Université Moulay–Ismail

Faculté des Sciences et Techniques
Errachidia
Département de Mathématiques

Année Universitaire: 2020/2021
S5, Module: M510
Responsable: Belhadj. Karim

Série N2.

Exercice 1. *Soit (E,d) un espace métrique, $A \subset E$ et χ_A, la fonction caractéristique définie par: $\chi_A(x) = 1$ si $x \in A$ et $\chi_A(x) = 0$ si $x \notin A$.*
Montrer que χ_A est continue si et seulement si A est ouverte et fermée dans (E,d).

Solutions: Supposons que A est ouverte et fermé. Montrons que χ_A est continue. Soit F un fermé de $\mathbb{R}$, on a: $\chi_A^{-1}(F) = \varnothing$ ou $\chi_A^{-1}(F) = E$ ou $\chi_A^{-1}(F) = A$ ou $\chi_A^{-1}(F) = \complement^A$, par suite dans tous les cas $\chi_A^{-1}(F)$ est un fermé, ce qui montre que χ_A est continue.
Réciproquement supposons que χ_A est continue et montrons que A est ouverte et fermée. Soit F un fermé de $\mathbb{R}$, alors nous avons bien $\chi_A^{-1}(F) = \varnothing$ ou $\chi_A^{-1}(F) = E$ ou $\chi_A^{-1}(F) = A$ ou $\chi_A^{-1}(F) = \complement^A$ et puisque χ_A est continue nous devons avoir donc $\chi_A^{-1}(F) = A$ et $\chi_A^{-1}(F) = \complement^A$ sont des fermés ce qui montre que A et $\complement^A$ sont fermées.

Exercice 2. *Soient E et F deux e.t et $f : E \to F$ une application, montrer l'équivalence des propriétés suivantes:*

1. *f est continue sur E.*
2. *Pour toute partie B de F on a: $f^{-1}(\overset{\circ}{B}) \subseteq \overset{\circ}{\widehat{f^{-1}(B)}}$.*
3. *Pour toute partie B de F on a: $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$.*

Solutions: Montrons que $1 \Rightarrow 2$. Nous avons $\overset{\circ}{B} \subset B$ par suite $f^{-1}(\overset{\circ}{B}) \subset f^{-1}(B)$, en tenant compte de la continuité de f passons à l'intérieur nous obtenons le résultat. Montrons que $2 \Rightarrow 3$. Nous avons $f^{-1}(\overset{\circ}{B}) \subseteq \overset{\circ}{\widehat{f^{-1}(B)}}$, passons maintenant au complémentaire nous obtenons donc $\complement^{\overset{\circ}{f^{-1}(B)}} \subset \complement^{f^{-1}(\overset{\circ}{B})}$, par suite on a: $\overline{\complement^{f^{-1}(B)}} \subset f^{-1}(\complement^{\overset{\circ}{B}})$ ce qui donne $\overline{f^{-1}(\complement^B)} \subset f^{-1}(\overline{\complement^B})$. Posons $B' = \complement^B$ nous arrivons à $\overline{f^{-1}(B')} \subset f^{-1}(\overline{B'})$. Montrons que $3 \Rightarrow 1$. Soit w un fermé de F, montrons que $f^{-1}(w)$ est un fermé de E. On a: $\overline{f^{-1}(w)} \subset f^{-1}(w = \overline{w})$ donc $f^{-1}(w) = \overline{f^{-1}(w)}$ d'où f est continue.

Exercice 3. *Soient E et F deux e.t, F est separé, f et g deux applications continues de E dans F.*

1. *Montrer que $G = \{x \in E; f(x) = g(x)\}$ est fermé.*
2. *Déduire que s'il existe $A \subset E$ tq: $\overline{A} = E$ et $\forall x \in A$ on a: $f(x) = g(x)$ alors $f = g$.*

Solutions:

1. Il suffit de montrer que $\complement_E^G$ est un ouvert de E c-à-d $\complement_E^G$ est un voisinage de chacun de ces points. Soit $x \in \complement_E^G$, alors $f(x) \neq g(x)$. Posons $f(x) = x_0$ et $g(x) = x_1$. On a $x_0 \neq x_1$, et puisque F est separé alors il existe un ouvert O_0 et un ouvert O_1 de façon que $O_0 \cap O_1 = \varnothing$. D'autre part O_0 est un voisinage ouvert de $f(x)$. Comme f est continue alors $f^{-1}(O_0)$ est un voisinage de x. De même $g^{-1}(O_1)$ est un voisinage ouvert de x. Posons $O = f^{-1}(O_0) \cap g^{-1}(O_1)$ qui est un voisinage ouvert de x. Il reste à montrer que $O \subseteq \complement_E^G$. Soit $t \in O$, alors $f(t) \in O_0$ et $g(t) \in O_1$. Supposons par l'absurde que $t \notin \complement_E^G$, donc $f(t) = g(t) \in O_0 \cap O_1 = \varnothing$, ce qui est absurde. D'où $f(t) \neq g(t)$ et ce qui montre que $t \in \complement_E^G$ et par suite on a: $x \in O \subseteq \complement_E^G$ et donc $\complement_E^G$ est un voisinage de chacun de ses points.
2. Nous avons $\forall x \in A$, $f(x) = g(x)$, ceci montre que $A \subset G$ et par suite on a: $\overline{A} \subset \overline{G}$ càd $E \subset G$ doù le résultat.

Exercice 4. *Soient E un e.t, A et B deux parties de E.*

1. *Montrer que A est ouverte(resp fermée) dans E ssi pour tout ouvert(resp fermé) de A est ouvert(resp fermé) dans E.*
2. *Montrer que si $A \subset B$ alors*
   (a) $\overline{A}^B = \overline{A} \cap B$.
   (b) $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{A}^B$.
   (c) $Fr(A)^B \subset Fr(A)$.

Solutions:

1. Supposons que tout ouvert dans A est ouvert dans E. En particulier A est ouverte dans lui même par suite A est ouverte dans E. Inversement supposons que A est ouverte dans E, montrons que tout ouvert dans A est ouvert dans E. O est ouvert dans A veut dire qu'il existe O_1 ouvert dans E tq: $O = O_1 \cap A$ qui est un ouvert dans E. Même preuve pour les fermés.

(a) On sait que $\overline{A}^B = \cap F$, F fermé contenant A, mais ces fermés sont des fermés de B càd $F = F' \cap B$ où F' sont des fermés de E. Par suite $\overline{A}^B = (\cap F') \cap B$ et $A \subset F' \cap B \subset F'$ càd $\overline{A}^B = \overline{A} \cap B$.

(b) On sait que $\overset{\circ}{A}^B$ est le plus grand ouvert de B contenu dans A et comme $\overset{\circ}{A}$ est un ouvert de B contenu dans A alors $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{A}^B$.

(c) Nous avons $Fr(A)^B = \overline{A}^B \cap \overline{\complement_B^A}^B = \overline{A} \cap B \cap \overline{\complement_B^A}$ or $\complement_B^A \subset \complement_E^A$ donc $Fr(A)^B \subset \overline{A} \cap \overline{\complement_E^A} \cap B$ par suite $Fr(A)^B \subset Fr(A)$.

Exercice 5. *Montrer les propriétés suivantes:*

1. *Dans un espace discret une partie est compact ssi elle est finie.*
2. *Dans un e.t separé toute union finie(resp toute intersection) de partie compacts est compact.*
3. *Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments d'un e.t.E separé convergeant vers $a \in E$, alors $A = \{x_n, n \in \mathbb{N}\} \cup \{a\}$ est compact.*
4. *Sachant que E est un espace compact, pour $x \in E$, $E\backslash\{x\}$ est compact ssi x n'est pas un point d'accumulation de E.*

Solutions:

1. Soit $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ une partie finie d'un espace discret E. Montrons que A est compact. On a A est séparé car E l'est, d'autre part si $A \subset \cup O_i$, avec $i \in I$ et O_i des ouverts de E, alors pour tout $k \in \{1....n\}$, il existe O_{i_k} tq $a_k \in O_{i_k}$ par suite $A \subset \cup O_{i_k}$ avec $k \in \{1....n\}$, ce qui montre que A est compacte.
   Réciproquement, supposons que A est compacte, montrons qu'elle est finie. Nous avons $A = \cup\{a\}_{a\in A}$, or on sait que les singletons sont des ouverts dans E, donc il existe un nombre fini de ces ouverts qui contiennent A d'où A est finie.

