proposition 12. *Soient $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)$ et $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$. Alors en posant pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,*

$$(T * \varphi)(x) = < T, \varphi(x - .) >,$$

$T * \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ et

$$supp(T * \varphi) \subset supp(T) + supp(\varphi),$$

de plus, pour tout multi-indice α

$$\partial^\alpha (T * \varphi) = (\partial^\alpha T) * \varphi = T * (\partial^\alpha \varphi).$$

Démonstration. D'après le résultat précédent, il est clair que $T * \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$. D'autre part, pour tout multi-indice α

$$\begin{aligned} (\partial^\alpha T) * \varphi(x) &= \; < \partial^\alpha T, \varphi(x - .) > \\ &= \; (-1)^\alpha < T, \partial^\alpha (\varphi(x - .)) > \\ &= \; < T, (\partial^\alpha \varphi)(x - .) > \\ &= \; T * \partial^\alpha \varphi. \end{aligned}$$

Exercice. Soient $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)$ et $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$. On suppose que supp$(T)$ est compact, montrer que $T * \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Exemple. Pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(I\!R^d)$ et $a \in I\!R^d$, on a

$$(\delta_a * \varphi)(x) = (T_a\varphi)(x) = \varphi(x-a).$$

Proposition 13. (Intégration sous le crochet). *Soient Ω un ouvert de $I\!R^d$, T une distribution de $\mathscr{D}'(\Omega)$ et φ une fonction de $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega \times I\!R^d)$. Alors*

$$\int < T, \varphi(.,y) > \mathrm{d}y =< T, \int \varphi(.,y)\mathrm{d}y > .$$

Démonstration. Supposons que $d = 1$. Soit r un réel positif tel que φ soit à support dans $[-r,r]^2$. soit θ une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $I\!R$ d'intégrale 1, supportée dans $[-r,r]$, et soit

$$\psi(x,y) := \varphi(x,y) - \theta(y)\int \varphi(x,t)\mathrm{d}t.$$

Cette fonction est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\Omega \times I\!R$, à support dans $[-r,r]^2$, et pour tout $x \in \Omega$,

$$\int \psi(x,y)dy = 0.$$

Alors la fonction

$$\phi(x,y) := \int_{-\infty}^{y} \psi(x,t)\mathrm{d}t$$

est aussi $\mathcal{C}^\infty$ sur $\Omega \times I\!R$, à support dans $[-r,r]^2$. Par la Proposition 11. on a

$$\frac{d}{dy} < T, \phi(.,y) >=< T, \partial_y\phi(.,y) >=< T, \psi(.,y) >$$

d'où on déduit que l'application

$$y \mapsto < T, \phi(.,y) > - \int_{-\infty}^{y} < T, \psi(.,t) > \mathrm{d}t$$

est constante. Mais $y \mapsto < T, \phi(.,y) >$ et $y \mapsto \int_{-\infty}^{y} < T, \psi(.,t) > \mathrm{d}t$ sont identiquement nulles pour $y < -r$, donc ces deux fonctions sont égales. En particulier,

$$\int < T, \psi(.,y) > \mathrm{d}y = 0$$

et donc

$$\begin{aligned} 0 = & \int < T, \psi(.,y) > dy \\ = & \int < T, \varphi(.,y) > \mathrm{d}y - < T, \int \varphi(.,t)\mathrm{d}t > \int \theta(y)dy \\ = & \int < T, \varphi(.,y) > \mathrm{d}y - < T, \int \varphi(.,y)dy >, \end{aligned}$$

d'où le résultat.

Lemme. *Soit $\rho : I\!R^d \to I\!R$ une fonction intégrable, à support compact et telle que $\int \rho = 1$. Posons pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $x \in I\!R^d$ $\rho_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-d}\rho(\frac{x}{\varepsilon})$, alors pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(I\!R^d)$*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \rho_\varepsilon * \varphi = \varphi \text{ dans } \mathscr{D}(I\!R^d).$$

