Table des matières

Chapitre 1

Espaces métriques

1.1 Définitions et exemples

Définition 1.1 Soit E un ensemble. On appelle distance sur E toute application d :

d : $E \times E \to \mathbb{R}^+$

$(x, y) \mapsto d(x, y)$, vérifiant :

1. $\forall x, y \in E; d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
2. $\forall x, y \in E; d(x, y) = d(y, x)$,
3. $\forall x, y, z \in E; d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Exemple 1.2 *1.* $E = \mathbb{R}$, $d(x, y) = |x - y|$.

2. $E = \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$; $x = (x_1, x_2, x_3, ..., x_n), y = (y_1, y_2, y_3, ..., y_n)$.
$d_1(x, y) = \sum_{i=1}^{i=n} |x_i - y_i|$, $d_2(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{i=n} (x_i - y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$.
$d_\infty(x, y) = \sup\limits_{i \in \{1,2,...,n\}} |x_i - y_i|$.

3. $E = C([0, 1], \mathbb{R})$ *l'ensemble des fonctions continues sur* $[0, 1]$*, pour* $f, g \in E$*, posons :* $d_1(f, g) = \int_0^1 |f(t) - g(t)| dt$, $d_2(f, g) = \left(\int_0^1 (|f(t) - g(t)|)^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$,
$d_\infty(f, g) = \sup\limits_{t \in [0,1]} |f(t) - g(t)|$.

4. Soit E *un ensemble non vide, et* $d : E \times E \to \mathbb{R}^+$ *avec* $d(x, y) = 0$ *si* $x = y$ *et* $d(x, y) = 1$ *si* $x \neq y$. d *est une distance sur* E*, appelée distance discrète et* E *est appelé espace discrèt.*

Définition 1.3 Si d est une distance sur E, alors le couple (E, d) s'appelle un espace métrique est souvant noté e.m.

Boules-Sphères

Définition 1.4 Soient E un e.m, $a \in E$ et $r > 0$. On note par :

1. $B(a,r) = \{x \in E / d(a,x) < r\}$, la boule ouverte de centre a et de rayon r.
2. $B'(a,r) = \{x \in E / d(a,x) \leq r\}$, la boule fermée de centre a et de rayon r.
3. $S(a,r) = \{x \in E / d(a,x) = r\}$, la sphère de centre a et de rayon r.

Remarque 1.5 1. $\{a\} \subset B(a,r) \subset B'(a,r)$.

2. $S(a,r) \subset B'(a,r)$.

Exemple 1.6 *Dans $E = \mathbb{R}$, muni de la distance usuelle, $d(x,y) = |x-y|$ nous avons :*

1. $B(a,r) =]a-r, a+r[$,
2. $B'(a,r) = [a-r, a+r]$,
3. $S(a,r) = \{a-r, a+r\}$.

1.1.1 Distance de deux ensembles, Diamètre

Définition 1.7 Soient E un e.m, A et B deux parties non vides de E.

1. La distance de A à B est le réel positif $d(A,B) = \inf_{a \in A, b \in B} d(a,b)$, si $A = \{a\}$, alors $d(A,B) = \inf_{y \in B} d(a,y)$.
2. Le diamètre de A, est le réel positif $\delta(A) = \sup_{x,y \in A} d(x,y)$.
3. On dit qu'une partie A d'un e.m.E est bornée, chaque fois que son diamètre est fini.

Proposition 1.8 *Une partie d'un espace métrique E est bornée, si et seulement si elle est contenue dans une boule fermée.*

Preuve.(voir exercice)

Définition 1.9 Soit E un e.m, une partie A de E est dite ouverte, si pour tout $x \in A$, il existe $r > 0$ telque $B(x,r) \subset A$.

Proposition 1.10 *Soit E un e.m, les parties ouvertes vérifient les propriétés suivantes.*

1. *E et $\varnothing$ sont ouverts.*

2. *Toute intersection finie de parties ouvertes est une partie ouverte.*
3. *Toute union de partie ouvertes est une partie ouverte.*

Preuve.

1. évident
2. Soient $O_i (i \in J$ fini) des ouverts de E. Montrons que $\cap O_i$ est un ouvert de E. Soit $a \in \cap O_i$ ce qui veut dire que $a \in O_i$ pour tout $i \in J$, par suite il existe $\varepsilon_i > 0$ de façon que $B(a, \varepsilon_i) \subset O_i$, pour $\varepsilon = \min\limits_{i \in J}(\varepsilon_i) > 0$, donc $B(a, \varepsilon) \subset B(a, \varepsilon_i) \subset O_i$ pour tout $i \in J$ par suite nous avons $B(a, \varepsilon) \subset \bigcap\limits_{i \in J} O_i$, cqfd.
3. Soient $O_i (i \in I)$ des ouverts de E. Montrons que $\cup O_i$ est un ouvert de E. Pour $a \in \cup O_i$, il existe donc $i_0 \in I$, tq : $a \in O_{i_0}$ par suite il existe $\varepsilon_{i_0} > 0$ de façon que $B(a, \varepsilon_{i_0}) \subset O_{i_0} \subset \cup O_i$ d'où le résultat.

Corollaire 1.11 *Pour qu'une partie A d'un e.m E soit ouverte, il faut et il suffit qu'elle soit réunion de boules ouvertes.*

Preuve. Soit A une partie ouverte de E, alors pour $x \in A$, il existe $r_x > 0$ de façon que $B(x, r_x) \subset A$, par suite $\cup B(x, r_x) \subset A$, or $A \subset \cup B(x, r_x)$ d'où le résultat. Réciproquement toute reunion de boules ouvertes est un ouvert.

Définition 1.12 Soit E un e.m, on appelle partie fermée de E, toute partie dont le complèmentaire est une partie ouverte.

Exemple 1.13
1. *Dans un e.m E toute boule fermée est un fermé.*
2. *Dans un espace discret, toute partie est fermée.*

Proposition 1.14 *Soit E un e.m.*

1. *E et $\varnothing$ sont des parties fermées.*
2. *Toute réunion finie de parties fermées est une partie fermée.*
3. *Toute intersection de parties fermées est une partie fermée.*

Preuve. Passez au complèmentaire.

Exemple 1.15 *Dans un e.m E, tout ensemble fini est un fermé.*

Remarque 1.16
1. Dans un e.m, il peut exister des parties qui ne sont ni ouvertes ni fermées.
2. Dans un e.m, on peut avoir des parties qui sont à la fois ouvertes et fermées(E, $\varnothing$).
3. Dans un e.m discret, toutes les parties sont ouvertes et fermées.

1.2 Sous espace-métrique induite

Définition 1.17 Soit (E, d) un e.m, F un sous ensemble de E, la restriction d_F de d à $F \times F$ est une distance appelée une distance induite sur F cette distance fait de F un e.m appelé sous espace métrique de E.

Remarque 1.18 A est une partie de F, il faut préciser quand on dira qu'elle est ouverte ou fermée.

Théorème 1.19 *Soient E un e.m et F un sous e.m de E. Pour qu'une partie A de E soit ouverte (resp fermée) dans F, il faut et il suffit qu'elle soit l'intersection de F et d'une partie ouverte (resp fermée) de E.*

Preuve. Notons B_E les boules ouvertes de E et B_F les boules ouvertes de F. On a : $B_F(a, r) = \{x \in F/d_F(a, x) < r\} = B_E(a, r) \cap F$.
Soit A un ouvert de F, alors $A = \cup B_F(a_i, r_i) = \cup B_E(a_i, r_i) \cap F = A_1 \cap F$, où A_1 est un ouvert de E.
Soit A_1 une partie ouverte de E et soit $A = A_1 \cap F$. Soit $x \in A$ donc $x \in A_1$, par suite il existe $r > 0$ tq : $B_E(x, r) \subset A_1$, on en déduit que $B_E(x, r) \cap F \subset A_1 \cap F = A$, ce qui montre que $B_F(x, r) \subset A$, donc A est une partie ouverte de F.

Remarque 1.20 Soient E un e.m et F un s.e.m de E.
Si A est une partie de F ouverte (resp femée) dans E, alors elle l'est forcement dans le s.e.m F,(car $A \subset F \Rightarrow A = A \cap F$.
la réciproque n'est pas vraie en générale. En effet : si $E = \mathbb{R}$, $F = [-1, 1]$; $A = [-1, 0[$. On a : $A =]-2, 0[\cap F$, donc A est ouverte dans F et A n'est pas ouverte dans $E = \mathbb{R}$.

Corollaire 1.21 *Soient E un e.m et F un s.e.m de E.*

1. *Si F est une partie ouverte de E, alors toute partie A de F ouverte dans F est ouverte dans E.*
2. *Si F est partie fermée de E, alors toute partie A de F fermée dans F est femée dans E.*

Preuve.

1. Soit A une partie ouverte dans F, alors $A = A_1 \cap F$ où A_1 est une partie ouverte dans E donc A est une partie ouverte dans E.
2. Soit A une partie fermée dans F , alors $A = A_1 \cap F$ où A_1 est une partie fermée de E donc A est une partie fermée de E.

1.3 Exercices

Exercice 1.22 *1. Montrer qu'une partie d'un e.m.E est bornée ssi elle est contenue dans une boule fermée.*

2. Montrer que dans un e.m.E, toute boule ouverte est un ouvert.

3. Montrer que dans un espace discret, toute partie est à la fois ouverte et fermée.

4. Soient A et B deux parties bornées d'un espace metrique E. Montrer que $A \cup B$ est bornée et que $\delta(A \cup B) \leq \delta(A) + \delta(B) + d(A, B)$.

Solution :

1. Supposons que A est bornée, alors $\delta(A) < +\infty$, soit $a \in A$ un élément fixé. Pour tout $x \in A$, on a :$d(a, x) \leq \sup_{x,y \in A} d(x, y) \leq \delta(A)$, ce qui montre que $x \in B(a, \delta(A))$. Réciproquement, supposons qu'il existe $r > 0$ de sorte que $A \subset B(a, r)$, alors pour tout $x, y \in A$ on a :
$$d(x, y) \leq d(x, a) + d(a, y) \leq 2r < +\infty$$
par suite A est bornée.
2. Soit $B(a, r)$ une boule ouverte de centre a et de rayon $r > 0$. Montrons que $B(a, r)$ est une partie ouverte. Soit $x \in B(a, r)$ càd $d(a, x) < r$, par suite $\varepsilon = r - d(a, x) > 0$. Montrons que $B(x, \varepsilon) \subset B(a, r)$, soit $t \in B(x, \varepsilon)$ càd $d(x, t) < \varepsilon = r - d(a, x)$ par suite nous avons : $d(a, t) \leq d(x, t) + d(x, a) < r$ ce qui montre que $d(a, t) < r$ et donc $t \in B(a, r)$.
3. Soit A une partie d'un espace discret, montrons que A est ouverte. Prenons $x \in A$, cherchons $r > 0$ de sorte que $B(x, r) \subset A$. Pour $0 < r < 1$ nous avons $B(x, r) = \{x\} \subset A$ d'où le résultat. Maintenant montrons que A est fermée, Soit $B = \complement_E^A$ comme pour A on montre que B est ouverte, par suite A est fermée.
4. Soit $x_0 \in E$. Pour tout $x \in A$, on a : $d(x_0, x) \leq d(x_0, a) + d(a, x)$ pour tout $a \in A$, par suite $d(x_0, x) \leq d(x_0, a) + \delta(A)$, pour tout $a \in A$, par conséquent $d(x_0, x) \leq \inf_{a \in A} d(x_0, a) + \delta(A)$ càd $d(x_0, x) \leq d(x_0, A) + \delta(A)$, ce qui prouve que $A \subset B(x_0, d(x_0, A) + \delta(A))$. De la même façon on montre que $B \subset B(x_0, d(x_0, B) + \delta(B))$ par suite $A \cup B \subset B(x_0, \delta(A) + \delta(B) + d(x_0, A) + d(x_0, B))$ donc $A \cup B$ est bornée. Montrons que $\delta(A \cup B) \leq \delta(A) + \delta(B) + d(A, B)$. Soient $x, y \in A \cup B$. Si $x, y \in A$, alors $d(x, y) \leq \delta(A) \leq \delta(A) + \delta(B) + d(A, B)$, par suite $\sup_{x,y \in A} d(x, y) \leq \delta(A) + \delta(B) + d(A, B)$, de la même façon si $x, y \in B$. Maintenant discutons le

cas où $x \in A$ et $y \in B$ ou inversement. Nous avons $d(x,y) \leq d(x,a) + d(a,b) + d(b,y)$ pour tout $a \in A$ et $b \in B$, par suite $d(x,y) \leq \delta(A) + \delta(B) + d(a,b)$, pour tout $a \in A$ et $b \in B$ par conséquent, nous avons : $d(x,y) \leq \delta(A) + \delta(B) + \inf_{a\in A, b\in B} d(a,b)$ càd $d(x,y) \leq \delta(A) + \delta(B) + d(A,B)$, d'où $\delta(A \cup B) \leq \delta(A) + \delta(B) + d(A,B)$.

Exercice 1.23 *Soient N_1 et N_2 deux normes sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.*

1. *On note $B_1 = \{x \in E / N_1(x) \leq 1\}$ et $B_2 = \{x \in E / N_2(x) \leq 1\}$. Montrer que $B_1 = B_2 \Rightarrow N_1 = N_2$.*
2. *Même question pour les boules ouvertes.*

Solution :

1. Nous allons montrer que pour tout $x \in E$, $N_1(x) = N_2(x)$, pour $x = 0$ c'est evident. Pour $x \neq 0$, on a $N_2(x) \neq 0$, par suite $\frac{x}{N_2(x)} \in B_2 = B_1$ càd $\frac{x}{N_2(x)} \in B_1$ donc $\frac{N_1(x)}{N_2(x)} \leq 1$ par conséquent $N_1(x) \leq N_2(x)$ de la même manière, on montre que $N_2(x) \leq N_1(x)$
2. Pour les boules ouvertes, on prend $\frac{x}{N_2(x)+\varepsilon}$ où $\varepsilon > 0$ et on continue le même procédure.

Exercice 1.24 *Soient $(E_i, d_i)_{1\leq i\leq n}$ des e.m et $E = E_1 \times E_2 \times ... \times E_n$. Pour $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ et $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ dans E, on pose :*
$\delta_1(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{i=n} d_i(x_i,y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$; $\delta_2(x,y) = \max d_i(x_i,y_i)_{1\leq i\leq n}$; $\delta_3(x,y) = \sum_{i=1}^{i=n} d_i(x_i,y_i)$.

