Université Moulay–Ismail

Faculté des Sciences et Techniques
Errachidia
Département de Mathématiques

Année Universitaire: 2020/2021
S5, Module: M510
Responsable: Belhadj. Karim

<u>Série N1</u>. https://sites.google.com/a/fste.umi.ac.ma/karim-belhadj/home

Exercice 1.

1. *Montrer qu'une partie d'un e.m.E est bornée ssi elle est contenue dans une boule fermée.*
2. *Montrer que dans un e.m.E, toute boule ouverte est un ouvert.*
3. *Montrer que dans un espace discret, toute partie est à la fois ouverte et fermée.*
4. *Soient A et B deux parties bornées d'un espace metrique E. Montrer que $A \cup B$ est bornée et que $\delta(A \cup B) \leq \delta(A) + \delta(B) + d(A, B)$.*

Solution:

1. Supposons que A est bornée, alors $\delta(A) < +\infty$, soit $a \in A$ un élément fixé. Pour tout $x \in A$, on a :$d(a, x) \leq \sup\limits_{x,y \in A} d(x, y) \leq \delta(A)$, ce qui montre que $x \in B(a, \delta(A))$. Réciproquement, supposons qu'il existe $r > 0$ de sorte que $A \subset B(a, r)$, alors pour tout $x, y \in A$ on a:
$$d(x, y) \leq d(x, a) + d(a, y) \leq 2r < +\infty$$
par suite A est bornée.

2. Soit $B(a, r)$ une boule ouverte de centre a et de rayon $r > 0$. Montrons que $B(a, r)$ est une partie ouverte. Soit $x \in B(a, r)$ càd $d(a, x) < r$, par suite $\varepsilon = r - d(a, x) > 0$. Montrons que $B(x, \varepsilon) \subset B(a, r)$, soit $t \in B(x, \varepsilon)$ càd $d(x, t) < \varepsilon = r - d(a, x)$ par suite nous avons: $d(a, t) \leq d(x, t) + d(x, a) < r$ ce qui montre que $d(a, t) < r$ et donc $t \in B(a, r)$.

3. Soit A une partie d'un espace discret, montrons que A est ouverte. Prenons $x \in A$, cherchons $r > 0$ de sorte que $B(x, r) \subset A$. Pour $0 < r < 1$ nous avons $B(x, r) = \{x\} \subset A$ d'où le résultat. Maintenant montrons que A est fermée, Soit $B = \complement_E^A$ comme pour A on montre que B est ouverte, par suite A est fermée.

4. Soit $x_0 \in E$. Pour tout $x \in A$, on a: $d(x_0, x) \leq d(x_0, a) + d(a, x)$ pour tout $a \in A$, par suite $d(x_0, x) \leq d(x_0, a) + \delta(A)$, pour tout $a \in A$, par conséquent $d(x_0, x) \leq \inf_{a \in A} d(x_0, a) + \delta(A)$ càd $d(x_0, x) \leq d(x_0, A) + \delta(A)$, ce qui prouve que $A \subset B(x_0, d(x_0, A) + \delta(A))$. De la même façon on montre que $B \subset B(x_0, d(x_0, B) + \delta(B))$ par suite $A \cup B \subset B(x_0, \delta(A) + \delta(B) + d(x_0, A) + d(x_0, B))$ donc $A \cup B$ est bornée. Montrons que $\delta(A \cup B) \leq \delta(A) + \delta(B) + d(A, B)$. Soient $x, y \in A \cup B$. Si $x, y \in A$, alors $d(x, y) \leq \delta(A) \leq \delta(A) + \delta(B) + d(A, B)$, par suite $\sup_{x,y \in A} \leq \delta(A) + \delta(B) + d(A, B)$, de la même façon si $x, y \in B$. Maintenant discutons le cas où $x \in A$ et $y \in B$ ou inversement. Nous avons $d(x, y) \leq d(x, a) + d(a, b) + d(b, y)$ pour tout $a \in A$ et $b \in B$, par suite $d(x, y) \leq \delta(A) + \delta(B) + d(a, b)$, pour tout $a \in A$ et $b \in B$ par conséquent, nous avons: $d(x, y) \leq \delta(A) + \delta(B) + \inf_{a \in A, b \in B} d(a, b)$ càd $d(x, y) \leq \delta(A) + \delta(B) + d(A, B)$, d'où $\delta(A \cup B) \leq \delta(A) + \delta(B) + d(A, B)$.