Autrement dit, $(\rho_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est une famille régularisante.
Démonstration. Soit $\varphi \in \mathscr{D}(I\!R^d)$. Comme pour tout multi-indice α on a :

$$\partial^\alpha(\varphi * \rho_\varepsilon) = (\partial^\alpha \varphi) * \rho_\varepsilon \text{ et que } \int \rho = \int \rho_\varepsilon = 1$$

on peut écrire

$$\partial^\alpha(\varphi * \rho_\varepsilon)(x) - \partial^\alpha\varphi(x) = \int_{I\!R^d} (\partial^\alpha\varphi(x-y) - \partial^\alpha\varphi(x))\rho_\varepsilon(y)\mathrm{d}y$$

et grâce au changement de variable $y = \varepsilon z$,

$$\begin{array}{rl} |\partial^\alpha(\varphi * \rho_\varepsilon)(x) - \partial^\alpha\varphi(x)| \leq & \int_{I\!R^d} |\partial^\alpha\varphi(x-y) - \partial^\alpha\varphi(x)||\rho_\varepsilon(y)|\mathrm{d}y \\ = & \int_{I\!R^d} |\partial^\alpha\varphi(x-\varepsilon z) - \partial^\alpha\varphi(x)||\rho(z)|\mathrm{d}z \end{array}$$

Soient K un compact et $x \in K$. Comme ρ est à support compact, que l'on peut prendre la fermeture de la boule de centre 0 et de rayon r, pour $\varepsilon \in]0,1[$ la variable $x - \varepsilon z$ appartient au voisinage compact K_r de K, où $K_r = \{\ x \mid \mathrm{dist}(x,K) \leq r\ \}$. Comme $\partial^\alpha\varphi$ est de classe $\mathcal{C}^1$, on a $|\partial^\alpha\varphi(x-\varepsilon z) - \partial^\alpha\varphi(x)| \lesssim \varepsilon|z|$ et comme $\int |z||\rho(z)|\mathrm{d}z < \infty$, les inégalités (?) impliquent que

$$\sup_{x\in K} |\partial^\alpha\varphi(x-\varepsilon z) - \partial^\alpha\varphi(x)| \lesssim \varepsilon \to 0,$$

et ceci implique que $(\varphi * \rho_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ converge vers φ dans $\mathscr{D}(I\!R^d)$ lorsque ε tend vers 0.

Théorème. *Soit $T \in \mathscr{D}'(I\!R^d)$ une distribution et $(\rho_\varepsilon)_{\varepsilon\in]0,1[}$ une famille régularisante. Posons pour tout $\varepsilon \in]0,1[$, $u_\varepsilon := T * \rho_\varepsilon$. Alors pour tout $\varepsilon \in]0,1[$ on a $u_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(I\!R^d)$ et si on pose $T_\varepsilon = \Lambda_{u_\varepsilon}$,*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} T_\varepsilon = T \text{ dans } \mathscr{D}'(I\!R^d).$$

Démonstration. D'après la Proposition 11 on sait que $u_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(I\!R^d)$. Par ailleurs grâce à la Proposition ? on a pour toute fonction $\varphi \in \mathscr{D}(I\!R^d)$

$$\begin{array}{rl} < \Lambda_\varepsilon, \varphi > = & \int_{I\!R^d} u_\varepsilon(x)\varphi(x)dx \\ = & \int_{I\!R^d} < T, \rho_\varepsilon(x - .)\varphi(x)\mathrm{d}x \\ = & < T, \int_{I\!R^d} \rho_\varepsilon(x - .)\varphi(x)dx > . \end{array}$$

Mais

$$\int \rho_\varepsilon(x-y)\varphi(x)dx = \hat{\rho}_\varepsilon * \varphi(y)$$

donc

$$< \Lambda_\varepsilon, \varphi > = < T, \check{\rho}_\varepsilon * \varphi > .$$

Par ailleurs si r est tel que $\mathrm{supp}(\rho) \subset B_r(0)$, alors pour tout $\varepsilon \in]0,1[$ on a

$$\mathrm{supp}(\check{\rho}_\varepsilon * \varphi) \subset K := \{y \in I\!R^d \mid \mathrm{dist}(y, \mathrm{supp}(\varphi)) \leq r\ \}.$$

Comme par ailleurs

$$\partial^\alpha(\check{\rho}_\varepsilon * \varphi) = \check{\rho}_\varepsilon * \partial^\alpha\varphi$$

d'après le Théorème ?. on a

$$\partial^\alpha(\check{\rho}_\varepsilon * \varphi) \to \partial^\alpha \varphi$$

uniformément sur K lorsque ε tend vers 0. Par continuité séquentielle des distributions (Proposition ?.) on a donc pour toute suite $(\varepsilon_n)_{n\geq 1}$ convergeant vers 0

$$< \Lambda_{\varepsilon_n}, \varphi > = < T, \check{\rho}_{\varepsilon_n} * \varphi > \to < T, \varphi >, \text{ lorsque } n \text{ tend vers } +\infty.$$

donc $(\Lambda_{\varepsilon_n})$ converge vers T dans $\mathscr{D}'(I\!R^d)$. Ceci achève la démonstration.