1. *Montrer que δ_1, δ_2 et δ_3 sont des distances sur E.*
2. *montrer que δ_1, δ_2 et δ_3 sont métriquement équivalentes.*

Solution :

1. Montrons que δ_3 est une distance : on a $\delta_3(x,y) = \sum_{i=1}^{i=n} d_i(x_i,y_i) = 0$ implique que $d_i(x_i,y_i) = 0$, par suite $x_i = y_i$ pour $1 \leq i \leq n$ ce qui montre que $x = y$. $\delta_3(x,y) = \delta_3(y,x)$ est evident. Reste à montrer l'inégalité triangulaire, nous avons $d(x_i,y_i) \leq d(x_i,z_i) + d(z_i,y_i)$ puis on somme membre à membre, on trouve $\delta_3(x,y) \leq \delta_3(x,z) + \delta_3(z,y)$.
   δ_2 est une distance, en effet : si $\delta_2(x,y) = \max d_i(x_i,y_i)_{1\leq i\leq n} = 0$, alors $d_i(x_i,y_i) = 0$ donc $x_i = y_i$ pour $1 \leq i \leq n$ ce qui prouve que $x = y$.$\delta_2(x,y) = \delta_3(y,x)$ est evident. Pour $x,y,z \in E$, on a : $d_i(x_i,z_i) \leq d_i(x_i,y_i) + d_i(y_i,z_i)$ pour tout $1 \leq i \leq n$, par suite nous avons $\max d_i(x_i,z_i) \leq \max d_i(x_i,y_i) + \max d_i(y_i,z_i)$ càd $\delta_2(x,z) \leq \delta_2(x,y) + \delta_2(y,z)$ d'où δ_2 est une distance.

Pour montrer que δ_1 est une distance faisons tout d'abord un rappel, c'est que : si $a_i, b_i, \lambda \in \mathbb{R}$ pour tout $i \in \{1, ...n\}$ alors

$$|\sum_{i=1}^{i=n} a_i b_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{i=n} a_i^2}.\sqrt{\sum_{=1}^{n} b_i^2}.$$

Maintenant montrons que δ_1 est une distance. Soient $x, y \in E$, on a : $\delta_1(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{i=n} d_i(x_i, y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} = 0$ implique que $d_i(x_i, y_i) = 0$ et par suite, $x_i = y_i$, pour tout $i \in \{1, ...n\}$ ce qui montre que $x = y$. Pour $\delta_1(x, y) = \delta_1(y, x)$ est evident. Prouvons que $\delta_1(x, z) \leq \delta_1(x, y) + \delta_1(y, z)$ pour tout x, y, z dans E. Nous avons : $\delta_1(x, z)^2 = \sum d_i(x_i, z_i)^2$ or $d_i(x_i, z_i) \leq d_i(x_i, y_i) + d_i(y_i, z_i)$, d'où $\delta_1(x, z)^2 \leq \sum d_i(x_i, y_i)^2 + \sum d_i(y_i, z_i)^2 + 2\sum d_i(x_i, y_i)d_i(y_i, z_i)$, appliquons notre rappel nous obtenons donc : $\delta_1(x, z)^2 \leq \sum d_i(y_i, z_i)^2 + \sum d_i(y_i, z_i)^2 + 2\sqrt{\sum d_i(x_i, y_i)^2}\sqrt{\sum d_i(y_i, z_i)^2}$ par suite nous avons : $\delta_1(x, z)^2 \leq \left(\sqrt{\sum d_i(x_i, y_i)^2} + \sqrt{\sum d_i(y_i, z_i)^2}\right)^2$ ce qui montre que $\delta_1(x, z) \leq \delta_1(x, y) + \delta_1(y, z)$.

2. Nous avons $\delta_2(x, y) \leq \delta_3(x, y) \leq n\delta_2(x, y)$ pour tout $x, y \in E$ ce qui montre que δ_2 et δ_3 sont équivalentes. Pour δ_1 et δ_2, nous avons : $\delta_2 \leq \delta_1 \leq \sqrt{n}\delta_2$, par suite δ_2 et δ_1 sont équivalentes. En conclusion les trois normes sont donc équivalentes.

Exercice 1.25 *1. Montrer que deux distances métriquement équivalentes sont topologiquement équivalentes.*

2. *Soit $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une application strictement croissante vérifiant : $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(u + v) \leq \varphi(u) + \varphi(v)$. Montrer que si d est une distance sur un e.m.E alors $\varphi \circ d$ est une distance sur E.*
3. *Déduire que $d_1 = \frac{d}{1+d}$ et $d_2 = \log(1 + d)$ sont des distances sur E.*
4. *Montrer que d et d_1 sont topologiquement équivalentes.*
5. *Est ce que d et d_1 sont métriquement équivalentes ?*

Solution :

1. Soient d et d' deux distances équivalentes, alors $\exists \alpha, \beta > 0$ de sorte que $\alpha d \leq d' \leq \beta d$. Soit O un ouvert pour d, montrons que O est un ouvert pour d'. Pour $x \in O$, $\exists \varepsilon > 0$ tq : $B_d(x, \varepsilon) \subset O$, or nous avons $B_{d'}(x, \alpha\varepsilon) \subset B_d(x, \varepsilon) \subset O$ d'où O est un ouvert pour d'. Inversement soit O un ouvert pour d', montrons que O est aussi un ouvert pour d. Soit $x \in O$, alors il existe $r > 0$ tq : $B_{d'}(x, r) \subset O$, or on sait que $B_d(x, \frac{r}{\beta}) \subset B_{d'}(x, r) \subset O$, ce qui montre que O est un ouvert pour d.

2. Pour tout $x, y \in E$, nous avons : $(\varphi \circ d)(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ et $(\varphi \circ d)(x, y) = (\varphi \circ d)(y, x)$, reste à montrer l'inégalité triangulaire. Pour tout $x, y, z \in E$ on a :$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, compte tenu du propriété de φ, alors $(\varphi \circ d)(x, z) \leq (\varphi \circ d)(x, y) + (\varphi \circ d)(y, z)$ d'où le résultat.
3. Considérons l'application $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ tq : $x \mapsto \frac{x}{x+1}$, $f(0) = 0$, f est strictement coissante, de plus nous avons : $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}^+$ en effet : $f(x+y) = \frac{x+y}{1+x+y} = \frac{x}{1+x+y} + \frac{y}{1+x+y} \leq \frac{x}{1+x} + \frac{y}{1+y}$ par suite d_1 est une distance. Pour d_2, considérons l'application g : $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ tq : $x \mapsto \ln(x+1)$ puis on vérifie que $g(0) = 0$, g est strictement croissante et $g(x+y) \leq g(x) + g(y)$.
4. Remarquons que $d_1 \leq d$. Soit O un ouvert pour d_1, montrons que O est un ouvert pour d. Pour $x \in O$, il existe $r > 0$ de façon que $B_{d_1}(x, r) \subset O$, or $B_d(x, r) \subset B_{d_1}(x, r) \subset O$ d'où O est un ouvert pour d. Réciproquement Soit O un ouvert pour d, montrons que O est un ouvert pour d_1. Soit $x \in O$, alors il existe $r > 0$ tq : $B_d(x, r) \subset O$, cherchons $\varepsilon > 0$ de sorte que $B_{d_1}(x, \varepsilon) \subset B_d(x, r)$. Pour $0 < \varepsilon \leq \frac{r}{r+1}$, nous avons $d_1(x, t) < \varepsilon \leq \frac{r}{r+1}$ donne $d(x, t) < r$ (propriété de φ voir 2) d'où le résultat.
5. Suppopsons que d et d_1 sont équivalentes, alors il existe $\alpha, \beta > 0$ tq $\alpha d(x, y) \leq d_1(x, y) \leq \beta d(x, y)$ pour tout $x, y \in E$, nous prenons un exemple d'espace métrique simple c'est $\mathbb{R}$ et $d(x, y) = |x - y|$ et $x = n \in \mathbb{N}^*$ et $y = 0$, nous obtenons donc $\alpha n \leq \frac{n}{n+1}$ et par suite $\alpha \leq \frac{1}{1+n}$ nous faisons tendre $n \to +\infty$, on obtient donc $\alpha \leq 0$ ce qui est absurde, ce qui montre que d et d_1 ne sont pas équivalentes.

Chapitre 2

Espaces topologiques

2.1 Espaces topologiques

Définition 2.1 Soit E un ensemble non vide. Une topologie τ sur E est un sous ensemble de $\mathcal{P}(E)$ qui vérifie les propriétés suivantes :

1. $\varnothing$ et E sont deux éléments de τ.
2. Toute intersection finie d'éléments de τ est un élément de τ.
3. Toute réunion d'éléments de τ est un élément de τ.

Les éléments de τ s'appelle les ouverts de la topologie τ.
L'ensemble E muni de la topologie τ est appelé espace topologique noté *e.t.*

Exemple 2.2 *1. Tout e.m est un espace topologique(e.t).*

2. Pour tout ensemble E, $\tau = \{\varnothing, E\}$ est une topologie sur E appelé topologie grossière.

3. Pour tout ensemble E, $\tau = \mathcal{P}(E)$ est une topologie sur E appelé topologie discrète.

Définition 2.3 Soit (E, τ) un espace topologique, une partie A de E est dit fermée ssi son complémentaire dans E est un ouvert.

Propriété 2.4 *Soit (E, τ) un espace topologique, les fermés de E vérifient les propriétés suivantes :*

1. $\varnothing$ et E sont fermés.

2. Toute réunion finie de fermés est un fermé.

3. Toute intersection de fermés est un fermé.

2.2 Voisinages-Base de voisinages

Définition 2.5 On appelle voisinage d'un point a d'un e.t, E, toute partie de E contenant un ouvert qui contient a, on note $\mathcal{V}(a)$ l'ensemble des voisinages de a.
$v \in \mathcal{V}(a) \Leftrightarrow \exists O \in \tau; a \in O \subset v$.
On appelle voisinage d'une partie A de E, toute partie contenant un ouvert qui contient A.

Proposition 2.6 *Dans tout e.t, l'ensemble des voisinages $\mathcal{V}(a)$ d'un point a vérifie les propriétés suivantes :*

1. *Pour tout $v \in \mathcal{V}(a)$; $a \in v$.*
2. *Si $v \in \mathcal{V}(a)$ et $v \subset w$, alors $w \in \mathcal{V}(a)$.*
3. *Si $v, w \in \mathcal{V}(a)$, alors $v \cap w \in \mathcal{V}(a)$.*

Théorème 2.7 *(Caractérisation des ouverts) Soit (E, τ) un e.t. Pour qu'une partie A de E soit un ouverte, il faut et il suffit que A soit voisinage de chacun de ses points.*

Preuve. Si A est un ouvert, alors A est un voisinage de chacun de ses points. Réciproquement, si A est un voisinage de chacun de ses points, pour tout $x \in A$, il existe O_x tq $x \in O_x \subset A$, par suite $\cup O_x \subset A$, or $A \subset \cup O_x$, d'où $A = \cup O_x$ ce qui montre que A est un ouvert.

2.2.1 Base de voisinage

Définition 2.8 Soient (E, τ) un e.t a un point de E. On appelle base de voisinage (ou système fondamental) de voisinages de a, toute partie $\mathcal{B} \subset \mathcal{V}(a)$: $\forall v \in \mathcal{V}(a)$, $\exists B \in \mathcal{B}$ tq : $B \subset v$.

Exemple 2.9

1. *$\mathcal{B}$: L'ensemble des ouverts contenant $a \in E$, où E est un e.t.*
2. *Dans un e.m, la famille constituée par $B(a, r)$, $r > 0$ est une base de voisinage de a.*
3. *Dans un e.m, $\{B(a, \frac{1}{n}), n \in \mathbb{N}^*\}$ est une base de voisinage de a.*

Définition 2.10 Soient d_1 et d_2 deux distances sur un ensemble E, on dit que :

1. d_1 et d_2 sont métriquement équivalentes, s'il existe $\alpha > 0, \beta > 0$ tq : pour tout $x, y \in E$, on a : $\alpha d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq \beta d_1(x, y)$.
2. d_1 et d_2 sont topologiquement équivalentes si elle définissent les mêmes parties ouvertes.

2.3 Intérieur, Adhérence, Frontière

Définition 2.11 Soient E un e.t et A une partie de E. On appelle intérieur de A et on note $\mathring{A}$, le plus grand ouvert contenu dans A.

Remarque 2.12

1. L'intérieur de A est la réunion des ouverts contenus dans A, càd $\mathring{A} = \cup O_i$ tq $O_i \subset A$.
2. $x \in \mathring{A} \Leftrightarrow \exists O$ ouvert de façon que $x \in O \subset A \Leftrightarrow A \in \mathcal{V}(x)$.

Propriété 2.13

1. $\mathring{A} \subset A$ *et si* $A \subset B$, *alors* $\mathring{A} \subset \mathring{B}$.

2. $\overset{\circ}{(A \cap B)} = \mathring{A} \cap \mathring{B}$. *et* $\mathring{A} \cup \mathring{B} \subset \overset{\circ}{(A \cup B)}$

Proposition 2.14 *Soient* E *un e.t et* $A \subset E$. A *est ouvert ssi* $\mathring{A} = A$.

Preuve. Si A est un ouvert, alors $A = \mathring{A}$.
Si $A = \mathring{A}$, alors A est un ouvert.

Conséquence : Pour toute partie A de E, on a : $\mathring{\mathring{A}} = \mathring{A}$.

Définition 2.15 Soient E un e.t et $A \subset E$.

1. On dit qu'un point $x \in E$ est adhérent à la partie A, si pour tout $v \in \mathcal{V}(x)$, $v \cap A \neq \varnothing$.
2. On dit qu'un point $x \in E$ est un point d'accumulation de la partie A, si pour tout $v \in \mathcal{V}(x)$, $v \cap A \setminus \{x\} \neq \varnothing$.
3. On dit qu'un point $x \in E$ est un point isolé de la partie A, s'il existe $v \in \mathcal{V}(x)$, $v \cap A = \{x\}$.

Définition 2.16 On appelle adhérence d'une partie A d'un e.t, E, et on note $\overline{A}$, l'ensemble des points adhérent à A.

Remarque 2.17 L'ensemble des points adhérent à la partie A est égale à la réunion de l'ensemble des points d'accumulation de A et de l'ensemble des points isolés de A.

Propriété 2.18 *Soient* E *un e.t et* $A \subset E$.

1. *L'adhérence de* A *est le plus petit fermé contenant* A.
2. *L'adhérence de* A *est l'intersection des fermés contenant* A.

Preuve.

1. Soit F un fermé contenant A, $A \subset F$, montrons que $\overline{A} \subset F$.
   Soit $x \notin F$, donc $x \in \complement_E^F \subset \complement_E^A$, par suite $O = \complement_E^F$ est un voisinage de x et $O \cap A = \varnothing$, ce qui montre que $\notin \overline{A}$ d'où le résultat.
2. Montrons que $\overline{A} = \cap F$ avec $A \subset F$. D'une part, on sait que $\overline{A} \subset \cap F$ avec $A \subset F$, montrons maintenant que $\cap F \subset \overline{A}$, avec $A \subset F$. Soit $x \in E$ et $x \notin \overline{A}$, il existe donc $v \in \mathcal{V}(x)$ de façon que $v \cap A = \varnothing$, par suite il existe O ouvert tq $x \in O$ et $O \cap A = \varnothing$, ce qui montre que $A \subset E \backslash O = F$, d'où $x \notin F$ et donc $x \notin \cap F$.