Exercice 2. *Soient N_1 et N_2 deux normes sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.*

1. *On note $B_1 = \{x \in E / N_1(x) \leq 1\}$ et $B_2 = \{x \in E / N_2(x) \leq 1\}$. Montrer que $B_1 = B_2 \Rightarrow N_1 = N_2$.*

2. *Même question pour les boules ouvertes.*

Solution:

1. Nous allons montrer que pour tout $x \in E$, $N_1(x) = N_2(x)$, pour $x = 0$ c'est evident. Pour $x \neq 0$, on a $N_2(x) \neq 0$, par suite $\frac{x}{N_2(x)} \in B_2 = B_1$ càd $\frac{x}{N_2(x)} \in B_1$ donc $\frac{N_1(x)}{N_2(x)} \leq 1$ par conséquent $N_1(x) \leq N_2(x)$ de la même manière, on montre que $N_2(x) \leq N_1(x)$

2. Pour les boules ouvertes, on prend $\frac{x}{N_2(x)+\varepsilon}$ où $\varepsilon > 0$ et on continue le même procédure.

Exercice 3. *Soient $(E_i, d_i)_{1 \leq i \leq n}$ des e.m et $E = E_1 \times E_2 \times ... \times E_n$. Pour $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ et $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ dans E, on pose:*
$\delta_1(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{i=n} d_i(x_i, y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$; $\delta_2(x, y) = \max d_i(x_i, y_i)_{1 \leq i \leq n}$; $\delta_3 = \sum_{i=1}^{i=n} d_i(x_i, y_i)$.

1. *Montrer que δ_1, δ_2 et δ_3 sont des distances sur E.*

2. *montrer que δ_1, δ_2 et δ_3 sont métriquement équivalentes.*

Solution:

1. Montrons que δ_3 est une distance: on a $\delta_3(x,y) = \sum_{i=1}^{i=n} d_i(x_i, y_i) = 0$ implique que $d_i(x_i, y_i) = 0$, par suite $x_i = y_i$ pour $1 \leq i \leq n$ ce qui montre que $x = y$. $\delta_3(x,y) = \delta_3(y,x)$ est evident. Reste à montrer l'inégalité triangulaire, nous avons $d(x_i, y_i) \leq d(x_i, z_i) + d(z_i, y_i)$ puis on somme membre à membre, on trouve $\delta_3(x,y) \leq \delta_3(x,z) + \delta_3(z,y)$.
   δ_2 est une distance, en effet: si $\delta_2(x,y) = \max d_i(x_i, y_i)_{1\leq i\leq n} = 0$, alors $d_i(x_i, y_i) = 0$ donc $x_i = y_i$ pour $1 \leq i \leq n$ ce qui prouve que $x = y.\delta_2(x,y) = \delta_3(y,x)$ est evident. Pour $x, y, z \in E$, on a: $d_i(x_i, z_i) \leq d_i(x_i, y_i) + d_i(y_i, z_i)$ pour tout $1 \leq i \leq n$, par suite nous avons $\max d_i(x_i, z_i) \leq \max d_i(x_i, y_i) + \max d_i(y_i, z_i)$ càd $\delta_2(x,z) \leq \delta_2(x,y) + \delta_2(y,z)$ d'où δ_2 est une distance.
   Pour montrer que δ_1 est une distance faisons tout d'abord un rappel, c'est que: si $a_i, b_i, \lambda \in \mathbb{R}$ pour tout $i \in \{1, ...n\}$ alors
   $$|\sum_{i=1}^{i=n} a_i b_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{i=n} a_i^2}.\sqrt{\sum_{=1}^{n} b_i^2}.$$
   Maintenant montrons que δ_1 est une distance. Soient $x, y \in E$, on a: $\delta_1(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{i=n} d_i(x_i, y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} = 0$ implique que $d_i(x_i, y_i) = 0$ et par suite, $x_i = y_i$, pour tout $i \in \{1, ...n\}$ ce qui montre que $x = y$. Pour $\delta_1(x,y) = \delta_1(y,x)$ est evident. Prouvons que $\delta_1(x,z) \leq \delta_1(x,y) + \delta_1(y,z)$ pour tout x, y, z dans E. Nous avons: $\delta_1(x,z)^2 = \sum d_i(x_i, z_i)^2$ or $d_i(x_i, z_i) \leq d_i(x_i, y_i) + d_i(y_i, z_i)$, d'où $\delta_1(x,z)^2 \leq \sum d_i(x_i, y_i)^2 + \sum d_i(y_i, z_i)^2 + 2\sum d_i(x_i, y_i) d_i(y_i, z$ appliquons notre rappel nous obtenons donc: $\delta_1(x,z)^2 \leq \sum d_i(y_i, z_i)^2 + \sum d_i(y_i, z_i)^2 + 2\sqrt{\sum d_i(x_i, y_i)^2}\sqrt{\sum d_i(y_i, z_i)^2}$ par suite nous avons: $\delta_1(x,z)^2 \leq \left(\sqrt{\sum d_i(x_i, y_i)^2} + \sqrt{\sum d_i(y_i, z_i)^2}\right)^2$ ce qui montre que $\delta_1(x,z) \leq \delta_1(x,y) + \delta_1(y,z)$.

2. Nous avons $\delta_2(x,y) \leq \delta_3(x,y) \leq n\delta_2(x,y)$ pour tout $x, y \in E$ ce qui montre que δ_2 et δ_3 sont équivalentes. Pour δ_1 et δ_2, nous avons: $\delta_2 \leq \delta_1 \leq \sqrt{n}\delta_2$, par suite δ_2 et δ_1 sont équivalentes. En conclusion les trois normes sont donc équivalentes.

Exercice 4. *1. Montrer que deux distances métriquement équivalentes sont topologiquement équivalentes.*

2. Soit $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une application strictement croissante vérifiant: $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(u+v) \leq \varphi(u) + \varphi(v)$. Montrer que si d est une distance sur un e.m.E alors $\varphi \circ d$ est une distance sur E.

3. *Déduire que* $d_1 = \frac{d}{1+d}$ *et* $d_2 = \log(1+d)$ *sont des distances sur* E.

4. *Montrer que* d *et* d_1 *sont topologiquement équivalentes.*

5. *Est ce que* d *et* d_1 *sont métriquement équivalentes?*

Solution:

1. Soient d et d' deux distances équivalentes, alors $\exists \alpha, \beta > 0$ de sorte que $\alpha d \leq d' \leq \beta d$. Soit O un ouvert pour d, montrons que O est un ouvert pour d'. Pour $x \in O$, $\exists \varepsilon > 0$ tq: $B_d(x, \varepsilon) \subset O$, or nous avons $B_{d'}(x, \alpha\varepsilon) \subset B_d(x, \varepsilon) \subset O$ d'où O est un ouvert pour d'. Inversement soit O un ouvert pour d', montrons que O est aussi un ouvert pour d. Soit $x \in O$, alors il existe $r > 0$ tq: $B_{d'}(x, r) \subset O$, or on sait que $B_d(x, \frac{r}{\beta}) \subset B_{d'}(x, r) \subset O$, ce qui montre que O est un ouvert pour d.