Remarque. Le théorème précédent signifie que l'image de l'application $f \mapsto \Lambda_f$ de $\mathscr{L}^1_{loc}(I\!R^d)$ dans $\mathscr{D}'(I\!R^d)$ est dense dans $\mathscr{D}'(I\!R^d)$.

L'espace des distributions à support compact

Considérons sur l'espace $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un ouvert Ω la notion de convergence suivante :

$(\varphi_n)_{n\geq 1}$ converge vers φ si, et seulement si, pour tout compact K inclu dans Ω et pour

tout multi-indice $\alpha \in I\!N^d$, la suite $(\partial^\alpha \varphi_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément sur K vers $\partial^\alpha \varphi$.

On notera alors $\mathscr{E}(\Omega)$ l'espace $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ muni de cette notion de convergence.

Une forme linéaire $T : \mathcal{C}^\infty(\Omega) \to I\!K$, où $I\!K = I\!R$ ou $\mathbb{C}$, sera dite continue sur $\mathscr{E}(\Omega)$ si pour toute suite $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ convergeant vers φ dans $\mathscr{E}(\Omega)$, la suite $(T(\varphi_n))_{n\geq 1}$ converge vers $T(\varphi)$.

On peut alors montrer (à titre d'exercice) la proposition suivante :

Proposition 14. *$T \in \mathscr{E}'(\Omega)$ si, et seulement si, il existe un compact $K \Subset \Omega$, il existe $m \in I\!N$ et une constante c tels que pour tout $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ on ait :*

$$|T(\varphi)| \leq c \max_{|\alpha|\leq m} \sup_{x\in K} |\partial^\alpha \varphi(x)|.$$

Proposition 15. *Soit $T \in \mathscr{E}'(\Omega)$, alors T est d'ordre fini et* $\operatorname{supp}(T)$ *est compact.*

Démonstration. Soit $T \in \mathscr{E}(\Omega)$. D'après la proposition précédente, il existe un compact $K \subset \Omega$ et un entier $m \in I\!N$ et une constante c tels que

$$|T(\varphi)| \leq c \max_{|\alpha|\leq m} \sup_{x\in K} |\partial^\alpha \varphi(x)|,$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$.

La dernière inégalité montre que si $\operatorname{supp}(\varphi) \subset \mathbf{C}^K_\Omega$,

$$T(\varphi) = 0$$

et donc, $\operatorname{supp}(T) \subset K$. La même inégalité montre que l'ordre de T est inférieur ou égal à m.

Définition ?. (Produit de convolution $\mathscr{D}' * \mathscr{E}'$). Soit $T \in \mathscr{D}'$ et $S \in \mathscr{E}'$. On définit le produit de convolution $T * S$ en posant pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(I\!R^d)$

$$< T * S, \varphi > := < T, \check{S} * \varphi >,$$

où la distribution $\check{S}$ est définie par

$$< \check{S}, \psi > := < S, \check{\psi} >, \text{ et pour tout } x \in I\!R^d, \check{\psi}(x) = \psi(-x).$$

Exercices.

1. Pour $T \in \mathscr{D}'(I\!R^d)$ et $a \in I\!R^d$, calculer $T * \delta_a$.
2. Soient $T \in \mathscr{D}'(I\!R^d)$ et $S \in \mathscr{E}'(I\!R^d)$. Alors pour tout multi-indice $\alpha \in I\!N^d$ on a
$$\partial^\alpha (T * S) = (\partial^\alpha T) * S = T * (\partial^\alpha S).$$
3. Soit $T \in \mathscr{D}'(I\!R^d)$. On a $T * \partial^\alpha \delta = \partial^\alpha T$.
4. Soit $T \in \mathscr{D}'(I\!R^d)$ et $S \in \mathscr{E}'(I\!R^d)$.
   a) On a $\mathrm{supp}(T * S) \subset \overline{\mathrm{supp}(T) + \mathrm{supp}(S)}$.
   b) On a, pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(I\!R^d)$
   $$< T, \check{S} * \varphi > = < S, \check{T} * \varphi >$$
   et $T * S = S * T$.
   c) Si T_1, T_2, T_3 sont trois distributions dont au moins deux sont à support compact, alors
   $$T_1 * (T_2 * T_3) = (T_1 * T_2) * T_3.$$
5. Soient $T \in \mathscr{D}'(I\!R^d)$ et $\varphi, \psi \in \mathcal{C}_c^\infty(I\!R^d)$. Alors
$$(T * \varphi) * \psi = T * (\varphi * \psi).$$