Remarque 2.19 On appelle fermeture d'une partie A d'un espace topologique E, l'intersection des fermés contenant A càd $\overline{A}$.

Corollaire 2.20 *Soient E un e.t et $A \subset E$.*

1. *A est fermé ssi $\overline{A} = A$.*
2. *A est fermé ssi A contient ses points d'accumulations.*

Preuve.

1. Si A est fermé, alors $\overline{A} = A$. Inversement si $\overline{A} = A$, alors A est fermé.
2. Notons A', l'ensemble des points d'accumulation de A, alors $\overline{A} = A' \cup A$, si A est fermé, alors $\overline{A} = A$, ce qui montre que $A' \subset A$, maintenant si $A' \subset A$, alors $\overline{A} = A$ donc A est fermé.

Propriété 2.21 *Sient E un e.t et $A \subset E$.*

1. $A \subset \overline{A}$, $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$, $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$.
2. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.
3. $\complement_E^{\overline{A}} = \mathring{\complement_E^{A}}$., $\complement_E^{\mathring{A}} = \overline{\complement_E^{A}}$.

Preuve. 1) et 2) sont immédiats. Pour 3), on sait que $\overline{A} = \cap F$, $A \subset F$, par suite $\complement_E^{\overline{A}} = \cup \complement_E^F$ avec $\complement_E^F \subset \complement_E^A$. Posons $\complement_E^F = O$ est un ouvert de E, alors $\complement_E^{\overline{A}} = \cup O$ où $O \subset \complement_E^A$ par suite $\complement_E^{\overline{A}} = \mathring{\complement_E^{A}}$.

Définition 2.22 Soient E un e.t et $A \subset E$, on appelle frontière de A et on note $Fr(A)$, l'ensemble $Fr(A) = \{x \in E, \forall v \in \mathcal{V}(x); v \cap A \neq \varnothing; v \cap \complement^A \neq \varnothing\}$.
$Fr(A) = \overline{A} \cap \overline{\complement^A}$.

2.3.1 Sous ensemble denses-Espace topologique séparable

Définition 2.23 Un ensemble est dénombrable s'il est en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$.

Définition 2.24 On dit qu'une partie A d'un e.t E est dense dans E si $\overline{A} = E$.
On dit qu'un e.t E est séparable s'il existe une partie dénombrable A de E dense dans E ($A \subset E$ et $\overline{A} = E$).

Définition 2.25 Soit E un e.t, on appelle base de la topologie (ou base d'ouvert), tout ensemble $\mathcal{B}$ de parties ouverts de E telque tout ouvert de E soit réunion d'éléments de $\mathcal{B}$.

2.3.2 Espaces topologiques séparés

Définition 2.26 Un e.t E est dit séparé, si pour tout points distincts x et y dans E, il existe $u \in \mathcal{V}(x)$ et $v \in \mathcal{V}(y)$ tq : $u \cap v = \varnothing$.

Remarque 2.27
1. Tout e.m est séparé.
2. Tout espace discrèt est séparé.
3. Dans un espace séparé tout singleton est fermé.

Théorème 2.28 *Un e.t. E est séparé ssi pour tout $x \in E$, l'intersection des voisinages fermés de x est égale $\{x\}$.*

Preuve. Soient $x \in E$ et $w = \bigcap v$, $v \in \mathcal{V}(x)$, v fermé. Soit $y \in E$ tq, $y \neq x$. il existe deux ouverts $u \in \mathcal{V}(x)$, $v \in \mathcal{V}(y)$ tq : $u \cap v = \varnothing$, donc $u \subset \complement_E^v$, par suite $\complement_E^v$ est un voisinage de x qui est fermé et on a : $y \notin \complement_E^v$, par suite $y \notin \bigcap v$, $v_1 = \complement_E^v$, $v_1 \in \mathcal{V}(x)$, v_1 fermé, donc $\bigcap v = \{x\}$.
Soient x, y deux points distincts de E, $y \notin \bigcap v$, $v \in \mathcal{V}(x)$, v fermé, par suite il existe $v \in \mathcal{V}(x)$, tq : $y \notin v$, ce qui montre que $y \in \complement^v$, par consèquent $\complement^v \in \mathcal{V}(y)$, donc $v \cap \complement^v = \varnothing$, conclusion E est séparé.

2.3.3 Topologie induite-Sous-espace topologique

Définition 2.29 Soit E un espace topologique, dont la famille d'ouverts est notée O_E et A une partie non vide de E. On note O_A la famille de parties de A,

$$O_A = \{A \cap U ; U \in O_E\}.$$

On vérifie aisement que O_A satisfait les axiomes des ouverts, donc on définit une topologie sur A. On dit que cette topologie est induite par celle de E, ou encore que A muni de cette topologie est un sous espace topolgique de E.

Remarque 2.30 Dire que O_A est un ouvert de A celà revient à dire qu'il existe O_E ouvert de E de façon que $O_A = A \cap O_E$.

Proposition 2.31 *F_A est un fermé de A ssi il existe F_E un fermé de E tq : $F_A = A \cap F_E$.*

Preuve. Supposons que F_A un fermé de A, alors $\complement_A^{F_A}$ est un ouvert de A càd il existe O_E ouvert de E de façon que $\complement_A^{F_A} = A \cap O_E$ ce qui qui prouve que $F_A = A \cap E/O_E$. Réciproquement si F_E est un fermé de E, alors $A \cap F_E = A/(A \cap (E/F_E))$ qui est un fermé de A.

2.4 Exercices

Exercice 2.32 *Soit (E, τ) un e.t, montrer qu'en posant $\varphi(x) = \mathcal{V}(x)$(l'ensemble des voisinages de x), on définit une application $\varphi : E \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$, vérifiant $\varphi(x) \neq$, $\forall x \in E$ les propriétés suivantes.*

1. *Si $A \in \varphi(x)$ et $A \subset B$, alors $B \in \varphi(x)$.*
2. *Si $A, B \in \varphi(x)$, alors $A \cap B \in \varphi(x)$.*
3. *Si $A \in \varphi(x)$, alors $x \in A$.*
4. *Si $A \in \varphi(x)$, alors $\exists B \in \varphi(x)$ tq, $\forall y \in B$ on a $A \in \varphi(y)$.*
5. *Soit (E, φ) un couple où E est un ensemble et $\varphi : E \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$ une application vérifiant 1), 2), 3) et 4). On définit l'ensemble $\tau = \{A \in \mathcal{P}(E); \forall x \in A, A \in \varphi(x)\}$. Démontrer que (E, τ) est un e.t et que pour tout $x \in E$ on a : $\varphi(x) = \mathcal{V}(x)$.*

Solution :

1. Si $A \in \varphi(x)$, alors il existe un ouvert O tq : $x \in O \subset A \subset B$ donc $x \in O \subset B$ ce qui prouve que B est un voisinage de x càd $B \in \varphi(x)$.
2. Si $A, B \in \varphi(x)$, alors il existe O_1, O_2 deux ouverts tq $x \in O_1 \subset A$ et $x \in O_2 \subset B$ par suite on a : $x \in O_1 \cap O_2 \subset A \cap B$, du fait que l'intersection de deux ouverts est un ouvert alors $A \cap B$ est un voisinage de x.
3. Si $A \in \varphi(x)$, alors il existe un ouvert O tq : $x \in O \subset A$ donc $x \in A$.

4. Si $A \in \varphi(x)$, alors il existe O un ouvert tq : $x \in O \subset A$, par suite si $y \in O$ alors $y \in O \subset A$ donc A est un voisinage de y d'où il suffit de choisir $B = O$.
5. Montrons que τ est une topologie. $\varnothing \in \tau$?, on a $\varnothing \in P(E)$ et $x \in \varnothing \Rightarrow \varnothing \in \varphi(x)$. Pour $E \in \tau$? nous avons $E \in P(E)$ et $\varphi(x) \neq \varnothing$ pour $x \in E$, donc il existe $A \subset E$ tq $A \in \varphi(x)$ ce qui montre que $E \in \varphi(x)$. Pour $A, B \in \tau$, montrons que $A \cap B \in \tau$. Nous avons $A \cap B \in P(E)$ et pour tout $x \in A$, $A \in \varphi(x)$, pour tout $x \in B$, $B \in \varphi(x)$, alors maintenant pour $x \in A \cap B$ on a :$A \cap B \in \varphi(x)$ ce qui implique que $A \cap B \in \tau$.
   Soient A_i, $i \in I$ des éléments de τ, montrons que $\cup_{i\in I} A_i \in \tau$. Nous avons $\cup A_i \in P(E)$, d'autre part pour $x \in \cup A_i$, il existe $i_0 \in I$ de sorte que $x \in A_{i_0}$ ce qui implique que $A_{i_0} \in \varphi(x)$ or $A_{i_0} \subset \cup A_i$ d'où $\cup A_i \in \tau$. Conclusion τ est une topologie sur E. Reste à montrer que pour tout $x \in E$ on a : $\varphi(x) = \mathcal{V}(x)$. Montrons que $V(x) \subset \varphi(x)$, soit $v \in V(x)$, alors il existe $O \in \tau$ tq $x \in O \subset v$, et puisque $x \in O$, alors $O \in \varphi(x)$, par suite on a : $O \subset v$ et $O \in \varphi(x)$ donc $v \in \varphi(x)$ ce qui prouve que $V(x) \subset \varphi(x)$. Montrons maintenant que $\varphi(x) \subset V(x)$. Soit $A \in \varphi(x)$ et prenons $O = \{y \in E; A \in \varphi(y)\}$. $O \subset A$ en effet : $y \in O$ implique que $A \in \varphi(y)$ et par suite $y \in A$.
   Montrons que $O \in \tau$ càd pour tout $y \in O$, on a : $O \in \varphi(y)$; pour $y \in O$, alors $A \in \varphi(y)$ par suite il existe $B \in \varphi(y)$ tq : $\forall z \in B$ on a $A \in \varphi(z)$ càd $B \subset O$ or $B \in \varphi(y)$ ce qui prouve que $O \in \varphi(y)$ et donc $O \in \tau$, par conséquent $x \in O \subset A$, ce qui donne que $A \in V(x)$ d'où $\varphi(x) \subset V(x)$.

Exercice 2.33 *Soient E un e.t et A un ouvert de E.*

1. *Montrer que $A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$.*
2. *Montrer que si B est dense dans E, alors $\overline{A} = \overline{A \cap B}$.*
3. *Montrer que si A et B sont denses dans E, alors $A \cap B$ est dense dans E.*
4. *Dans $\mathbb{R}$, déterminer des ouverts A et B telque : $A \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cap B$, $\overline{A \cap B}$, $\overline{A} \cap \overline{B}$ soient differents.*

Solution :

1. Montrons que $A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$. Soit $x \in A \cap \overline{B}$, alors $x \in A$ et $x \in \overline{B}$, par suite pour tout $v \in V(x)$, nous avons $v \cap B \neq \varnothing$ et puisque A est un ouvert, alors $A \cap v \in V(x)$ ce qui donne que $v \cap A \cap B \neq \varnothing$ càd $x \in \overline{A \cap B}$ d'où le résultat.

2. Montrons que si B est dense dans E, alors $\overline{A} = \overline{A \cap B}$. Nous avons : $\overline{B} = E$ et $A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$ donc $A \cap E \subset \overline{A \cap B}$ càd $A \subset \overline{A \cap B}$ ce qui montre que $\overline{A} \subset \overline{A \cap B}$ or $\overline{A \cap B} \subset \overline{A}$ ce qui prouve que $\overline{A} = \overline{A \cap B}$.
3. On a montré que si B est dense dans E, alors $\overline{A} = \overline{A \cap B}$ par suite si A est dense dans E, alors $\overline{A} = E$ ce qui donne $E = \overline{A} = \overline{A \cap B}$ de le résultat.
4. Dans $\mathbb{R}$, déterminons des ouverts A et B telque : $A \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cap B$, $\overline{A \cap B}$, $\overline{A} \cap \overline{B}$ soient differents. Prenons $A =]-2, -1[\cup]0, 1[$, $B =]-1, -\frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2}, 2[$, nous avons donc :
$\overline{A} = [-2, -1] \cup [0, 1]$ et $\overline{B} = [-1, -\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, 2]$ par suite $A \cap \overline{B} = [\frac{1}{2}, 1[$,
$\overline{A} \cap B =]\frac{1}{2}, 1]$, $\overline{A} \cap \overline{B} = \{-1\} \cup [\frac{1}{2}, 1]$, $A \cap B =]\frac{1}{2}, 1[$ et $\overline{A \cap B} = [\frac{1}{2}, 1]$.

Exercice 2.34 *Pour toute partie A d'un e.t E, on pose :* $\alpha(A) = (\overset{\circ}{\overline{A}})$, $\beta(A) = \overline{(\overset{\circ}{A})}$.

1. *Montrer que si A est ouverte, alors $A \subset \alpha(A)$, et que si A est fermé, alors $\beta(A) \subset A$.*
2. *Montrer que pour toute partie A de E, on a : $\alpha(\alpha(A)) = \alpha(A)$ et $\beta(\beta(A)) = \beta(A)$.*
3. *Montrer que si U et V sont deux ouverts disjoints, alors $\alpha(U)$ et $\beta(V)$ sont disjoints.*

Solution :

1. Montrons que si A est ouverte, alors $A \subset \alpha(A)$. On sait que $A \subset \overline{A}$, par suite $A = \overset{\circ}{A} \subset (\overset{\circ}{\overline{A}})$ d'où $A \subset \alpha(A)$.
Montrons que si A est fermé, alors $\beta(A) \subset A$. On sait que $\overset{\circ}{A} \subset A$ donc $\overline{(\overset{\circ}{A})} \subset \overline{A} = A$ ce qui montre que $\beta(A) \subset A$.
2. On sait que $\alpha(A)$ est un ouvert donc $\alpha(A) \subset \alpha(\alpha(A))$ (d'aprés 1), d'autre part, nous avons $\alpha(A) \subset \overline{A}$, puis passons à l'adhérence on obtient :$\overline{((\overset{\circ}{\overline{A}}))} \subset \overline{A}$, on passe une deuxième fois à l'intérieur on trouve $\alpha(\alpha(A)) \subset \alpha(A)$. Conclusion $\alpha(\alpha(A)) = \alpha(A)$.
On sait que $\beta(A)$ est un fermé donc $\beta(\beta(A)) \subset \beta(A)$. D'autre part nous avons $\overset{\circ}{A} \subset \overline{(\overset{\circ}{A})}$, maintenant passons à l'intérieur puis à l'adhérence on obtient donc $\beta(A) \subset \beta(\beta(A))$. Conclusion $\beta(\beta(A)) = \beta(A)$.
3. Montrons que si U et V sont deux ouverts disjoints, alors $\alpha(U)$ et $\beta(V)$ sont disjoints. Supposons que $\alpha(U) \cap \beta(V) \neq \varnothing$, donc il existe

$x \in \alpha(U) \cap \beta(V)$ càd $x \in \alpha(U)$ et $x \in \beta(V)$. Donc $\alpha(U) \in V(x)$ et $\forall w \in V(x)$, $w \cap \overset{\circ}{V} \neq \varnothing$, en particulier pour $w = (\overset{\circ}{\overline{U}})$ ce qui veut dire que $(\overset{\circ}{\overline{U}}) \cap \overset{\circ}{V} \neq \varnothing$ par suite nous avons $\varnothing \neq \overset{\circ}{V} \cap \overline{U}$ ce qui montre que $U \cap \overset{\circ}{V} \neq \varnothing$ et donc $U \cap V \neq \varnothing$ ce qui est absurde. D'où $\alpha(U)$ et $\beta(V)$ sont disjoints.