2. Soient A et B deux compacts de E. Montrons que $A \cup B$ est compact. On sait bien que $A \cup B$ est séparé, d'autre part si $A \cup B \subset \cup O_i$, avec $i \in I$, alors $A \subset \cup O_i$ et puisque A est compact, il existe donc $J \subset I$, fini tq: $A \subset \cup O_i$ avec $i \in J$ de même pour B, il existe $K \subset I$ fini tq: $B \subset \cup O_i$ avec $i \in K$. Conclusion $A \cup B \subset \cup O_i$ avec $i \in J \cup K$ qui est fini, ce qui montre que $A \cup B$ est compact. Soit maintenant F_i une famille de compact de E, montrons que $\cap F_i$ est un compact. On sait que F_i est

compact dans E, alors F_i est fermé dans E et par suite $\cap F_i$ est un fermé de E, d'autre part, nous avons $\cap F_i \subset F_j$ et puisque F_j est compact alors $\cap F_i$ est compact.

3. Montrons que $A = \{x_n, n \in \mathbb{N}\} \cup \{a\}$ est compact. On a $A \subset E$ donc A est séparé, d'autre part supposons que $A \subset \cup O_i$, avec $i \in I$. Montons qu'il existe $J \subset I$, fini de sorte que $A \subset \cup O_i$, avec $i \in J$. Rappelons que $x_n \to a$ veut dire que pour tout $v \in V(a)$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tq: pour tout $n \geq n_0$ $x_n \in v$. Revenons à notre supposition $A \subset \cup O_i$, avec $i \in I$, donc il existe $j \in I$ tq $a \in O_j$, or O_j est un voisinage de a, il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}$ tq: pour tout $n \geq n_0$ $x_n \in O_j$, pour $n \leq n_0 - 1$ considerons $\{x_0, x_1, ..., x_{n_0-1}\}$, pour tout $0 \leq k \leq n_0 - 1$, il existe $i_k \in I$ tq $x_k \in O_{i_k}$ par suite nous avons $A \subset O_j \cup (\cup O_{i_k})$ d'où le résultat.

4. Supposons que $E \backslash \{x\}$ est compact, montrons que $x \notin E'$ où E' désigne l'ensemble des points d'accumulations de E. Puisque $E \backslash \{x\}$ est compact, alors $E \backslash \{x\}$ est fermé dans E ce qui montre que $\{x\}$ est un ouvert et par suite $\{x\} \in V(x)$, or $(E \backslash \{x\}) \cap \{x\} = \varnothing$ ce qui montre que $x \notin E'$.
Réciproquement, supposons que $x \notin E'$, alors il existe $v \in V(x)$ tq: $(E \backslash \{x\}) \cap \{x\} = \varnothing$ ce qui montre que $v \subset \{x\}$ d'autre part nous avons $v \in V(x)$, alors il existe O ouvert tq $x \in O \subset v$ ce qui prouve que $\{x\} = O$ et par conséquent $E \backslash \{x\}$ est fermé dans E qui est compact donc $E \backslash \{x\}$ est compact.

Exercice 6. *Soit E un ensemble non vide muni de deux distances d_1 et d_2. On suppose que pour toute suite x_n de E: $x_n \to^{d_1} x \Rightarrow x_n \to^{d_2} x$ et que (E, d_1) est compact.*

1. *Montrer que si F est un fermé dans (E, d_2), alors F est un fermé dans (E, d_1).*

2. *Montrer que (E, d_2) est compact.*

3. *Montrer que si F est un fermé dans (E, d_1), alors F est un fermé dans (E, d_2).*

4. *Déduire que d_1 et d_2 définissent la même topologie sur E.*

Solutions

1. Soit $x \in \overline{F_{d_1}}$, alors il existe (x_n) de points de F tq: $x_n \to^{d_1} x$, par suite $x_n \to^{d_2} x$ ceci montre que $x \in \overline{F_{d_2}} = F$ et donc $\overline{F_{d_1}} \subset F$ or $F \subset \overline{F_{d_1}}$, conclusion $F = \overline{F_{d_1}}$ càd F est fermé dans (E, d_1).

2. Montrons que (E, d_2) est compact. Soit (x_n) une suite de points de (E, d_2) donc (x_n) est une suite de points de (E, d_1) qui est compact par suite il existe une sous suite notée $x_{\varphi(n)}$ de points de (E, d_1) tq: $x_{\varphi(n)} \to^{d_1} x$ par suite $x_{\varphi(n)} \to^{d_2} x$ ce qui montre que (E, d_2) est compact.

3. Soit F un fermé dans (E, d_1) qui est compact, alors (F, d_1) est compact et donc de la même façon que 2), on montre que (F, d_2) est compact par suite F est un fermé dans (E, d_2).

