Exercice 3

SMA4

$\alpha / \ \phi(\alpha) = \alpha$

1/ $f(\alpha) = 0$ et $f'(\alpha) \neq 0$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

2/ $x_{n+1} = \phi(x_n)$

où $\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$

$$\Rightarrow \phi'(x) = \frac{f(x) f''(x)}{(f'(x))^2} \quad (*)$$

donc $\phi'(\alpha) = 0 \xRightarrow{Th4}$ et la convergence est quadratique.

2/ si $f'(\alpha) = 0$ et $f''(\alpha) \neq 0$ (α racine double).

Donc $f(x) = (x-\alpha)^2 g(x)$

où g est une f^{n} / $g(\alpha) \neq 0$

$$f'(x) = 2(x-\alpha) g(x) + (x-\alpha)^2 g'(x)$$

$$f''(x) = 2g(x) + 4(x-\alpha) g'(x) + (x-\alpha)^2 g''(x)$$

$$(*) \quad \phi'(x) = \frac{\left[(x-\alpha)^2 g(x)\right]\left[2g(x) + 4(x-\alpha) g'(x) + (x-\alpha)^2 g''(x)\right]}{\left(2(x-\alpha) g(x) + (x-\alpha)^2 g'(x)\right)^2}$$

$$= \frac{g(x)\left[2g(x) + 4(x-\alpha) g'(x) + (x-\alpha)^2 g''(x)\right]}{\left[2g(x) + (x-\alpha) g'(x)\right]^2}$$

$\phi'(\alpha) = \frac{1}{2}$ $\xRightarrow{Th3}$ conv. linéaire

si α est racine d'ordre m c.à.d $f(\alpha) = 0$, $f'(\alpha) = 0$ ... $f^{(j)}(\alpha) = 0$ pr $0 \leq j \leq m-1$ et $f^{(m)}(\alpha) \neq 0$

on montre de la m̂ façon que $\phi'(\alpha) = \frac{1}{m} \xRightarrow{Th3}$ conv lin

Remarque

~~la~~ methode de Newton est bien définie au voisinage de α même si $f'(\alpha) \neq 0$

car $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$

$$\frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{(x-\alpha)^2 g(x)}{2(x-\alpha) g(x) + (x-\alpha)^2 g'(x)}$$

$$= \frac{(x-\alpha) g(x)}{2 g(x) + (x-\alpha) g'(x)}$$

b/ $x_{k+1} = x_k - 2\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$

$= \phi_2(x_k)$

où $\phi_2(x) = x - 2\frac{f(x)}{f'(x)}$.

$$\phi_2'(x) = 1 - 2\left[\frac{-f(x) f''(x) + f'^2(x)}{(f'(x))^2}\right]$$

$$= -1 + 2\frac{f(x) f''(x)}{(f'(x))^2}$$

$$\phi_2'(\alpha) = -1 + 2 \times \frac{1}{2} = 0$$

$\xrightarrow{Th 4}$ conv. quadratique.

Exercice 4

$$x(1+e^x) = e^x$$

1/ Soit $f(x) = x(1+e^x) - e^x$.

$\begin{cases} f(0) = -1, \quad f(1) = 1 \\ f \text{ cont sur } [0,1] \end{cases}$

$\xrightarrow{T.V.I} \exists \alpha \in [0,1] \;/\; f(\alpha) = 0$

f deriv $f'(x) = 1 + e^x + xe^x - e^x$

$= 1 + xe^x > 0$ sur $[0,1]$

$\Rightarrow \alpha$ unique sur $[0,1]$

2/ $x = \boxed{\dfrac{e^x}{1+e^x} = g(x)}$

$\alpha = g(\alpha)$

3/ g est de classe C^1, C^2 sur $[0,1]$ (C^∞ sur $\mathbb{R}$)

$$\boxed{g'(x) = \frac{e^x(1+e^x) - e^x e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}}$$

$$g''(x) = \frac{e^x(1+e^x)^2 - 2e^x(1+e^x)e^x}{(1+e^x)^4}$$

$$= \frac{e^x(1+e^x) - 2e^x e^x}{(1+e^x)^3} = \frac{e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^3}$$

$x \geq 0 \Rightarrow g''(x) \leq 0$

$\Rightarrow g'(1) \leq g'(x) \leq g'(0) = \frac{1}{4}$

(4)