Exercice 2.35 *Soient (E, d) un e.m et $A \subset E$.*
Montrer qu'il y a équivalence entre les assertions suivantes.
$x \in \overline{A}$.

2. $d(x, A) = 0$.
3. *Il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de A tq : $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = x$.*

Solution :

`Montrons que` $1 \Rightarrow 2$.
Soit $x \in \overline{A}$ donc $\forall\varepsilon > 0$, $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \varnothing$, càd $\forall\varepsilon > 0, \exists t \in A$ tq :$d(x,t) < \varepsilon$ par suite $\inf\limits_{t\in A} d(x, t) < \varepsilon$ autrement dit $d(x, A) < \varepsilon$ ou encore $d(x, A) = 0$.
`Montrons que` $2 \Rightarrow 3$.
Supposons que $d(x, A) = 0$ donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists a_n \in A$ tq : $d(x, a_n) < \frac{1}{n}$. Pour $\varepsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*$ tq $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$, pour $n \geq n_0$ nous avons $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon$, càd $d(x, a_n) < \varepsilon$ ce qui montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = x$.
Montrons que $3 \Rightarrow 1$.
Supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = x$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tq pour tout $n \geq n_0$, $d(a_n, x) < \varepsilon$. par suite $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \varnothing$ donc $x \in \overline{A}$. Conclusion on a donc l'équivalence.

Exercice 2.36 *Soit E un e.t, A et B deux parties de E, on note par X' l'ensemble des points d'accumulations de X. Montrer que :*

1. *Si $A \subset B$, alors $A' \subset B'$.*
2. *$(A \cup B)' = A' \cup B'$.*

Solution :

1. Soit $x \in A'$, alors pour tout $v \in V(x)$, $v \cap A/\{x\} \neq \varnothing$, donc $v \cap B/\{x\} \neq \varnothing$ ce qui prouve que $x \in B'$.
2. D'aprés la question 1, nous avons $A' \cup B' \subset (A \cup B)'$, reste à montrer que $(A \cup B)' \subset A' \cup B'$. Soit $x \notin (A' \cup B')$ càd $x \notin A'$ et $x \notin B'$, par suite, il existe $u \in V(x)$ tq : $u \cap A/\{x\} = \varnothing$ et il existe $v \in V(x)$ tq : $v \cap B/\{x\} = \varnothing$. Posons $U = u \cap v$, nous avons $(U/\{x\}) \cap (A \cup B) = (U/\{x\} \cap A) \cup (U/\{x\} \cap B) \subset (u/\{x\} \cap A) \cup (v/\{x\} \cap B)$ donc $(U/\{x\}) \cap (A \cup B) = \varnothing$ d'où le résultat.

Chapitre 3

Fonctions continues et homéomorphismes

3.1 Fonctions continues

Définition 3.1 Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. f est continue en x_0 ssi $\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0$, tq : $|x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$, ou encore
$\forall \epsilon > 0$, $\exists \eta > 0$ tq : $f(B(x_0, \eta)) \subset B(f(x_0), \epsilon)$.

Définition 3.2 Soient E et F deux e.t, $f : E \to F$ une application et $a \in E$. On dit que f est continue au point a, si pour tout voisinage v de $f(a)$, il existe u voisinage de a tq : $f(u) \subset v$.
Cette propriété est équivalente à la suivante : $\forall v \in \mathcal{V}(f(a))$, $f^{-1}(v) \in \mathcal{V}(a)$.
On dit que f est continue sur E s'il est continue en tout point de E.

Théorème 3.3 *Soient E, F deux e.t et $f : E \to F$ une application, alors les P.S.S.E :*

1. *f est continue sur E.*
2. *Pour toute partie A de E, $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.*
3. *Pour tout w fermé de F, $f^{-1}(w)$ est un fermé de E.*
4. *Pour tout v ouvert de F, $f^{-1}(v)$ est un ouvert de E.*

Preuve. Montrons que $1 \Rightarrow 2$. Soient $A \subset E$ et $a \in \overline{A}$, considérons $v \in \mathcal{V}(f(a))$, alors $f^{-1}(v) \in \mathcal{V}(a)$ et puisque $a \in \overline{A}$, donc $f^{-1}(v) \cap A \neq \varnothing$, par conséquent $v \cap f(A) \neq \varnothing$, il en resulte que $f(a) \in \overline{f(A)}$, ce qui montre que $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.
$2 \Rightarrow 3$: Soit w un fermé de F, on a : $f\left(f^{-1}(w)\right) \subset w$ et donc $\overline{f\left(f^{-1}(w)\right)} \subset \overline{w}$,

sachant que $\overline{w} = w$ et on sait que $f(\overline{f^{-1}(w)}) \subset \overline{f\,(f^{-1}(w))}$,alors $f(\overline{f^{-1}(w)}) \subset w$, posons $B = \overline{f^{-1}(w)}$, par suite $f(B) \subset w$, d'autre part on a :$B \subset f^{-}(f(B)) \subset f^{-1}(w)$, donc $B \subset f^{-1}(w)$, càd $\overline{f^{-1}(w)} \subset f^{-1}(w)$ ce qui montre que $f^{-1}(w)$ est fermé.
$3 \Rightarrow 4$: Soit v un ouvert de F, alors $\complement_F^v$ est un fermé de F donc $f^{-1}(\complement_F^v) = \complement_E^{f^{-1}(v)}$ est un fermé de E, par consèquent $f^{-1}(v)$ est un ouvert dans E.
$4 \Rightarrow 1$: Soit $a \in E$ et $v \in \mathcal{V}(f(a))$, il existe donc B ouvert dans F tq : $f(a) \in B \subset v$ ce qui montre que $a \in f^{-1}(B) \subset f^{-1}(v)$, avec $f^{-1}(B)$ est un ouvert de E donc $f^{-1}(v) \in \mathcal{V}(a)$, par suite f est continue en a. Conclusion f est continue sur E.

Propriété 3.4 *Soient E, F, G trois e.t et $f : E \to F$, $g : F \to G$ deux applications. Si f est continue en $a \in E$(resp sur E) et g est continue en $f(a)$(resp sur F), alors $g \circ f$ est continue en a(resp sur E).*

Preuve. $g \circ f : E \to F$ est continue en a ?
Soit $w \in \mathcal{V}(g(f(a))$, alors $g^{-1}(w) \in \mathcal{V}(f(a))$, donc $f^{-1}(g^{-1}(w)) = (g \circ f)^{-1}(w) \subset \mathcal{V}(a)$, ce qui montre que $g \circ f$ est continue en a.

Définition 3.5 Soient E, F deux e.t et $f : E \to F$ une application. On dit que f est un homéomorphisme, si f est une bijection et f et f^{-1} sont continues.
On dit que E et F sont homéomorphes s'il existe un homéomorhisme de E sur F.

3.2 Notion de limites

Limite d'une suite :

Définition 3.6 Soient E un e.t et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E.
On dit que x_n converge vers $l \in E$ et on écrit $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = l$, si $\forall v \in \mathcal{V}(l)$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, tq $n \geq n_0$, on a : $x_n \in v$.
Dans le cas où E est un e.m, cette définition devient : $\forall \epsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq :$n \geq n_0$, on a : $d(x_n, l) < \epsilon$.

Théorème 3.7 *Dans un e.t séparé E, la limite d'une suite si elle existe est unique.*

Théorème 3.8 *Soient E un e.t, $A \subset E$ et $x \in E$*

1. *Pour que x soit adhérent à A, il suffit qu'il existe une suite de points de A qui converge vers x.*

2. *Si E est métrisable (ou plus généralement tout point de E admet une base dénombrable de voisinages) cette condition est nécessaire.*

Définition 3.9 On dit que E est métrisable, si sa topologie est induite par une distance.

Preuve du théorème.

1. Soit (a_n) une suite de points de A qui converge vers x. Soit $v \in \mathcal{V}(x)$, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tq $n \geq n_0$, $a_n \in v$, donc pour $n \geq n_0$, $a_n \in v \cap A$, ce qui veut dire que $v \cap A \neq \varnothing$, donc $x \in \overline{A}$.

2. Soient $x \in \overline{A}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$, le système fondamental dénombrable de voisinages de x (on suppose que (V_n) est décroissante sinon on prend $w_0 = V_0, w_1 = V_0 \cap V_1, w_2 = V_0 \cap V_1 \cap V_2$). Comme $x \in \overline{A}$ et que $V_n \in \mathcal{V}(x)$, alors $A \cap V_n \neq \varnothing$, soit alors $a_n \in A \cap V_n$, alors la suite (a_n) est une suite de points de A qui converge vers x, en effet : Soit $v \in \mathcal{V}(x)$, alors il existe n_0 tq : $V_{n_0} \subset v$ donc $V_n \subset v$ dés que $n \geq n_0$ et par suite $a_n \in v$ pour $n \geq n_0$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = x$.

Corollaire 3.10 *Pour qu'une partie A d'un e.t métrisable soit fermée, il faut et il suffit qu'elle contient toutes les limites de ses suites convergentes.*

Théorème 3.11 *Soient E, F deux e.t, $f : E \to F$ une application et $a \in E$.*

1. *Si f est continue en a, alors pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E convergeant vers a, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ de F converge vers $f(a)$.*
2. *Si E est metrisable (ou plus généralement, si tout point de E admet une base dénombrable de voisinages) la condition est suffisante.*

Preuve.

1. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E tq : $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, soit $w \in \mathcal{V}(f(a))$, alors il existe $v \in \mathcal{V}(a)$ tq : $f(v) \subset w$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$ et $v \in \mathcal{V}(a)$, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tq pour tout $n \geq n_0$ on a : $x_n \in v$, par suite $f(x_n) \in f(v) \subset w$, dès que $n \geq n_0$, ce qui montre que $f(x_n)$ converge vers $f(a)$.

2. Supposons que f n'est pas continue au point a. Soit $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un système fontamental dénombrable de voisinage de a (on suppose que (V_n) est décroissante). Comme f n'est pas continue au point a, alors il existe $w \in V(f(a))$ de façon que $f^{-1}(w) \notin V(a)$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ nous

avons $V_n \not\subset f^{-1}(w)$, d'où il existe $a_n \in V_n$ tq $f(a_n) \notin w$, par suite on a la suite (a_n) converge vers a et la suite $(f(a_n))$ ne converge pas vers $f(a)$.

Limite d'une fonction

Définition 3.12 Soit E, F deux e.t, A une partie de E, $a \in \overline{A}$ et $f : A \to F$ une application. On dit que $f(x)$ tend vers $l \in F$, lorsque x tend vers a par valeurs dans A si : $(\forall v \in V(l)), (\exists u \in v(a))$ tq : $f(A \cap u) \subset v$.
Si $(E, d); (F, \delta)$ sont des e.m. Dire que $f(x)$ tend vers l quand x tend vers a, par valeurs dans A est : $\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0$ tq : $(x \in A, d(x, a) < \eta \Rightarrow \delta(f(x), l) < \epsilon)$.

Remarque 3.13

1. f continue au point $a \Leftrightarrow \forall v \in V(f(a)), \exists u \in V(a)$ tq : $f(u) \subset v \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.
2. Inversement si $f : A \to F$ est une application et $a \in \overline{A}$, soit alors $\widetilde{f} : A \cup \{a\} \to F$ tq $\widetilde{f}/A = f$ et $\widetilde{f}(a) = \lim\limits_{x \to a} f(x) = l$. Dire que $f(x)$ tend vers l lorsque x tend vers a par valeurs dans A veut dire que $\widetilde{f}$ est continue au point a.

3.3 Comparaison de Topologies

Définition 3.14 Soit E un ensemble, T_1 et T_2 deux topologies sur E. On dit que T_2 est plus fine que T_1(ou encore T_1 est moins fine que T_2) si $\mathrm{T}_1 \subset \mathrm{T}_2$ et on note $\mathrm{T}_1 \preceq \mathrm{T}_2$.

Remarque 3.15

1. $\mathrm{T}_1 \preceq \mathrm{T}_2$ si et seulement si $id : (E, \mathrm{T}_2) \to (E, \mathrm{T}_1)$ est continue.
2. La topologie grossière est moins fine que la topologie discrète sur E.
3. Soient d_1 et d_2 deux distances sur E, d_1 et d_2 sont topologiquement équvalentes si et seulement si $id : (E, d_1) \to (E, d_2)$ est un homéomorphisme.
4. Si d_1 et d_2 sont métriquement équivalentes, alors elles sont topologiquement équivalentes.

Exemple 3.16 *Soit (E, d) un espace métrique, alors d et $d_1 = \frac{d}{1+d}$ sont topologiquement équivalentes.*

3.4 Applications continues et sous-espace topologiques

Théorème 3.17 *Soient E un e.t et A une partie de E. La topologie induite sur A est la topologie la moins fine rendant continue l'injection canonique $i : A \to E$.*

Preuve : On a : $i : A \to E$ l'injection canonique est continue car si U est un ouvert de E, alors $i^{-1}(U) = U \cap A$ qui est un ouvert de A. Réciproquement T une topolgie sur A tq : $i(A, \mathrm{T}) \to E$, soit continue, alors pour tout ouvert U de E, $i^{-1}(U) = U \cap A$ est un ouvert de A, ce qui montre que $i^{-1}(U) \in \mathrm{T}$ par suite, la topologie induite sur A est moins fine que T.

Propriété 3.18 *Soient E un espace topologique, A une partie de E et F un autre espace topologique. Une application $f : F \to A$ est continue si et seulement si l'application $i_A \circ f : F \to E$ est continue (on a noté $i_A : A \to E$ l'injection canonique).*

Preuve : Supposons que f est continue et puisque i_A est continue alors $i_A \circ f$. Réciproquement, supposons que $i_A \circ f$ est continue, montrons que f est continue. Soit v un ouvert de A, cet ouvert est de la forme $v = A \cap u$ avec u un ouvert de E de plus nous avons $v = i_A^{-1}(u)$ par suite

$$f^{-1}(v) = f^{-1}(i_A^{-1}(u)) = (i_A \circ f)^{-1}(u),$$

et puisque $i_A \circ f$ est continue, alors f est continue.