4. D'aprés les questions précédentes nous avons montré que F est fermé dans (E, d_1) si et seulement si F est fermé dans (E, d_2) et par passage au complémentaire on obtient donc O est un ouvert pour (E, d_1) si et seulement si O est ouvert pour (E, d_2). Conclusion d_1 et d_2 définissent la même topologie dans E.

Exercice 7. *Soient E un e.m et A et B deux parties non vides de E.*

1. *Montrer que si A est compact et B est fermé et $A \cap B = \varnothing$, alors $d(A, B) > 0$.*

2. *Montrer que si A et B sont compacts, alors il existe $a \in A, b \in B$ tq: $d(A, B) = d(a, b)$.*

Solutions:

1. Nous avons:

$$d(A, B) = \inf_{a \in A, b \in B} d(a, b) = \inf_{a \in A} d(a, B) = \inf_{b \in B} d(A, b),$$

et on a: $x \in E \to^f d(x, B) \in \mathbb{R}$ est continue, A étant compact donc $f(A)$ est borné et f atteint ses bornes, donc il existe $a_0 \in A$, de sorte que $d(a_0, B) = \inf\limits_{a \in A} d(a, B)$. D'autre part on a: $d(a_0, B) > 0$ car sinon $d(a_0, B) = 0 \Leftrightarrow a_0 \in \overline{B} = B$ ce qui montre que $A \cap B = \varnothing$ ce qui est absurde.

2. D'aprés la première question nous avons montré qu'il existe $a_0 \in A$ de sorte que $d(A, B) = d(a_0, B) = \inf\limits_{b \in B} d(a_0, B)$ et puisque B est compact, alors il existe $b_0 \in B$ vérifiant $d(A, B) = d(a_0, B) = d(a_0, b_0)$.

Exercice 8. *Soient E un e.m complet, montrer que toute contraction $f : E \to E$ admet un point fixe.*

Solutions: Soit $f : E \to E$ de façon que $d(f(x), f(y)) < kd(x, y)$, pour tout $x, y \in E$, $0 < k < 1$.

Montrons l'unicité: Supposons l'existence de deux points a et b tq $a \neq b$, on a: $d(f(a), f(b)) < kd(a, b)$ donc $d(a, b) < kd(a, b)$ ce qui est absurde d'où l'unicité.

Montrons l'existence: Soit x_0 un point de E et $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1)$,..., $x_n = f(x_{n-1})$. Montrons que (x_n) est une suite convergente, puisque E est complet, il suffit de montrer que (x_n) est de Cauchy. Remarquons tout d'abord que $d(x_{n+1}, x_n) \leq k^n d(x_1, x_0)$, maintenant nous avons pour tout $n, p \in \mathbb{N}$,

$$d(x_{n+p}, x_n) \leq d(x_{n+p}, x_{n+p-1}) + d(x_{n+p-1}, x_{n+p-2}) + + + d(x_{n+1}, x_n)$$

par suite nous avons

$$d(x_{n+p}, x_n) \leq (k^{n+p-1} + k^{n+p-2} + + + k^n)d(x_1, x_0).$$

$d(x_{n+p}, x_n) \leq k^n \left(\frac{1-k^p}{1-k}\right) d(x_1, x_0)$. passons à la limite on obtient $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_{n+p}, x_n) = 0$, ce qui montre que (x_n) est une suite de Cauchy. Puisque E est complet alors x_n converge vers un élément $a \in E$, d'autre part nous avons $x_n = f(x_{n-1})$, passons à la limite nous obtenons donc $f(a) = a$.

Exercice 9. *Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{C}$. On désigne par: $B'(0, 1) = \{x \in E; ||x|| \leq 1\}$, la boule unitée fermée de centre 0 et de rayon 1. Soit $F \subset E$ un sous espace vectoriel fermé de E. Pour $x \in E$, on pose: $d(x, F) = \inf\limits_{y\in F} ||x - y||$.*

1. *Montrer que $\forall x \in E$, on a: $0 \leq d(x, F) \leq ||x||$.*

2. *Montrer que $d(x, F) = 0 \Leftrightarrow x \in F$.*

3. (a) *Montrer que $\forall x, x' \in E$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $y \in F$ on a:*

$$d(\lambda x, F) = |\lambda| d(x, F),$$

$$d(x - y, F) = d(x, F),$$

   (b) *Montrer que l'application $x \mapsto d(x, F)$ est uniformément continue dans E.*

4. (a) *Soit $x \in B'(0, 1)$. On pose $\alpha = d(x, F)$ et on suppose que $\alpha > 0$, soit de plus $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $y \in F$ tel que: $\alpha \leq ||x - y|| < \alpha(1 + \varepsilon)$.*

(b) Soit $x' = \dfrac{x-y}{||x-y||}$*, montrer que* $d(x', F) > \dfrac{1}{1+\varepsilon}$.