2. Pour tout $x, y \in E$, nous avons: $(\varphi \circ d)(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ et $(\varphi \circ d)(x, y) = (\varphi \circ d)(y, x)$, reste à montrer l'inégalité triangulaire. Pour tout $x, y, z \in E$ on a:$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, compte tenu du propriété de φ, alors $(\varphi \circ d)(x, z) \leq (\varphi \circ d)(x, y) + (\varphi \circ d)(y, z)$ d'où le résultat.

3. Considérons l'application $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ tq: $x \mapsto \frac{x}{x+1}$, $f(0) = 0$, f est strictement coissante, de plus nous avons: $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}^+$ en effet: $f(x+y) = \frac{x+y}{1+x+y} = \frac{x}{1+x+y} + \frac{y}{1+x+y} \leq \frac{x}{1+x} + \frac{y}{1+y}$ par suite d_1 est une distance. Pour d_2, considérons l'application $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ tq: $x \mapsto \ln(x+1)$ puis on vérifie que $g(0) = 0$, g est strictement croissante et $g(x+y) \leq g(x) + g(y)$.

4. Remarquons que $d_1 \leq d$. Soit O un ouvert pour d_1, montrons que O est un ouvert pour d. Pour $x \in O$, il existe $r > 0$ de façon que $B_{d_1}(x, r) \subset O$, or $B_d(x, r) \subset B_{d_1}(x, r) \subset O$ d'où O est un ouvert pour d. Réciproquement Soit O un ouvert pour d, montrons que O est un ouvert pour d_1. Soit $x \in O$, alors il existe $r > 0$ tq: $B_d(x, r) \subset O$, cherchons $\varepsilon > 0$ de sorte que $B_{d_1}(x, \varepsilon) \subset B_d(x, r)$. Pour $0 < \varepsilon \leq \frac{r}{r+1}$, nous avons $d_1(x, t) < \varepsilon \leq \frac{r}{r+1}$ donne $d(x, t) < r$ (propriété de φ voir 2) d'où le résultat.

5. Suppopsons que d et d_1 sont équivalentes, alors il existe $\alpha, \beta > 0$ tq $\alpha d(x, y) \leq d_1(x, y) \leq \beta d(x, y)$ pour tout $x, y \in E$, nous prenons un exemple d'espace métrique simple c'est $\mathbb{R}$ et $d(x, y) = |x - y|$ et $x = n \in \mathbb{N}^*$ et $y = 0$, nous obtenons donc $\alpha n \leq \frac{n}{n+1}$ et par suite $\alpha \leq \frac{1}{1+n}$ nous faisons tendre $n \to +\infty$, on obtient donc $\alpha \leq 0$ ce qui est absurde, ce qui montre que d et d_1 ne sont pas équivalentes.

Exercice 5. *1. Montrer que deux distances métriquement équivalentes sont topologiquement équivalentes.*

2. Soit (E, d) un espace métrique et $d_1 = \frac{d}{1+d}$. Montrer que d et d_1 sont topologiquement équivalentes.

3. d et d_1 sont-elles métriquement équivalentes? justifier votre réponse.

Solutions:

1. Soient d et d' sont deux métriquement équivalentes càd il existe deux réels α, $\beta > 0$, vérifiants: $\alpha d(x,y) \leq d'(x,y) \leq \beta d(x,y)$, pour tout $x, y \in E$. Soit O un ouvert pour d, $x \in O$, alors il existe $r > 0$ tq: $B_d(x,r) \subset O$, or $B_{d'}(x, \alpha r) \subset B_d(x,r) \subset O$, par suite O est un ouvert pour d'. Inversement soit O un ouvert pour d', $x \in O$, alors il existe $r > 0$ tq: $B_{d'}(x,r) \subset O$, or $B_d(x, \frac{r}{\beta}) \subset B_d(x,r) \subset O$, ce qui montre que O est un ouvert pour d, par suite d et d' définissent la même topologie.