3.5 Topologie produit

Définition 3.19 Soit $(E_i)_{i\in I}$ une famille d'ensembles, I un ensemble d'indice. On définit le produit des E_i et on note

$$\prod_{i\in I} E_i = \{x = (x_i), \forall i \in I, x_i \in E_i\}.$$

Définition 3.20 Soient $(E_i)_{i\in I}$ une famille d'e.t et $E = \prod_{i\in I} E_i$. On appelle ouvert élémentaire de E toute partie O de E de la forme

$$O = \prod_{i\in J} A_i \times \prod_{i\notin J} E_i,$$

où J est une partie fnie de J et les A_i sont des ouverts de E_i.
La topologie produit sur E est la topologie dont une base d'ouvert est constituée par les ouverts élémentaires.

Remarque 3.21
1. Un ouvert pour la topologie produit est une réunion d'ouverts élémentaires.
2. Un produit d'ouvert $\prod_{i\in I} A_i$ n'est ouvert dans la topologie produit que si tout les A_i sauf un nombre fini sont l'espace E_i(en particulier si I est fini, un produit d'ouverts est ouvert).
3. Un produit $\prod_{i\in I} F_i$ de fermé est toujours un fermé pour la topologie produit.

Théorème 3.22 *Soient $(E_i)_{i\in I}$ des e.t. Si les E_i sont séparés, alors $E = \prod_{i\in I} E_i$ est séparé.*

Preuve : Soient a et b deux points distincts de E, comme a et b sont dans E, alors $a = (a_i)_{i\in I}$ et $b = (b_i)_{i\in I}$ et puisque $a \neq b$, alors il existe $i_0 \in I$ de sorte que $a_{i_0} \neq b_{i_0}$, E_{i_0} étant séparé, alors il existe deux ouverts, $U_{i_0} \in V(a_{i_0})$ et $V_{i_0} \in V(b_{i_0})$, tq : $U_{i_0} \cap V_{i_0} = \varnothing$. Soient $U = U_{i_0} \times \prod_{i\neq i_0} E_i$ et $V = V_{i_0} \times \prod_{i\neq i_0} E_i$, alors U et V sont des ouverts pour la topologie produit et $a \in U$, $b \in V$, par suite $U \in U(a)$ et $V \in V(b)$ et $U \cap V = \varnothing$

Définition 3.23 Soient E et F deux e.t et $f : E \to F$ une application, on dit que :
1. f est ouverte si pour tout ouvert O de E, $f(O)$ est un ouvert de F.
2. f est fermée si pour tout fermé A de E, $f(A)$ est un fermé de F.

Théorème 3.24 *La topologie produit P sur $E = \prod_{i\in I} E_i$ est la topologie la moins fine sur E rendant continues les projections canoniques $pr_i : E \to E_i$, tq : $x = (x_i) \mapsto x_i$ de plus les projections sont ouvertes.*

Preuve : • Soient $i_0 \in I$; $pr_{i_0} : E \to E_{i_0}$ et O_{i_0} un ouvert de E_{i_0}, alors $pr_{i_0}^{-1}(O_{i_0}) = \{x = (x_i) \in E; x_{i_0} \in O_{i_0}\} = O_{i_0} \times \prod_{i\neq i_0} E_i$, donc $pr_{i_0}^{-1}(O_{i_0})$ est un ouvert élémentaire de E.
• Soit T une topologie sur E telle que pour tout $i \in I$, $pr_i(E, \mathrm{T}) \to E_i$ soit continue. Alors pour tout ouvert A_i de E_i, $pr_i^{-1}(A_i) = A_i \times \prod_{j\neq i} E_j \in \mathrm{T}$, donc si J est une partie finie de I, on a :

$$\cap_{i\in J} pr_i^{-1}(A_i) = \prod_{i\in J} A_i \times \prod_{i\notin J} E_i \in \mathrm{T},$$

par conséquent T contient tous les les ouverts élémentaires càd T contient les ouverts de la topologie produit ie ; $P \subset \mathrm{T}$.
• Soit $i \in I$, montrons que $pr_i : E \to E_i$ est ouverte. Soit O un ouvert de E, alors $pr_i(O)$ est un ouvert de E_i?. Soit $x_i \in pr_i(O)$, alors il existe $x \in O$ de sorte que $x_i = pr_i(x)$, comme $x \in O$, O un ouvert pour P, alors il existe $\prod_{i\in I} A_i$ ouvert élémentaire tq : $x \in \prod_{i\in I} A_i \subseteq O$ d'où $pr_i(x) \subseteq A_i \subseteq pr_i(O)$, par suite $pr_i(O) \in V_{E_i}(x)$ ce qui montre que $pr_i(O)$ est ouvert.

3.6 Exercices

Exercice 3.25 *Soient (E,d) un e.m, A et B deux parties non vides de E.*

1. *Montrer que pour tout $x,y \in E$ on a : $|d(x,A)-d(y,A)| \leq d(x,y)$, en déduire que l'application $x \in E \mapsto d(x,A)$ est continue.*
2. *Montrer que l'ensemble $\{x \in E; d(x,A) < d(x,B)\}$ est un ouvert.*
3. *Déduire que si A et B sont deux fermées dijointes de E, alors il existe deux ouverts U et V tels que $A \subset U$ et $B \subset V$ et $U \cap V = \varnothing$.*

Solution :

1. pour tout $x,y \in E$, on a : $d(y,t) \leq d(y,x) + d(x,t)$ pour tout $t \in A$. passons maintenant à l'inf càd $\inf\limits_{t\in A} d(y,t) \leq d(y,x) + \inf\limits_{t\in A} d(x,t)$ càd $d(y,A) \leq d(y,x) + d(x,A)$ ou encore $-d(x,y) \leq d(x,A) - d(y,A)$ et de la même façon on montre l'autre inégalité.
   Soit $x_0 \in E$, alors $|d(x,A) - d(x_0,A)| \leq d(x_0,x)$ par suite si $x \to x_0$, alors $d(x_0,x) \to 0$, ce qui montre que $d(x,A) \to d(x_0,A)$ d'où l'application $x \mapsto d(x,A)$ est continue sur E.
2. Montrons que $O = \{x \in E; d(x,A) < d(x,B)\}$ est un ouvert. On sait que $x \mapsto d(x,A)$ et $x \mapsto d(x,B)$ sont continues donc l'application $h : x \mapsto d(x,A) - d(x,B)$ est continue sur E, par suite $O = \{x \in E; h(x) < 0\} = h^{-1}(]-\infty, 0[$ et comme h est continue alors O est ouvert.
3. Déduction : si A est un fermé disjoint du fermé B, alors pour tout $x \in A$ on a :
   $h(x) = -d(x,B) < 0$ càd $A \subset h^{-1}(]-\infty,0[= U$. Pour tout $x \in B$ on a :
   $h(x) = d(x,A) > 0$ càd $B \subset h^{-1}]0,+\infty[= V$ de plus nous avons :
   $$U \cap V = h^{-1}]0,+\infty[\cap h^{-1}(]-\infty,0[= h^{-1}(]-\infty,0[\cap]0,+\infty[) = \varnothing.$$

Exercice 3.26 *Soit (E,d) un espace métrique, $A \subset E$ et χ_A, la fonction caractéristique définie par : $\chi_A(x) = 1$ si $x \in A$ et $\chi_A(x) = 0$ si $x \notin A$. Montrer que χ_A est continue si et seulement si A est ouverte et fermée dans (E,d).*

Solution : Supposons que A est ouverte et fermé. Montrons que χ_A est continue. Soit F un fermé de $\mathbb{R}$, on a : $\chi_A^{-1}(F) = \varnothing$ ou $\chi_A^{-1}(F) = E$ ou $\chi_A^{-1}(F) = A$ ou $\chi_A^{-1}(F) = \complement^A$, par suite dans tous les cas $\chi_A^{-1}(F)$ est un fermé, ce qui montre que χ_A est continue.

Réciproquement supposons que χ_A est continue et montrons que A est ouverte et fermée. Soit F un fermé de $\mathbb{R}$, alors nous avons bien $\chi_A^{-1}(F)=\varnothing$ ou $\chi_A^{-1}(F)=E$ ou $\chi_A^{-1}(F)=A$ ou $\chi_A^{-1}(F)=\complement^A$ et puisque χ_A est continue nous devons avoir donc $\chi_A^{-1}(F)=A$ et $\chi_A^{-1}(F)=\complement^A$ sont des fermés ce qui montre que A et $\complement^A$ sont fermées.

Exercice 3.27 *Soient E et F deux e.t et $f: E \to F$ une application, montrer l'équivalence des propriétés suivantes :*

1. *f est continue sur E.*
2. *Pour toute partie B de F on a : $f^{-1}(\overset{\circ}{B}) \subseteq \overset{\circ}{\widehat{f^{-1}(B)}}$.*
3. *Pour toute partie B de F on a : $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$.*

Solution : Montrons que $1 \Rightarrow 2$. Nous avons $\overset{\circ}{B} \subset B$ par suite $f^{-1}(\overset{\circ}{B}) \subset f^{-1}(B)$, en tenant compte de la continuité de f passons à l'intérieur nous obtenons le résultat. Montrons que $2 \Rightarrow 3$. Nous avons $f^{-1}(\overset{\circ}{B}) \subseteq \overset{\circ}{\widehat{f^{-1}(B)}}$, passons maintenant au complémentaire nous obtenons donc $\complement^{\overset{\circ}{\widehat{f^{-1}(B)}}} \subset \complement^{f^{-1}(\overset{\circ}{B})}$, par suite on a : $\overline{\complement^{f^{-1}(B)}} \subset f^{-1}(\complement^{\overset{\circ}{B}})$ ce qui donne $\overline{f^{-1}(\complement^B)} \subset f^{-1}(\overline{\complement^B})$. Posons $B' = \complement^B$ nous arrivons à $\overline{f^{-1}(B')} \subset f^{-1}(\overline{B'})$. Montrons que $3 \Rightarrow 1$. Soit w un fermé de F, montrons que $f^{-1}(w)$ est un fermé de E. On a : $\overline{f^{-1}(w)} \subset f^{-1}(w = \overline{w})$ donc $f^{-1}(w) = \overline{f^{-1}(w)}$ d'où f est continue.

Exercice 3.28 *Soient E et F deux e.t, F est separé, f et g deux applications continues de E dans F.*

1. *Montrer que $G = \{x \in E; f(x) = g(x)\}$ est fermé.*
2. *Déduire que s'il existe $A \subset E$ tq : $\overline{A} = E$ et $\forall x \in A$ on a : $f(x) = g(x)$ alors $f = g$.*

Solution :

1. Posons $h = f - g$. Comme f et g sont continues alors h est continue et on a : $G = h^{-1}(\{0\})$ qui est un fermé car $\{0\}$ est une partie fermée (F est séparé).
2. Nous avons $\forall x \in A$, $f(x) = g(x)$, ceci montre que $A \subset G$ et par suite on a : $\overline{A} \subset \overline{G}$ càd $E \subset G$ doù le résultat.

Exercice 3.29 *Soient E un e.t, A et B deux parties de E.*

1. *Montrer que A est ouverte(resp fermée) dans E ssi pour tout ouvert(resp fermé) de A est ouvert(resp fermé) dans E.*
2. *Montrer que si $A \subset B$ alors*

(a) $\overline{A}^B = \overline{A} \cap B$.

(b) $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{A}^B$.

(c) $Fr(A)^B \subset Fr(A)$.

Solution :

1. Supposons que tout ouvert dans A est ouvert dans E. En particulier A est ouverte dans lui même par suite A est ouverte dans E. Inversement supposons que A est ouverte dans E, montrons que tout ouvert dans A est ouvert dans E. O est ouvert dans A veut dire qu'il existe O_1 ouvert dans E tq : $O = O_1 \cap A$ qui est un ouvert dans E. Même preuve pour les fermés.
   (a) On sait que $\overline{A}^B = \cap F$, F fermé contenant A, mais ces fermés sont des fermés de B càd $F = F' \cap B$ où F' sont des fermés de E. Par suite $\overline{A}^B = (\cap F') \cap B$ et $A \subset F' \cap B \subset F'$ càd $\overline{A}^B = \overline{A} \cap B$.
   (b) On sait que $\overset{\circ}{A}^B$ est le plus grand ouvert de B contenu dans A et comme $\overset{\circ}{A}$ est un ouvert de B contenu dans A alors $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{A}^B$.
   (c) Nous avons $Fr(A)^B = \overline{A}^B \cap \overline{\complement_B^A}^B = \overline{A} \cap B \cap \overline{\complement_B^A}$ or $\complement_B^A \subset \complement_E^A$ donc $Fr(A)^B \subset \overline{A} \cap \overline{\complement_E^A} \cap B$ par suite $Fr(A)^B \subset Fr(A)$.

Exercice 3.30 *Soient E un ensemble infini, $\mathcal{O}$ la famille de parties de E formée par la partie vide $\varnothing$ et par toute les parties A de E dont le complémentaire $\complement^A$ est une partie finie ou dénombrable.*

1. *Montrer qu'il existe une topologie sur E pour laquelle $\mathcal{O}$ est la famille des ouverts. Dans ce qui suit, E est muni de cette topologie.*
2. *Montrer que dans E, une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente si et seulement si elle est stationnaire.*
3. *Montrer que l'application identique de $\mathbb{R}$ muni de la topologie définie à la question 1 vers $\mathbb{R}$ muni de la sa topologie usuelle n'est continue en aucun point.*
4. *Soit $f : X \to Y$ une application d'un espace topologique X dans un autre espace topologique Y. On dit que f est séquentiellement continue en un point $a \in X$ si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans X converge vers a, la suite $f(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(a)$. Montrer que si f est continue en a, elle est séquentiellement continue en a.*

Solution :

1. Par définition, $\varnothing \in \mathcal{O}$. Comme le complémentaire de E est $\varnothing$ qui est fini, $E \in \mathcal{O}$. Soient U_1, U_2, U_i avec $i \in I$ ensemble d'indices non vides des éléments de $\mathcal{O}$. On voit que $(U_1 \cap U_2)^c = U_1^c \cup U_2^c$ est fini ou dénombrable, puisque c'est la réunion de deux ensembles finis ou dénombrables, donc $(U_1 \cap U_2) \in \mathcal{O}$. De même $(\cup U_i)^c = \cap U_i^c$ est fini ou dénombrable puisqu'il est contenu dans l'un qlq des U_i^c, lui même est fini ou dénombrable. Donc $\cup U_i \in \mathcal{O}$. La famille $\mathcal{O}$ qui vérifie les axiomes des ouverts est bien la famille des ouverts d'une topologie.
2. Si la suite (x_n) est stationnaire, elle est évidement convergente. Réciproquement supposons que cette suite converge et soit l sa limite, considérons l'ensemble $A = \{x_n, n \in \mathbb{N}, x_n \neq l\}$, on a : A est fini ou dénombrable et ne contient pas l, son complémentaire A^c est donc un voisinage ouvert de l. Comme la suite (x_n) converge vers l, il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}$; tq $\forall n \geq n_0$, $x_n \in A^c$, cela implique que $x_n = l$, car dans le cas contraire x_n serait élément de A. La suite considérée est donc stationnaire.
3. Soit $I : (\mathbb{R}, \mathcal{O}) \to (\mathbb{R}, \text{usuelle})$, tq :$x \mapsto I(x) = x$. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$, l'interval $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ est un voisinage de x pour la topologie usuelle, et $I^{-1}(]x-\varepsilon, x+\varepsilon[) =]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$, or $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ n'est pas un voisinage de x pour la topologie définie à la question 1, car son complémentaire est non dénombrable, donc I n'est pas continue en x.
4. f continue en a, implique que pour tout $v \in V(f(a))$, alors $f^{-1}(v) \in V(a)$. $x_n \to a$; $\forall u \in V(a), \exists n_0 \in \mathbb{N}$ donc pour tout $n \geq n_0$ on a : $x_n \in u$; en particulier $f^{-1}(v) \in V(a)$, par suite il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, pour tout $n \geq n_0$, nous avons $x_n \in f^{-1}(v)$ ce qui donne $f(x_n) \in f(f^{-1}(v)) \subset v$, ce qui montre que $f(x_n) \in v$ et donc $f(x_n) \to f(a)$.