5. *Montrer que si* $F \neq E$*, alors* $\sup\limits_{x \in B'(0,1)} d(x, F) = 1$.

6. *Montrer que si* $F \neq E$ *et* E *est de dimension finie, alors il existe* $x_0 \in B'(0,1)$ *tel que* $d(x_0, F) = 1$.

Solutions:

1. On sait que $0 \leq d(x, F) \leq ||x - y||$, pour tout $y \in F$. Puisque F est un sous espace vectoriel de E, alors $0_E = 0_F = 0 \in F$ et donc
   $0 \leq d(x, F) \leq ||x - 0|| = ||x||$, d'où le résultat.

2. On sait que $d(x, F) = 0 \Leftrightarrow x \in \overline{F} = F$ (F est un fermé), donc

$$d(x, F) = 0 \Leftrightarrow x \in F.$$

3. (a) • pour $\lambda = 0$, nous avons: $\lambda x = 0$ et donc $d(\lambda x, F) = 0$, car $0 \in F$ d'autre part, $\inf\limits_{y \in F} ||0 - y|| = 0$, d'où le résultat.
   Si $\lambda \neq 0$, alors $d(\lambda x, F) = \inf\limits_{y \in F} ||\lambda x - y|| = \inf\limits_{\frac{y}{\lambda} \in F} \in ||\lambda(x - \frac{y}{\lambda})||$,
   posons: $\frac{y}{\lambda} = t \in F$($F$ est un sous espace vectoriel), nous obtenons donc $d(\lambda x, F) = \inf\limits_{t \in F} ||x - t|| = d(x, F)$.
   • Nous avons: $d(x-y, F) = \inf\limits_{z \in F} ||x - y - z|| = \inf\limits_{y+z \in F} ||x - (y+z)||$, posons: $y + z = t \in F$ (F s.e.v),
   par suite $d(x - y, F) = \inf\limits_{t \in F} ||x - t|| = d(x, F)$.
   (b) Considèrons l'application $f : E \to \mathbb{R}$ tq, $f(x) = d(x, F)$, nous avons: $|f(x) - f(y)| \leq ||x - y||$, ce qui montre que f est uniformément continue sur E.

4. (a) Soit $x \in B'(0,1)$ et $d(x, F) = \alpha > 0$. Nous avons: $\alpha = \inf\limits_{t \in F} ||x - t||$ donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $y \in F$ tq:

$$\alpha \leq ||x - y|| < \alpha + \alpha\varepsilon = \alpha(1 + \varepsilon).$$

   (b) Pour $x' = \frac{x-y}{||x-y||}$, d'aprés les questions précédentes, nous avons:

$$d(x', F) = \frac{d(x, F)}{||x - y||} = \frac{\alpha}{||x - y||} > \frac{1}{1+\varepsilon}.$$

5. On a: $F \neq E$, alors il existe $x_0 \in E$ non nul, tq $x_0 \in E$ et $x_0 \notin F$, et par suite posons: $x = \frac{x_0}{||x_0||} \in B'(0,1)$ et nous posons: $d(x,F) = \alpha > 0$. On sait que $1 \geq d(x,F) > \frac{1}{1+\varepsilon}$ pour tout $x \in B'(0,1)$ et pour tout $\varepsilon > 0$, maintenant passons à la borne supérieure, nous obtenons $1 \geq \sup\limits_{x \in B'(0,1)} d(x,F) \geq 1$ d'où $\sup\limits_{x \in B'(0,1)} d(x,F) = 1$.

6. Puisque E est de dimension finie suite à la question précédente, alors $\sup\limits_{x \in B'(0,1)} d(x,F) = 1$ et dans ce cas la boule $B'(0,1)$ est compact donc la borne supérieure est atteinte càd il existe $x_0 \in B'(0,1)$ vérifiant $d(x_0,F) = 1$.

Belhadj Karim