2. Soit (E,d) un espace métrique et $d_1 = \frac{d}{1+d}$. Montrons que d et d_1 sont topologiquement équivalentes. Toute boule ouverte pour d est contenue dans une boule ouverte pour d_1. Inversement, soit O un ouvert pour d et $x \in O$, alors il existe $\varepsilon > 0$ tq $B_d(x, \varepsilon) \subset O$, cherchons $r > 0$, de façon que $B_{d_1}(x,r) \subset B_d(x,\varepsilon)$. Soit $t \in B_{d_1}(x,r)$, alors $d_1(x,t) < r$ càd $\frac{d(x,t)}{1+d(x,t)} < r$, par suite $d(x,t) < \frac{r}{1-r}$, $(0 < r < 1)$ et donc il suffit de choisir $\frac{r}{1-r} \leq \varepsilon$. Conclusion d et d_1 sont topologiquement équivalentes.

3. d et d_1 ne sont pas métriquement équivalentes en effet: supposons que d et d_1 sont métriquement équivalentes, alors il existe $\alpha, \beta > 0$ tq:

$$\alpha d(x,y) \leq d_1(x,y) \leq \beta d(x,y); \forall x, y \in E.$$

Comme $d_1(x,y) \leq 1$, alors $\alpha d(x,y) \leq 1, \forall x, y \in E$. Pour $E = \mathbb{R}$ et $d(x,y) = |x-y|$, prenons $x = \frac{3}{\alpha}$ et $y = \frac{2}{\alpha}$, alors $|x-y| = \frac{2}{\alpha}$ et donc $\alpha|x-y| = 2 \leq 1$ ce qui est absurde. Donc d et d_1 ne sont pas métriquement équivalentes.

Exercice 6. *Soit (E, τ) un e.t, montrer qu'en posant $\varphi(x) = \mathcal{V}(x)$(l'ensemble des voisinages de x), on définit une application $\varphi : E \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$, vérifiant $\varphi(x) \neq \emptyset$, $\forall x \in E$ les propriétés suivantes.*

1. Si $A \in \varphi(x)$ et $A \subset B$, alors $B \in \varphi(x)$.

2. Si $A, B \in \varphi(x)$, alors $A \cap B \in \varphi(x)$.

3. *Si $A \in \varphi(x)$, alors $x \in A$.*

4. *Si $A \in \varphi(x)$, alors $\exists B \in \varphi(x)$ tq, $\forall y \in B$ on a $A \in \varphi(y)$.*

5. *Soit (E, φ) un couple où E est un ensemble et $\varphi : E \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$ une application vérifiant 1), 2), 3) et 4). On définit l'ensemble $\tau = \{A \in \mathcal{P}(E); \forall x \in A, A \in \varphi(x)\}$. Démontrer que (E, τ) est un e.t et que pour tout $x \in E$ on a: $\varphi(x) = \mathcal{V}(x)$.*

Solution:

1. Si $A \in \varphi(x)$, alors il existe un ouvert O tq: $x \in O \subset A \subset B$ donc $x \in O \subset B$ ce qui prouve que B est un voisinage de x càd $B \in \varphi(x)$.

2. Si $A, B \in \varphi(x)$, alors il existe O_1, O_2 deux ouverts tq $x \in O_1 \subset A$ et $x \in O_2 \subset B$ par suite on a: $x \in O_1 \cap O_2 \subset A \cap B$, du fait que l'intersection de deux ouverts est un ouvert alors $A \cap B$ est un voisinage de x.

3. Si $A \in \varphi(x)$, alors il existe un ouvert O tq: $x \in O \subset A$ donc $x \in A$.

4. Si $A \in \varphi(x)$, alors il existe O un ouvert tq: $x \in O \subset A$, par suite si $y \in O$ alors $y \in O \subset A$ donc A est un voisinage de y d'où il suffit de choisir $B = O$.