Chapitre 4

Espaces topologiques compacts, Connexes

4.1 Espaces compacts

4.1.1 Définitions et propriétés

Définition 4.1 Soit E un e.t.

1. On dit qu'une famille $(A_i)_{i\in I}$ de parties de E est un recouvrement de E si $E = \cup A_i$, $i \in I$.
2. Un sous recouvrement du recouvrement $(A_i)_{i\in I}$ est un recouvrement formé de parties de la famille $(A_i)_{i\in I}$.
3. On dit que le recouvrement $(A_i)_{i\in I}$ est ouvert si pour tout $i \in I$, A_i est un ouvert de E.
4. On dit qu'un recouvrement $(A_i)_{i\in I}$ de E est fini si I est fini.

Définition 4.2 Un e.t E est dit compact si :

1. E est séparé,
2. De tout recouvrement ouvert de E, on peut extraire un sous recouvrement fini.

Remarque 4.3 Une partie A de E est dite compact, si elle est compact pour la topologie induite.
On dit qu'une partie A de E est relativement compact si $\overline{A}$ est compact.

Théorème 4.4 *Un e.t séparé E, est compact ssi pour tout ensemble de partie fermée de E dont l'intersection est vide, il existe un nombre fini de ces parties dont l'intersection est vide.*

Preuve. Soit (F_i) une famille de parties fermées de E, tq :$\cap F_i = \varnothing$, alors $\complement_E^{F_i}$, $i \in I$ est un recouvrement ouvert de E. Comme E est compact, il existe donc J fini de façon que $E = \cup \complement_E^{F_i}$, $i \in J$, par suite $\cap F_i = \varnothing$, $i \in J$.

Corollaire 4.5 *Pour qu'un e.t E séparé soit compact, il faut et il suffit que pour tout ensemble de parties fermées de E dont toutes les intersections finies sont non vides, l'intersection de ses parties fermées est non vide.*

Remarque 4.6

1. Si E est un e.t compact, alors pour toute suite croissante (O_n) d'ouvert de E dont la reunion est égale à E, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, de façon que $O_{n_0} = E$.
2. Si E est un e.t compact, alors pour toute suite décroissante $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fermées de E, dont l'intersection est vide, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, de sorte que $F_{n_0} = \varnothing$.

Théorème 4.7 *Soient E un e.t séparé et $F \subset E$.*

1. *Si F est compact, alors F est fermé dans E.*
2. *Si E est compact et F fermé, alors F est compact.*

Preuve.

1. Supposons que F est compact, nous allons montrer que F est fermé dans E,càd que $\complement^F$ est un ouvert ou encore c'est un voisinage de chacun de ses points. Soit $x \in \complement^F$, alors pour tout $y \in F$ on a : $y \neq x$, puisque E est séparé, alors il existe $v_y \in \mathcal{V}(x)$ et $w_y \in \mathcal{V}(y)$, ouverts, de sorte que, $v_y \cap w_y = \varnothing$. On a donc : $F \subset \cup w_y$, $y \in F$, comme F est compact, il existe $y_1, y_2, ..., y_n \in F$, tel que $F \subset w_{y_1} \cup w_{y_2} \cup w_{y_3} \cup ... \cup w_{y_n}$. Posons $v = v_{y_1} \cap v_{y_2} \cap v_{y_3} \cap ... \cap v_{y_n}$. Alors v est un ouvert, avec $v \in \mathcal{V}(x)$, d'autre part on a : $v \cap (w_{y_1} \cup w_{y_2} \cup w_{y_3} \cup ... \cup w_{y_n}) = \varnothing$, ce qui montre que $v \cap F = \varnothing$ et par suite $v \subset \complement_E^F$, par conséquent F est un fermé.

2. Soit (A_i) une famille de fermées de F tq : $\cap A_i = \varnothing$, $i \in I$. Comme F est fermé dans E, alors la famille (A_i) est fermé dans E avec $\cap A_i = \varnothing$ or E est compact donc il existe $J \subset I$, fini de façon que :$\cap A_i = \varnothing$ et $i \in J$.

Corollaire 4.8 *Dans un e.m E, tout compact est fermé et borné. La réciproque est vraie si les boules fermées sont compactes.*

Preuve. Soit K un compact de E, puisque E est séparé (e.m), alors K est fermé. D'autre part on a :pour tout $a \in E$:$E = \cup B(a,n)$ où $n \in \mathbb{N}^*$, par suite $K = \cup(K \cap B(a,n))$, $n \in \mathbb{N}$. Comme K est compact il existe donc

$n_0 \in \mathbb{N}$ tq : $K = K \cap B(a, n_0)$ donc $K \subset B(a, n_0)$.
Réciproquement, supposons que K est une partie fermée bornée, alors K est contenue dans une boule fermée (compacte), donc K est une partie fermé dans un compact, par suite K est compact.

4.1.2 Fonctions continues sur des compacts

Théorème 4.9 *Soient E un espace compact, F un espace séparé et $f : E \to F$ une application continue, alors $f(E)$ est compact.*

Preuve. On a $f(E)$ est séparé car F est séparé. Soit $(O_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts de F tq :$f(E) \subset \cup O_i$; $i \in I$, alors $E = \cup f^{-1}(O_i)$, $i \in I$, comme f est continue, alors $f^{-1}(O_i)$ est un ouvert de E, donc $f^{-1}(O_i)$ est un recouvrement de E, or E est un compact par suite il existe $J \subset I$, J fini de façon que $f(E) \subset \cup O_i$ où $i \in J$ ce qui montre que $f(E)$ est compact.

Corollaire 4.10
1. *Toute application f continue sur un espace compact E à valeurs dans un e.m est borné.*
2. *Toute bijection continue f d'un compact E sur un e.séparé F est un homéomorphisme.*
3. *Toute application continue f sur un espace compact à valeurs dans $\mathbb{R}$ est borné et atteint ses bornes.*
4. *Soit $(E_i)_{i\in I}$ une famille d'e.t. Si $\prod_{i\in I} E_i$ est compact et si E_i est non vide pour tout $i \in I$, alors E_i est compact.*

Preuve.

1. Comme E est compact, alors $f(E)$ est compact et un compact dans un e.m est donc fermé et borné.
2. Il suffit de montrer que f^{-1} est continue. $f : E \to F$ donc $f^{-1} : F \to E$. Soit A une partie fermé de E, alors A est compact dans E et puisque f est continue, alors $f(A)$ est compact , ce qui implique que $f(A)$ est fermé dans F, or $f(A) = (f^{-1})^{-1}(A)$ donc f^{-1} est continue.
3. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une application continue, puisque E est compact, alors $f(E)$ est compact dans $\mathbb{R}$ e.m, alors $f(E)$ est fermé et borné, d'autre part
$$\sup_{x\in E} f(x), \inf_{x\in E} f(x) \in \overline{f(E)} = f(E).$$
4. Comme $\prod_{i\in I} E_i$ est séparé et que E_i est non vide, alors E_i est séparé, pour tout $i \in I$. D'autre part pour tout $i \in I$, on a : $pr_i : \prod_{i\in I} E_i \to E_i$ est continue, surjective donc $pr_i(\prod_{i\in I} E_i) = E_i$. est compact.

4.1.3 Théorème de Bolzano-Weierstrass

Définition 4.11 Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'un e.t E. On dit qu'un point $a \in E$ est adhérent à la suite (x_n) (ou que a est une valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, si pour tout voisinage v de a, l'ensemble des entiers n tq : $x_n \in V$ est infini, ou encore :
$(\forall v \in \mathbb{V}(a))\,, \forall k \in \mathbb{N}, \exists n_k \geq k$ tq : $x_{n_k} \in v$.

Remarque 4.12 Soit $A_k = \{x_n, n \geq k\}$, alors l'ensemble des points adhérent à $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est $\cap\overline{A_k}$

Théorème 4.13 *Soit E un e.t métrisable, alors a est un point adhérent à la suite (x_n) de E ssi il existe une suite extraite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers a.*

Preuve. $\Leftarrow$, Vraie dans un e.t qlq, car $\lim\limits_{k\to+\infty} x_{n_k} = a$, alors $\forall v \in \mathbb{V}(a)$, $\exists k_0 \in \mathbb{N}$, $\forall k \geq k_0, x_{n_k} \in v$.
$\Rightarrow$ Puisque a est adhérent à la suite (x_n), alors $(\forall v \in \mathbb{V}(a))$, $\{n \in \mathbb{N}, x_n \in v\}$ est infini. Soit $v = B(a, 1)$, alors il existe un entier n_0 tq : $x_{n_0} \in B(a, 1)$, de même pour $v = B(a, \frac{1}{2})$, il existe $n_1 > n_0$ tq : $x_{n_1} \in B(a, \frac{1}{2})$, ainsi on construit une suite extraite $(x_{n_k}$ telleque $d(x_{n_k}, a) < \frac{1}{k+1})$, donc la suite (x_{n_k}) converge vers a.

Théorème 4.14 *(**Bolzano-weierstrass**) Soit E un espace métrisable, alors E est compact ssi toute suite (x_n) d'éléments de E, admet une valeur d'adhérence.*

Preuve. Soient E un compact et (x_n) une suite de E, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\overline{A_K}$ est un fermé non vide de E. Donc $(\overline{A_k})_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de fermés non vide de E, par conséquent $\cap\overline{A_k} \neq \varnothing$ (car E est compact), ce qui montre que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet un point adhérent.
Pour la réciproque, on a besoin des deux lemmes suivants :

Lemme 4.15 *Soit E un espace métrisable telque, toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E admette un point d'adhérent, alors pour tout $r > 0$, E peut être recouvert par un nombre fini de boules ouvertes de rayon r.*

Preuve. Supposons qu'il existe $r > 0$, de façon que E ne peut être recouvert par un nombre fini de boules ouvertes de rayon r. Soit $\exists a_0 \in E$, de sorte que $E \not\subset B(a_0, r)$, il existe $a_1 \in E$, tq : $d(a_0, a_1) \geq r$, de même $E \not\subset B(a_0, r) \cup B(a_1, r)$, il existe $a_2 \in E$ de façon que $d(a_0, a_2) \geq r$ et $d(a_1, a_2) \geq r$. Ainsi on construit une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'élément de E de sorte que $d(a_n, a_m) \geq r$. Dans cette situation la suite (a_n) n'admet pas de valeurs d'adhérence, en effet : si

a est une valeur d'adhérence de (a_n), soit $v = B(a, \frac{r}{2})$, donc $I = \{n \in \mathbb{N}, a_n \in B(a, \frac{r}{2})\}$ est infini. Soient $n, m \in I$, donc $d(a, a_n) < \frac{r}{2}$ et $d(a, a_m) < \frac{r}{2}$, par suite on a : $d(a_n, a_m) < r$ ce qui contredit nos données, d'où le résultat.

Lemme 4.16 *Sous les hypothèses du lemme ci-dessus, pour tout recouvrement ouvert $(O_i)_{i\in I}$ de E, il existe $\epsilon > 0$ de sorte que pour tout $x \in E$, il existe $i_x \in I$, $B(x, \epsilon) \subset O_{i_x}$.*

Preuve. Raisonnons à nouveau par l'absurde et supposons que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $x_\epsilon \in E$ tel que $B(x_\epsilon, \epsilon)$ n'est incluse dans aucun des O_i où $i \in I$. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut trouver x_n tel que $B(x_n, \frac{1}{n})$ n'est incluse dans aucun des O_i, cette suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ doit posséder, par hypothèse, une sous suite convergente soit $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$. Notons $x \in E$ sa limite. (x est donc aussi valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Mais comme $(O_i)_{i\in I}$ est un recouvrement ouvert de E., il existe $i_0 \in I$ tel que $x \in O_{i_0}$, l'ouvert O_{i_0} est donc un voisinage de x, il existe donc $\epsilon > 0$ de sorte que $B(x, \epsilon) \subset O_{i_0}$. Puisque x est une valeur d'adhérence de (x_n), alors $\{n \in \mathbb{N}, x_n \in B(x, \frac{\epsilon}{2})\}$ est infini, donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tq $x_{n_0} \in B(x, \frac{\epsilon}{2})$ et $\frac{1}{n_0} < \frac{\epsilon}{2}$, alors $B(x_{n_0}, \frac{1}{n_0}) \subset B(x, \epsilon)$ car si $d(t, x_{n_0}) < \frac{1}{n_0}$, alors $d(t, x) \leq d(t, x_{n_0}) + d(x_{n_0}, x) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$ d'où $B(x_{n_0}, \frac{1}{n_0}) \subset B(a, \epsilon) \subset O_{i_0}$, ce qui est absurde.
Preuve du théorème.
Démontrons enfin le théorème de Bolzano-Weierstrass. Choisissons un recouvrement $(O_i)_{i\in I}$ de E. On sait d'après le second lemme, qu'il existe un réel $r > 0$ tel que pour tout $x \in E$, $B(x, r)$ soit incluse dans l'un des O_i. Le premier lemme appliqué à r trouvé dans le second lemme, nous permet d'affirmer l'existence d'une famille $(x_k)_{k=1,\ldots,n}$ de points de E tels que $B(x_k, r)_{k=1,\ldots,n}$ recouvre E. Mais pour tout $k = 1....n$, il existe $i_k \in I$ tel que $B(x_k, r) \subset O_{i_k}$. la famille $(O_{i_k})_{k=1....n}$ recouvre alors E, on a bien extrait un recouvrement fini, ce qui montre que E est compact.