$\cdot \quad 0 < \frac{e}{(1+e)^2} \leq g'(x) \leq \frac{1}{4}$

$$|g'(x)| \leq \frac{1}{4} = K < 1$$

$* \quad g(x) = \frac{e^x}{1+e^x} \in [0,1] \quad \underline{\forall x}$

$\underline{\text{càd}} \quad g[0,1] \subset [0,1]$

$\Longrightarrow$ conv. de la suite $(x_k) \longrightarrow \alpha \quad \forall x_0 \in [0,1]$

où x_k est déf par $x_{k+1} = g(x_k)$

la conv est linéaire

car $g'(\alpha) \neq 0 \quad \left(g'(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}\right)$

4) $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$

et x_0 / $f(x_0) f''(x_0) > 0$, $f''(x) = (x+1)e^x$

soit $x_0 = 1$

<u>Exercice 5</u>

1/ la méthode de Newton où $f(x) = x^2 - \alpha$

$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

$= x_n - \frac{x_n^2 - \alpha}{2x_n} = \frac{x_n}{2} + \frac{\alpha}{2x_n}$

donc $(x_n)_n$ conv. vers $\sqrt{\alpha}$

et on a une conv linéaire ou quadratique

(d'après exercice 3)

(5)

2°/ $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{\dfrac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}}$ la meth de la sécante

$$= x_n - \frac{x_n^2 - \alpha}{x_n^2 - x_{n-1}^2}(x_n - x_{n-1})$$

$$= x_n - \frac{x_n^2 - \alpha}{x_n + x_{n-1}}$$

3°/ a/ Methode de Newton. $x_n = e_n\sqrt{\alpha} + \sqrt{\alpha}$

$$e_{n+1} = \frac{x_{n+1} - \sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\left(\frac{x_n}{2} + \frac{\alpha}{2x_n} - \sqrt{\alpha}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\left[\frac{1}{2}\left[x_n - \sqrt{\alpha}\right] + \frac{\alpha}{2x_n} - \frac{\sqrt{\alpha}}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}e_n + \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}\left(\frac{\alpha - \sqrt{\alpha}x_n}{x_n}\right)$$

$$= \frac{1}{2}e_n + \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{\alpha} - x_n}{\sqrt{\alpha}e_n + \sqrt{\alpha}}$$

$$= \frac{1}{2}e_n - \frac{1}{2}\,\frac{e_n}{e_n+1}$$

$$\boxed{e_{n+1} = \frac{e_n^2}{2(e_n+1)}}$$

qd $n \longrightarrow +\infty$ $e_n \longrightarrow 0$ (car $x_n \longrightarrow \sqrt{\alpha}$) et donc

$$e_{n+1} \underset{+\infty}{\simeq} \frac{e_n^2}{2}$$ et donc l'ordre de conver^{ce} 2 convergence quadratique

6

b/ pr la sécante :

$$e_{n+1} = \frac{x_{n+1} - \sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}}$$

or $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - \alpha}{x_n + x_{n-1}}$

donc $e_{n+1} = \frac{x_n - \sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}} - \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \frac{(x_n - \sqrt{\alpha})(x_n + \sqrt{\alpha})}{x_n + x_{n-1}}$

$$= e_n - \frac{e_n (e_n\sqrt{\alpha} + \sqrt{\alpha} + \sqrt{\alpha})}{e_n\sqrt{\alpha} + \sqrt{\alpha} + e_{n-1}\sqrt{\alpha} + \sqrt{\alpha}}$$

$(x_n = \sqrt{\alpha}\, e_n + \sqrt{\alpha}$

$x_{n-1} = - - -)$

$$e_{n+1} = e_n - \frac{e_n (e_n + 2)}{e_n + e_{n-1} + 2}$$

$$\boxed{e_{n+1} = \frac{e_n e_{n-1}}{e_n + e_{n-1} + 2}} \quad (*)$$

soit p l'ordre de conv de la sécante donc

$e_{n+1} \underset{+\infty}{\simeq} C e_n^p$, et $e_n \underset{+\infty}{\simeq} C e_{n-1}^p$

$\simeq C\, C^p e_{n-1}^{p^2}$ (1)

D'autre part $(*) \Rightarrow e_{n+1} \underset{+\infty}{\simeq} \frac{e_n e_{n-1}}{2}$

càd

$\underset{+\infty}{\simeq} \frac{C e_{n-1}^p \cdot e_{n-1}}{2}$ (2)

$$e_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} C \, \frac{e_{n-1}^{p} \, e_{n-1}}{2} \underset{+\infty}{\sim} C . C^{p} e_{n-1}^{p^2}$$

soit $e_{n-1}^{p^2-p-1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2} C^{-p}$ constante

soit $p^2-p-1=0$

$\Delta = 1+4=5$ $\quad p_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ non

ou $p = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ oui

l'ordre est $\geqslant 0$

et donc l'ordre de la sécante est le nombre $p = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (dit nombre d'or)

$1 < p < 2$ (entre linéaire et quadratique