5. Montrons que τ est une topologie. $\varnothing \in \tau$?, on a $\varnothing \in P(E)$ et $x \in \varnothing \Rightarrow \varnothing \in \varphi(x)$. Pour $E \in \tau$? nous avons $E \in P(E)$ et $\varphi(x) \neq \varnothing$ pour $x \in E$, donc il existe $A \subset E$ tq $A \in \varphi(x)$ ce qui montre que $E \in \varphi(x)$.
   Pour $A, B \in \tau$, montrons que $A \cap B \in \tau$. Nous avons $A \cap B \in P(E)$ et pour tout $x \in A$, $A \in \varphi(x)$, pour tout $x \in B$, $B \in \varphi(x)$, alors maintenant pour $x \in A \cap B$ on a:$A \cap B \in \varphi(x)$ ce qui implique que $A \cap B \in \tau$.
   Soient A_i, $i \in I$ des éléments de τ, montrons que $\cup_{i \in I} A_i \in \tau$. Nous avons $\cup A_i \in P(E)$, d'autre part pour $x \in \cup A_i$, il existe $i_0 \in I$ de sorte que $x \in A_{i_0}$ ce qui implique que $A_{i_0} \in \varphi(x)$ or $A_{i_0} \subset \cup A_i$ d'où $\cup A_i \in \tau$. Conclusion τ est une topologie sur E. Reste à montrer que pour tout $x \in E$ on a: $\varphi(x) = \mathcal{V}(x)$. Montrons que $V(x) \subset \varphi(x)$, soit $v \in V(x)$, alors il existe $O \in \tau$ tq $x \in O \subset v$, et puisque $x \in O$, alors $O \in \varphi(x)$, par suite on a: $O \subset v$ et $O \in \varphi(x)$ donc $v \in \varphi(x)$ ce qui prouve que $V(x) \subset \varphi(x)$. Montrons maintenant que $\varphi(x) \subset V(x)$. Soit $A \in \varphi(x)$ et prenons $O = \{y \in E; A \in \varphi(y)\}$. $O \subset A$ en effet: $y \in O$ implique que $A \in \varphi(y)$ et par suite $y \in A$.
   Montrons que $O \in \tau$ càd pour tout $y \in O$, on a: $O \in \varphi(y)$; pour $y \in O$, alors $A \in \varphi(y)$ par suite il existe $B \in \varphi(y)$ tq: $\forall z \in B$ on a $A \in \varphi(z)$

càd $B \subset O$ or $B \in \varphi(y)$ ce qui prouve que $O \in \varphi(y)$ et donc $O \in \tau$, par conséquent $x \in O \subset A$, ce qui donne que $A \in V(x)$ d'où $\varphi(x) \subset V(x)$.

Exercice 7. *Soient E un e.t et A un ouvert de E.*

1. *Montrer que $A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$.*
2. *Montrer que si B est dense dans E, alors $\overline{A} = \overline{A \cap B}$.*
3. *Montrer que si A et B sont denses dans E, alors $A \cap B$ est dense dans E.*
4. *Dans $\mathbb{R}$, déterminer des ouverts A et B telque: $A \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cap B$, $\overline{A \cap B}$, $\overline{A} \cap \overline{B}$ soient differents.*

Solution:

1. Montrons que $A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$. Soit $x \in A \cap \overline{B}$, alors $x \in A$ et $x \in \overline{B}$, par suite pour tout $v \in V(x)$, nous avons $v \cap B \neq \varnothing$ et puisque A est un ouvert, alors $A \cap v \in V(x)$ ce qui donne que $v \cap A \cap B \neq \varnothing$ càd $x \in \overline{A \cap B}$ d'où le résultat.
2. Montrons que si B est dense dans E, alors $\overline{A} = \overline{A \cap B}$. Nous avons: $\overline{B} = E$ et $A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$ donc $A \cap E \subset \overline{A \cap B}$ càd $A \subset \overline{A \cap B}$ ce qui montre que $\overline{A} \subset \overline{A \cap B}$ or $\overline{A \cap B} \subset \overline{A}$ ce qui prouve que $\overline{A} = \overline{A \cap B}$.
3. On a montré que si B est dense dans E, alors $\overline{A} = \overline{A \cap B}$ par suite si A est dense dans E, alors $\overline{A} = E$ ce qui donne $E = \overline{A} = \overline{A \cap B}$ de le résultat.
4. Dans $\mathbb{R}$, déterminons des ouverts A et B telque: $A \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cap B$, $\overline{A \cap B}$, $\overline{A} \cap \overline{B}$ soient differents. Prenons $A =]-2, -1[\cup]0, 1[$, $B =]-1, -\frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2}, 2[$, nous avons donc:
   $\overline{A} = [-2, -1] \cup [0, 1]$ et $\overline{B} = [-1, -\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, 2]$ par suite $A \cap \overline{B} = [\frac{1}{2}, 1[$, $\overline{A} \cap B =]\frac{1}{2}, 1]$, $\overline{A} \cap \overline{B} = \{-1\} \cup [\frac{1}{2}, 1]$, $A \cap B =]\frac{1}{2}, 1[$ et $\overline{A \cap B} = [\frac{1}{2}, 1]$.

Exercice 8. *Pour toute partie A d'un e.t E, on pose: $\alpha(A) = \overset{\circ}{(\overline{A})}$, $\beta(A) = \overline{(\overset{\circ}{A})}$.*

1. *Montrer que si A est ouverte, alors $A \subset \alpha(A)$, et que si A est fermé, alors $\beta(A) \subset A$.*
2. *Montrer que pour toute partie A de E, on a: $\alpha(\alpha(A)) = \alpha(A)$ et $\beta(\beta(A)) = \beta(A)$.*
3. *Montrer que si U et V sont deux ouverts disjoints, alors $\alpha(U)$ et $\beta(V)$ sont disjoints.*

Solution:

1. Montrons que si A est ouverte, alors $A \subset \alpha(A)$. On sait que $A \subset \overline{A}$, par suite $A = \overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{(\overline{A})}$ d'où $A \subset \alpha(A)$.
   Montrons que si A est fermé, alors $\beta(A) \subset A$. On sait que $\overset{\circ}{A} \subset A$ donc $\overline{(\overset{\circ}{A})} \subset \overline{A} = A$ ce qui montre que $\beta(A) \subset A$.

2. On sait que $\alpha(A)$ est un ouvert donc $\alpha(A) \subset \alpha(\alpha(A))$ (d'aprés 1), d'autre part, nous avons $\alpha(A) \subset \overline{A}$, puis passons à l'adhérence on obtient:$\overline{(\overset{\circ}{(\overline{A})})} \subset \overline{A}$, on passe une deuxième fois à l'intérieur on trouve $\alpha(\alpha(A)) \subset \alpha(A)$. Conclusion $\alpha(\alpha(A)) = \alpha(A)$.
   On sait que $\beta(A)$ est un fermé donc $\beta(\beta(A)) \subset \beta(A)$. D'autre part nous avons $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{\overline{(\overset{\circ}{A})}}$, maintenant passons à l'intérieur puis à l'adhérence on obtient donc $\beta(A) \subset \beta(\beta(A))$. Conclusion $\beta(\beta(A)) = \beta(A)$.

3. Montrons que si U et V sont deux ouverts disjoints, alors $\alpha(U)$ et $\beta(V)$ sont disjoints. Supposons que $\alpha(U) \cap \beta(V) \neq \varnothing$, donc il existe $x \in \alpha(U) \cap \beta(V)$ càd $x \in \alpha(U)$ et $x \in \beta(V)$. Donc $\alpha(U) \in V(x)$ et $\forall w \in V(x)$, $w \cap \overset{\circ}{V} \neq \varnothing$, en particulier pour $w = \overset{\circ}{(\overline{U})}$ ce qui veut dire que $\overset{\circ}{(\overline{U})} \cap \overset{\circ}{V} \neq \varnothing$ par suite nous avons $\varnothing \neq \overset{\circ}{V} \cap \overline{U}$ ce qui montre que $U \cap \overset{\circ}{V} \neq \varnothing$ et donc $U \cap V \neq \varnothing$ ce qui est absurde. D'où $\alpha(U)$ et $\beta(V)$ sont disjoints.