Corollaire 4.17 *Les compacts de $\mathbb{R}^n$ ou ($\mathbb{C}^n$) sont les fermés bornés.*

Preuve.
$\Rightarrow$: $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$ sont des e.m, donc tout compact de $\mathbb{R}^n$ ou ($\mathbb{C}^n$) est fermé et borné.
Avant de montrer la réciproque, nous allons montrer que pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $[a, b]$ est un compact de $\mathbb{R}$. Nous avons $[a, b]$ est fermé et borné de $\mathbb{R}$, soit O_i une famille d'ouverts de $\mathbb{R}$ dont la réunion contient $[a, b]$.Il existe un élément j_a de I tel que $a \in O_{j_a}$. Si $a = b$, alors $[a, b] = \{a\}$ c'est terminé. Supposons maintenant que $a < b$, Soit

$$A = \{x \in [a, b]; [a, x] \text{ soit recouvert par un nombre fini de } O_i\}.$$

L'ensemble A est non vide car $a \in A$ et $A \subset [a,b]$, donc il est majoré, soit c sa borne supérieure. On a : $a \leq c \leq b$. Il existe $j \in I$ tel que $c \in O_j$ et puisque O_j est ouvert dans $\mathbb{R}$, il existe $\epsilon > 0$ de façon que $[c-\epsilon, c+\epsilon] \subset O_j$ et puisque c est la borne supérieure de A, il existe $x_\epsilon \in A$ tel que $c - \epsilon < x_\epsilon \leq c$. Alors $[a, x_\epsilon]$ est recouvert par un nombre fini de O_i et $[x_\epsilon, c+\epsilon] \subset O_j$ donc $[a, c+\epsilon]$ est recouvert par un nombre fini de O_i. Si $c < b$, on voit, en diminuant au besoin ϵ de façon que $c + \epsilon \in [a,b]$ ce qui montre que $c + \epsilon \in A$, ce qui contredit le fait que c est la borne supérieur de A. Donc $c = b$ et $[a,b]$ est recouvert par un nombre fini de O_i. Comme par ailleurs $[a,b]$ est séparé alors $[a,b]$ est compact.
N.B : L'ensemble $I = [a,b] \times [c,d]$ est compact, en effet : soit $z_n = (x_n, y_n)$ une suite d'éléments de I, alors ils existent $x_{\varphi(n)} \to l \in [a,b]$ et $y_{\psi(n)} \to l' \in [c,d]$, par suite $x_{(\psi\circ\varphi)(n)} \to l$ et $y_{(\psi\circ\varphi)(n)} \to l'$ càd la suite (z_n) admet une sous suite $z_{(\psi\circ\varphi)(n)} \to (l, l') \in I$.

$\Leftarrow$: Soit K une partie de $\mathbb{R}^n$ supposée fermée bornée, alors il existe $a \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$, tq : $K \subset B'(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n, \max|x_i - a_i| \leq r\} = \prod_{i=1}^{i=n}[a_i - r, a_i + r]$. Pour tout $i \in \{1, 2, ..., n\}$, $[a_i - r, a_i + r]$ est un compact de $\mathbb{R}$ donc $\prod_{i=1}^{i=n}[a_i - r, a_i + r]$ est compact, d'où K est un fermé dans un compact donc K est compact.

Théorème 4.18 *Soient E un compact et (x_n) une suite d'éléments de E, alors (x_n) converge vers $a \in E$ ssi a est le seul point adhérent à la suite (x_n).*

Preuve. $\Rightarrow$ Puisque (x_n) converge vers a, alors a est adhérent à la suite (x_n). Soit $b \in E$ tel que $b \neq a$, il existe $u \in V(a)$ et $v \in V(b)$ tq $u \cap v = \varnothing$. Puisque (x_n) converge vers a, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tq pour $n \geq n_0$ on a :$x_n \in u$, donc pour $n \geq n_0$ on a $x_n \notin v$ et par suite b n'est pas adhérent à la suite (x_n) càd a est le seul point adhérent à la suite (x_n).
$\Leftarrow$ Supposons que a est le seul point adhérent à la suite (x_n), alors $\{a\} = \cap\overline{A_k}$, soit $v \in V(a)$, alors il existe O ouvert telque $a \in O \subset v$. Posons $K = \complement^O$, alors K est compact (un fermé dans un compact E) et $a \notin K$, donc $\cap\overline{A_k} \cap K = \varnothing$ càd $\cap(\overline{A_k} \cap K) = \varnothing$, ce qui montre que la suite $(\overline{A_k} \cap K)$ est une suite décroissante de fermés de K (compact) d'intersection vide , par conséquent il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ de sorte que $\overline{A_{k_0}} \cap K = \varnothing$, d'où $A_{k_0} = \{x_n; n \geq k_0\} \subset \overline{A_{k_0}} \subset O \subset V$. En définitive : il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tq pour $n \geq k_0$ on a : $x_n \in v$, ce qui prouve que x_n converge vers a.

4.2 Espaces métriques et compacité

4.2.1 Espaces métriques complets

Définition 4.19 Soient (E, d) un e.m et (x_n) une suite de points de E. On dit que (x_n) est de Cauchy dans E si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tq : pour tout $n, p \geq n_0$, $d(x_n, x_p) < \epsilon$.

Remarque 4.20

1. Toute suite extraite d'une suite de Cauchy est de Cauchy.
2. Toute suite convergente est de Cauchy.
3. Toute suite de Cauchy est bornée.

Définition 4.21 On dit qu'un e.m.E est complet si toute suite de Cauchy est convergente.
On dit qu'une partie F de E est complet si F est complet en tant qu'espace métrique muni de la distance induite.

Propriété 4.22 *Dans un e.m (E, d), si une suite de Cauchy possède une valeur d'adhérence a, alors elle converge vers a.*

Preuve. Soit $\epsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall m, n \geq n_0$, $d(x_m, x_n) < \frac{\epsilon}{2}$. Puisque a est un point adhérent (x_n), il existe $m \geq n_0$ tq $d(x_m, a) < \frac{\epsilon}{2}$, par suite pour $n \geq n_0$, $d(x_n, a) \leq d(x_n, x_m) + d(x_m, a) < \epsilon$, d'où le résultat.

Théorème 4.23 *Soit E un e.m et $F \subset E$.*

1. *Si F est complet, alors F est fermé.*
2. *Si E est complet et F est fermé, alors F est complet*

Preuve.1 : Soit $a \in \overline{F}$, alors il existe une suite (x_n) de point de F qui converge vers a, par suite (x_n) est une suite de Cauchy dans F qui est complet et par conséquent, il existe $b \in F$ tq : $x_n \to b$ et puisque E est séparé (e.m) alors $a = b$.
2 : Supposons que E est complet et F fermé. Soit (x_n) une suite de Cauchy dans F donc (x_n) est aussi une suite de Cauchy dans E qui est complet donc la suite (x_n) converge vers un point $a \in \overline{F} = F$.

Définition 4.24 Soient (E, d), (F, δ) des e.m et $f : E \to F$, une application. On dit que f est uniformément continue sur E, si $\forall \epsilon > 0$, $\exists \eta > 0$ tq : $\forall x, y \in E$, $d(x, y) < \eta \Rightarrow \delta(f(x), f(y)) < \epsilon$.

Théorème 4.25 *(Théorème de Heine) Soit $f : (E, d) \to (F, \delta)$, une application continue. Si E est compact alors f est uniformément continue sur E.*

Preuve. Soient $\epsilon > 0$ et $x \in E$, il existe donc $\eta_x > 0$ tq : $d(x, y) < \eta_x \Rightarrow \delta(f(x), f(y)) < \epsilon$, d'autre part on a : $B(x, \frac{\eta_x}{2})_{x \in E}$ est un recouvrement ouvert de E. Puisque E est compact, alors il existe $x_1, x_2, x_3, ..., x_n \in E$ tq : $E = \cup B(x_i, \frac{\eta_{x_i}}{2})$, $i \in \{1, 2, 3..., n\}$. Posons $\eta = \inf(\frac{\eta_{x_i}}{2})$. Maintenant soient $x, y \in E$ tq : $d(x, y) < \eta$, il existe $i_0 \in \{1, 2, ..., n\}$ tq $x \in B(x_{i_0}, \frac{\eta_{x_{i_0}}}{2})$, d'autre part on a : $d(y, x_{i_0}) \leq d(y, x) + d(x, x_{i_0}) < \eta + \frac{\eta_{x_{i_0}}}{2}$, par suite $d(y, x_{i_0}) < \eta_{x_{i_0}}$, donc $\delta(f(y), f(x_{i_0}) < \epsilon$, or $\delta(f(y), f(x)) \leq \delta(f(y), f(x_{i_0})) + \delta(f(x_{i_0}), f(x)) < 2\epsilon$, par conséquent, nous avons :

$$\forall x, y \in E, d(x, y) < \eta \Rightarrow \delta(f(x), f(y)) < 2\epsilon,$$

d'où la continuité uniforme.

Proposition 4.26 *Soient E et F deux e.m et $f : E \to F$ une application uniformément continue. Si (x_n) est une suite de Cauchy dans E, alors $(f(x_n))$ est une suite de Cauchy dans F.*

Théorème 4.27 *Soient E, F deux e.m, E_1 un sous espace dense dans E et $f_1 : E_1 \to F$. Si F est complet et f_1 est uniformément continue sur E_1, alors il existe une application unique $f : E \to F$ uniformément continue et $f/E_1 = f_1$.*

Preuve.(voir TD)

Définition 4.28 Soient E un e.m et $f : E \to E$ une application. On dit que f est une contraction s'il existe k, $0 < k < 1$, tellque, pour tout $x, y \in E$, on ait, $d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y)$.

Théorème 4.29 *Soit E un e.m complet, alors toute contraction $f : E \to E$ admet un point fixe et un seule.*

Preuve.(Voir TD).

4.3 Connexes

4.3.1 Définition et propriétés immèdiates

Définition 4.30 Soit E un e.t. On dit que E est connexe s'il vérifie l'une des propriétés équivalente suivantes :

1. Les seuls parties de E à la fois ouvert et fermées sont E et $\varnothing$.
2. Il n'existe pas de partition de E en deux parties ouverts non vides.
3. Il n'existe pas de partition de E en deux parties fermées non vides

Théorème 4.31 *Soit E un e.t. E est connexe ssi toute application continue de E dans l'espace discrèt $\{0,1\}$ est constante.*

Preuve. $\Rightarrow$ Supposons que E est connexe et $f : E \to F = \{0,1\}$ une application continue, montrons que f est constante. $f^{-1}(\{0\})$ est une partie de E qui est à la fois ouverte et fermée (car $\{0\}$ partie fermée et ouvert de l'espace discrèt $\{0,1\}$). Comme E est connexe, alors $f^{-1}(\{0\}) = E$ ou $f^{-1}(\{0\}) = \varnothing$. Supposons que $f^{-1}(\{0\}) = \varnothing$, alors $f(x) = 1$, pour tout $x \in E$, par suite f est constante. De même si $f^{-1}(\{0\}) = E$, alors $f(x) = 0$, pour tout $x \in E$.
$\Leftarrow$: Supposons que E n'est pas connexes alors il existe deux parties ouvertes A et B de E tq : $A \cap B = \varnothing$ et $A \cup B = E$. Soit $f : E \to \{0,1\}$, définie par : $f(x) = 1$ si $x \in A$ $f(x) = 0$ si $x \in B$. $A \neq \varnothing$ et $A \neq E$ de même pour B. En conclusion f est continue (car l'image réciproque de tout ouvert de $\{0,1\}$ par f est un ouvert de E) et f non constante.

Théorème 4.32 *Soit A une partie connexe d'un e.t E, alors pour toute partie B tq : $A \subset B \subset \overline{A}$, B est connexe (en particulier $\overline{A}$ est connexe).*

Remarque 4.33 Une partie A d'un e.t. E est connexe, si le sous-espace A est connexe pour la topologie induite.

Preuve du Théorème. Soit $f : B \to \{0,1\}$ une application continue, alors $f/A : A \to \{0,1\}$ est continue. Puisque A est connexe, alors $f/A = cts$. Supposons que $f(x) = 0$, pour tout $x \in A$, par suite nous avons :

$$A \subset G = \{x \in E; f(x) = 0\} = f^{-1}\{0\}$$

qui est un fermé, alors $A \subset G$ et donc on a $\overline{A} \subset \overline{G} = G$, ce qui montre que pour tout $x \in \overline{A}$ on a $f(x) = 0$, en particulier $f(x) = 0$, pour tout $x \in B$.

Théorème 4.34 *Soient E et F deux e.t et $f : E \to F$ une application continue. Si E est connexe, alors $f(E)$ est connexe.*

Preuve. Soit $g : f(E) \to \{0,1\}$ une application continue, alors $g \circ f : E \to \{0,1\}$ est continue. Puisque E est connexe, alors $g \circ f$ est constante. Il y a donc deux cas, soit f est constante par suite g est constante, soit f n'est pas constante, or comme $g \circ f$ est constante, alors g est constante. En conclusion dans les deux cas on a : g est constante et par suite $f(E)$ est connexe.

Corollaire 4.35 *Si E et F sont deux e.t homéomorphes, alors si l'une est connexe l'autre l'est aussi.*

Théorème 4.36 *Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties connexes d'un e.t E s'il existe $i_0 \in I$ tq pour tout $i \in I$, $A_{i_0} \cap A_i \neq \varnothing$, $A = \cup A_i$ est connexe.*

Preuve. Soit $f : A \to \{0, 1\}$ une application continue, alors pour tout $i \in I$, on a : $f/A_i : A_i \to \{0, 1\}$ est continue, donc pour tout $i \in I$, il existe $c_i \in \{0, 1\}$ tq $f/A_i = c_i$, d'autre part on a : $A_i \cap A_{i_0} \neq \varnothing$, pour tout $i \in I$, ce qui montre que $f/A_i = f/A_{i_0}$, $\forall i \in I$. il en résulte que $f(x) = c_{i_0}$, pour tout $x \in A$. Conclusion f est une constante.

Corollaire 4.37 *Soit $(A_i)_{i\in I}$ famille de parties connexes d'un e.t E tq : $\cap A_i \neq \varnothing$, alors $A = \cup A_i$, $i \in I$ est connexe.*

Produit d'espaces connexes :

Lemme 4.38 *Soient E et F deux espaces topologiques et $b \in F$, alors E et $E \times \{b\}$ sont homéomorphes.*

Preuve. Considérons $i_b : E \to E \times \{b\}$ avec $x \mapsto i_b(x) = (x, b)$. On a i_b est bijective et continue car ses composantes le sont. D'autre part $i_b^{-1} : E \times \{b\} \to E$, alors $i_b^{-1} : E \times \{b\} \to^{\text{injection}} E \times F \to^{\text{projection}} E$, par suite $i_b^{-1} = pr \circ inj$, ce qui montre que i_b^{-1} est continue d'où le résultat.

