Université My Ismail **Année Univer. 2019-2020**
F. S. T. Errachidia **Parcours MIP. S2 Analy2**
Départ. de Maths **Resp. Mustapha Laayouni**

Série n^{o}2

Exercice1: Calculer les intégrales suivantes:

$$J_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin x} \cos x dx,\ J_2 = \int_0^a \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}, a > 0$$

,

$$J_3 = \int_0^1 x \arctan x dx,\ J_4 = \int_1^2 x^n \ln x dx \ (n \neq -1)$$

Exercice2: Calculer les primitives suivantes:

$$K_1 = \int \frac{dx}{x^3 - 1}\ ,\ K_2 = \int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$K_3 = \int \frac{\sin x dx}{\cos^3 x - 1}\ ,\ K_4 = \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x}$$

Exercice3. Intégrales de Wallis: Soit $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\, dx$ si $n \in \mathbb{N}$.

(i) Montrer que $(I_n)_n$ est positive décroissante.
(ii) Montrer que $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$ et expliciter I_n.

Exercice4: Calculer les intégrales suivantes:

$$L_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(2x)}{\cos^4 x + \sin^4 x} dx\ ,\ L_2 = \int_0^1 \frac{e^x - 1}{e^x + 1} dx$$

$$L_3 = \int_0^{\ln 4} \frac{1}{shx + chx} dx\ ,\ L_4 = \int_2^4 \frac{\sqrt{1 + \ln x}}{x \ln x} dx$$

Université My Ismail **Année Univer. 2019-2020**
F. S. T. Errachidia **Parcours MIP. S2 Analy2**
Départ. de Maths **Resp. Mustapha Laayouni**

Série n^{o}3

Exercice1 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Considérons $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Montrer que la fonction:

$\Gamma : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{\varphi(x)} f(t)dt$ est de classe C^1 et déterminer sa dérivée Γ'.

Exercice2 Calculer les limites des suites suivantes lorsque $n \to +\infty$:

$$a_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{n^2} \, , \, b_n = n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k^2+n^2} \, , \, c_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2^{\frac{k}{n}}}{n+\frac{1}{k}} \, , \, d_n = n^2 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k^3+n^3}$$

Exercice3: Calculer les limites des suites suivantes lorsque $n \to +\infty$:

$$u_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}} \, , \, v_n = \left(\frac{(2n)!}{n!n^n}\right)^{\frac{1}{n}}$$

Exercice4: Etudier la convergence des intégrales généralisées suivantes:

$$G_1 = \int_0^1 \frac{1}{t\,(t-1)} dt \, , \, G_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-x^2} dx$$

Exercice5: On se propose d'intégrer dans $]0,+\infty[$ l'équation différentielle:

$$(E) \; : \; y'(x) - \frac{y(x)}{x} - y^2(x) = -9x^2.$$

1. Déterminer $a > 0$ tel que $y_0(x) = ax$ soit une solution particulière de (E).
2. Montrer que le changement de fonction inconnue : $y(x) = y_0(x) - \frac{1}{z(x)}$ transforme l'équation (E) en l'équation différentielle:
$(E_1) \; : \; z'(x) + (6x + \frac{1}{x})z(x) = 1.$
3. Intégrer (E_1) sur $]0,+\infty[$.
4. Donner toutes les solutions de (E) définies sur $]0,+\infty[$.