Exercice 9. *Soient (E, d) un e.m et $A \subset E$.*
Montrer qu'il y a équivalence entre les assertions suivantes.

1. $x \in \overline{A}$.

2. $d(x, A) = 0$.

3. Il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de A tq: $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = x$.

Solution: `Montrons que` $1 \Rightarrow 2$. Soit $x \in \overline{A}$ donc $\forall \varepsilon > 0$, $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \varnothing$, càd $\forall \varepsilon > 0, \exists t \in A$ tq:$d(x, t) < \varepsilon$ par suite $\inf\limits_{t\in A} d(x, t) < \varepsilon$ autrement dit $d(x, A) < \varepsilon$ ou encore $d(x, A) = 0$.
`Montrons que` $2 \Rightarrow 3$.
Supposons que $d(x, A) = 0$ donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists a_n \in A$ tq: $d(x, a_n) < \frac{1}{n}$. Pour $\varepsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*$ tq $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$, pour $n \geq n_0$ nous avons $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon$, càd $d(x, a_n) < \varepsilon$ ce

qui montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = x$.

`Montrons que` $3 \Rightarrow 1$.

Supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = x$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tq pour tout $n \geq n_0$, $d(a_n, x) < \varepsilon$. par suite $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \varnothing$ donc $x \in \overline{A}$. Conclusion on a donc l'équivalence.

Exercice 10. *Soient (E, d) un e.m, A et B deux parties non vides de E.*

1. *Montrer que pour tout $x, y \in E$ on a: $|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$, en déduire que l'application $x \in E \mapsto d(x, A)$ est continue.*

2. *Montrer que l'ensemble $\{x \in E; d(x, A) < d(x, B)\}$ est un ouvert.*

3. *Déduire que si A et B sont deux fermées dijointes de E, alors il existe deux ouverts U et V tels que $A \subset U$ et $B \subset V$ et $U \cap V = \varnothing$.*

Solution:

1. pour tout $x, y \in E$, on a: $d(y, t) \leq d(y, x) + d(x, t)$ pour tout $t \in A$. passons maintenant à l'inf càd $\inf\limits_{t\in A} d(y, t) \leq d(y, x) + \inf\limits_{t\in A} d(x, t)$ càd $d(y, A) \leq d(y, x) + d(x, A)$ ou encore $-d(x, y) \leq d(x, A) - d(y, A)$ et de la même façon on montre l'autre inégalité.
   Soit $x_0 \in E$, alors $|d(x, A) - d(x_0, A)| \leq d(x_0, x)$ par suite si $x \to x_0$, alors $d(x_0, x) \to 0$, ce qui montre que $d(x, A) \to d(x_0, A)$ d'où l'application $x \mapsto d(x, A)$ est continue sur E.

2. Montrons que $O = \{x \in E; d(x, A) < d(x, B)\}$ est un ouvert. On sait que $x \mapsto d(x, A)$ et $x \mapsto d(x, B)$ sont continues donc l'application $h : x \mapsto d(x, A) - d(x, B)$ est continue sur E, par suite $O = \{x \in E; h(x) < 0\} = h^{-1}(]-\infty, 0[$ et comme h est continue alors O est ouvert.

3. Déduction: si A est un fermé disjoint du fermé B, alors pour tout $x \in A$ on a:
   $h(x) = -d(x, B) < 0$ càd $A \subset h^{-1}(]-\infty, 0[= U$. Pour tout $x \in B$ on a:
   $h(x) = d(x, A) > 0$ càd $B \subset h^{-1}]0, +\infty[= V$ de plus nous avons:
   $$U \cap V = h^{-1}]0, +\infty[\cap h^{-1}(]-\infty, 0[= h^{-1}(]-\infty, 0[\cap]0, +\infty[) = \varnothing.$$