Théorème 4.39 *Soit $(E_i)_{i\in I}$ une famille d'e.t non vide, alors $E = \prod_{i\in I} E_i$ est connexe si et seulement si chaque facteur E_i est connexe.*

Preuve : Si $E = \prod_{i\in I} E_i$ est connexe, alors $\forall i \in I$, $pr_i(E) = E_i$ est connexe car pr_i est continue surjective. Réciproquement, montrons d'abord qu'un produit fini d'e.t connexes est connexe. Soient E_1, E_2 deux e.t connexes et $f : E_1 \times E_2 \to \{0, 1\}$ continue. Prenons maintenant $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$ deux points qlqs de $E_1 \times E_2$ et $c = (b_1, a_2)$, alors $a, c \in E_1 \times \{a_2\}$ et on a :$E_1 \times \{a_2\}$ est connexe car il est homéomorphe à E_1 et donc $f : E_1 \times \{a_2\} \to \{0, 1\}$ est continue ce qui montre que f est constante sur $E_1 \times \{a_2\}$ et donc $f(a) = f(c)$ de même on a $f(c) = f(b)$ et par suite on a : $f(a) = f(b)$ càd que f est constante, ce qui prouve que $E_1 \times E_2$ est connexe.
Cas gènèral : Soit $(E_i)_{i\in I}$ une famille d'e.t connexes, $E = \prod_{i\in I} E_i$ et $f : E \to \{0, 1\}$ une application continue. Prenons $a, b \in E$, montrons que $f(a) = f(b)$. Supposons que $f(a) = 0$, alors $a \in f^{-1}(\{0\})$, puisque f est continue $f^{-1}(\{0\})$ est un ouvert de E et on a : $a \in f^{-1}(\{0\})$, donc il existe $\prod_{i\in J} O_i \times \prod_{i\notin J} E_i$ (J fini), un ouvert élémentaire de E de façon que

$$a \in \prod_{i\in J} O_i \times \prod_{i\notin J} E_i \subset f^{-1}(\{0\}).$$

Soient $c = ((a_i)_{i\in J}, (b_i)_{i\notin J})$ et $b = ((b_i)_{i\in J}, (b_i)_{i\notin J})$, alors $c \in O = \prod_{i\in J} O_i \times \prod_{i\notin J} E_i$ donc $f(c) = 0 = f(a)$. D'autre part on a : $b, c \in F = \prod_{i\in J} E_i \times \prod_{i\notin J}\{b_i\}$, or $\prod_{i\in J} E_i \times \prod_{i\notin J}\{b_i\}$ est homomorphe à $\prod_{i\in J} E_i$ qui est un connexe (produit fini de connexes), ce qui montre que F est connexe, donc $f : F \to \{0,1\}$ est constante alors $f(c) = f(b) = 0$ d'où $f(a) = f(b)$ et par suite E est connexe.

Théorème 4.40 *Une partie A de $\mathbb{R}$ est connexe ssi A est un intervalle de $\mathbb{R}$.*

Preuve. Supposons que A est connexe, soient a, b deux points de A, tq $a < b$, montrons que A est un intervalle (càd $[a,b] \subset A$). Supposons qu'il existe c tq : $a < c < b$ et $c \notin A$, alors les deux ensembles $]-\infty, c[\cap A$ et $]c, +\infty[\cap A$ forment une partition ouvert de A, ceci contredit le fait que A est connexe.
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ (si I est réduit à un point c'est fini). Supposons que I n'est pas réduit à un point et soit $f : I \to \{0,1\}$ continue, et soient $a, b \in I$; $a < b$ avec $f(a) = 0$. Soient $J = [a,b] \cap f^{-1}(\{0\})$ et $m = \sup J$, alors $m \in J$ car J est un fermé, donc $m \in f^{-1}(\{0\})$. Puisque $f^{-1}(\{0\})$ est un ouvert alors, il existe $\epsilon > 0$ tq : $]m-\epsilon, m+\epsilon[\subset f^{-1}(\{0\})$, si $m < b$, alors il existe x tq ; $m < x < b$ et $m < x < m+\epsilon$, par suite $x \in J$ et $x > m$ ceci contredit le fait que $m = \sup J$, donc $m = b$ ce qui montre que $J = [a,b]$ et par suite on a : $[a,b] \subset f^{-1}(\{0\})$ et donc $f(a) = f(b)$.

Corollaire 4.41 *$\overline{\mathbb{R}}$ est connexe.*

Preuve. $f : \overline{\mathbb{R}} \to [-1,1]$ avec $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$ si $x \in \mathbb{R}$ et $f(-\infty) = -1$, $f(+\infty) = 1$, on a donc f est un homéomorphisme.

4.3.2 Composantes connexes

Définition 4.42 Soit $x \in E$ e.t. On appelle composante connexe de x la réunion des sous ensembles connexes de E contenant x.

Proposition 4.43 *Soit x un élément de E*

1. *la composante connexe de x est le plus grand connexe de E contenant x.*
2. *la composante connexe de x est une partie fermée de E.*

Preuve. 1 évidente, par définition de la composante connexe de x.
2 : Cette partie s'en déduit aussitôt, car rappelons le si un ensemble est connexe il en est de même de son adhérence qui est de plus fermé. Donc si U est le plus grand connexe de E contenant x, il est nécessairement égale à son adhérence qui est aussi connexe qui contient x.

4.3.3 Espaces connexes par arcs

Définition 4.44 On appelle chemin ou arc joinant un point a à un point b d'un e.t.E, toute application continue γ d'un intervalle $[\alpha, \beta]$ de $\mathbb{R}$ dans E tellque $\gamma(\alpha) = a$ et $\gamma(\beta) = b$. On dit que a est l'origine du chemin et b son extrimité.

Définition 4.45 Soit E un e.t. On dit que E est connexe par arcs si deux points qlq de ses points peuvent être joints par un chemin.

Théorème 4.46 *Tout e.t. E connexe par arcs est connexe*

Preuve. Soit $f : E \to \{0, 1\}$ une application continue, soient $a, b \in E$. Puisque E est connexe par arc, alors il existe un chemin $\gamma : [\alpha, \beta] \to E$ tq : $\gamma(\alpha) = a$ et $\gamma(\beta) = b$. Considerons $f \circ \gamma : [\alpha, \beta] \to \{0, 1\}$ cette application est continue donc $f \circ \gamma$ est constante car $[\alpha, \beta]$ est connexe en particulier $(f \circ \gamma)(\alpha) = (f \circ \gamma)(\beta)$, par suite $f(a) = f(b)$. Conclusion f est constante et donc E est connexe.

4.4 Exercices

Exercice 4.47 *Montrer les propriétés suivantes :*

1. *Dans un espace discret une partie est compact ssi elle est finie.*
2. *Dans un e.t separé toute union finie(resp toute intersection) de partie compacts est compact.*
3. *Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments d'un e.t.E separé convergeant vers $a \in E$, alors $A = \{x_n, n \in \mathbb{N}\} \cup \{a\}$ est compact.*
4. *Sachant que E est un espace compact, pour $x \in E$, $E \backslash \{x\}$ est compact ssi x n'est pas un point d'accumulation de E.*

Solution :

1. Soit $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ une partie finie d'un espace discret E. Montrons que A est compact. On a A est séparé car E l'est, d'autre part si $A \subset \cup O_i$, avec $i \in I$ et O_i des ouverts de E, alors pour tout $k \in \{1....n\}$, il existe O_{i_k} tq $a_k \in O_{i_k}$ par suite $A \subset \cup O_{i_k}$ avec $k \in \{1....n\}$, ce qui montre que A est compacte.
   Réciproquement, supposons que A est compacte, montrons qu'elle est finie. Nous avons $A = \cup\{a\}_{a\in A}$, or on sait que les singletons sont des ouverts dans E, donc il existe un nombre fini de ces ouverts qui contiennent A d'où A est finie.
2. Soient A et B deux compacts de E. Montrons que $A \cup B$ est compact. On sait bien que $A \cup B$ est séparé, d'autre part si $A \cup B \subset \cup O_i$, avec $i \in I$, alors $A \subset \cup O_i$ et puisque A est compact, il existe donc $J \subset I$, fini tq : $A \subset \cup O_i$ avec $i \in J$ de même pour B, il existe $K \subset I$ fini tq : $B \subset \cup O_i$ avec $i \in K$. Conclusion $A \cup B \subset \cup O_i$ avec $i \in J \cup K$ qui est fini, ce qui montre que $A \cup B$ est compact. Soit maintenant F_i une famille de compact de E, montrons que $\cap F_i$ est un compact. On sait que F_i est compact dans E, alors F_i est fermé dans E et par suite $\cap F_i$ est un fermé de E, d'autre part, nous avons $\cap F_i \subset F_j$ et puisque F_j est compact alors $\cap F_i$ est compact.
3. Montrons que $A = \{x_n, n \in \mathbb{N}\} \cup \{a\}$ est compact. On a $A \subset E$ donc A est séparé, d'autre part supposons que $A \subset \cup O_i$, avec $i \in I$. Montons qu'il existe $J \subset I$, fini de sorte que $A \subset \cup O_i$, avec $i \in J$. Rappelons que $x_n \to a$ veut dire que pour tout $v \in V(a)$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tq : pour tout $n \geq n_0$ $x_n \in v$. Revenons à notre supposition $A \subset \cup O_i$, avec $i \in I$, donc il existe $j \in I$ tq $a \in O_j$, or O_j est un voisinage de a, il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}$ tq : pour tout $n \geq n_0$ $x_n \in O_j$, pour $n \leq n_0 - 1$ considerons $\{x_0, x_1, ..., x_{n_0-1}\}$, pour tout $0 \leq k \leq n_0 - 1$, il existe $i_k \in I$ tq $x_k \in O_{i_k}$ par suite nous avons $A \subset O_j \cup (\cup O_{i_k})$ d'où le résultat.
4. Supposons que $E\backslash\{x\}$ est compact, montrons que $x \notin E'$ où E' désigne l'ensemble des points d'accumulations de E. Puisque $E\backslash\{x\}$ est compact, alors $E\backslash\{x\}$ est fermé dans E ce qui montre que $\{x\}$ est un ouvert et par suite $\{x\} \in V(x)$, or $(E\backslash\{x\}) \cap \{x\} = \varnothing$ ce qui montre que $x \notin E'$.
   Réciproquement, supposons que $x \notin E'$, alors il existe $v \in V(x)$ tq : $(E\backslash\{x\}) \cap \{x\} = \varnothing$ ce qui montre que $v \subset \{x\}$ d'autre part nous avons $v \in V(x)$, alors il existe O ouvert tq $x \in O \subset v$ ce qui prouve que $\{x\} = O$ et par conséquent $E\backslash\{x\}$ est fermé dans E qui est compact donc $E\backslash\{x\}$ est compact.

Exercice 4.48 *Soient E un e.m et A et B deux parties non vides de E.*

1. *Montrer que si A est compact et B est fermé et $A \cap B = \varnothing$, alors $d(A, B) > 0$.*
2. *Montrer que si A et B sont compacts, alors il existe $a \in A, b \in B$ tq : $d(A, B) = d(a, b)$.*

Solution :

1. Nous avons :

$$d(A, B) = \inf_{a \in A, b \in B} d(a, b) = \inf_{a \in A} d(a, B) = \inf_{b \in B} d(A, b),$$

   et on a : $x \in E \to^{f} d(x, B) \in \mathbb{R}$ est continue, A étant compact donc $f(A)$ est borné et f atteint ses bornes, donc il existe $a_0 \in A$, de sorte que $d(a_0, B) = \inf\limits_{a \in A} d(a, B)$. D'autre part on a : $d(a_0, B) > 0$ car sinon $d(a_0, B) = 0 \Leftrightarrow a_0 \in \overline{B} = B$ ce qui montre que $A \cap B = \varnothing$ ce qui est absurde.

2. D'aprés la première question nous avons montré qu'il existe $a_0 \in A$ de sorte que $d(A, B) = d(a_0, B) = \inf\limits_{b \in B} d(a_0, B)$ et puisque B est compact, alors il existe $b_0 \in B$ vérifiant $d(A, B) = d(a_0, B) = d(a_0, b_0)$.

Exercice 4.49 1. *Montrer que toute application f continue sur un espace compact E à valeurs dans un e.m est bornée.*

2. *Montrer que toute bijection continue f d'un espace compact E à valeurs dans un espace separé F est un homéomorphisme.*
3. *Montrer que toute application continue sur un compact à valeurs dans $\mathbb{R}$ est borné et atteint ses bornes.*

Solution :(Voir cours).

Exercice 4.50 *Soient E un e.m complet, montrer que toute contraction $f : E \to E$ admet un point fixe.*

Solution : Soit $f : E \to E$ de façon que $d(f(x), f(y)) < kd(x, y)$, pour tout $x, y \in E$, $0 < k < 1$.

Montrons l'unicité : Supposons l'existence de deux points a et b tq $a \neq b$, on a : $d(f(a), f(b)) < kd(a, b)$ donc $d(a, b) < kd(a, b)$ ce qui est absurde d'où l'unicité.

Montrons l'existence : Soit x_0 un point de E et $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1)$,..., $x_n = f(x_{n-1})$. Montrons que (x_n) est une suite convergente, puisque E est complet, il suffit de montrer que (x_n) est de Cauchy. Remarquons tout d'abord que $d(x_{n+1}, x_n) \leq k^n d(x_1, x_0)$, maintenant nous avons pour tout $n, p \in \mathbb{N}$,

$$d(x_{n+p}, x_n) \leq d(x_{n+p}, x_{n+p-1}) + d(x_{n+p-1}, x_{n+p-2}) + + + d(x_{n+1}, x_n)$$

par suite nous avons

$$d(x_{n+p}, x_n) \leq (k^{n+p-1} + k^{n+p-2} + + + k^n) d(x_1, x_0).$$

$d(x_{n+p}, x_n) \leq k^n \left(\frac{1-k^p}{1-k}\right) d(x_1, x_0)$. passons à la limite on obtient $\lim_{n\to\infty} d(x_{n+p}, x_n) = 0$, ce qui montre que (x_n) est une suite de Cauchy. Puisque E est complet alors x_n converge vers un élément $a \in E$, d'autre part nous avons $x_n = f(x_{n-1})$, passons à la limite nous obtenons donc $f(a) = a$.

Exercice 4.51 *Soit E un ensemble non vide muni de deux distances d_1 et d_2. On suppose que pour toute suite x_n de E : $x_n \to^{d_1} x \Rightarrow x_n \to^{d_2} x$ et que (E, d_1) est compact.*

1. *Montrer que si F est un fermé dans (E, d_2), alors F est un fermé dans (E, d_1).*
2. *Montrer que (E, d_2) est compact.*
3. *Montrer que si F est un fermé dans (E, d_1), alors F est un fermé dans (E, d_2).*
4. *Déduire que d_1 et d_2 définissent la même topologie sur E.*

Solution

1. Soit $x \in \overline{F_{d_1}}$, alors il existe (x_n) de points de F tq : $x_n \to^{d_1} x$, par suite $x_n \to^{d_2} x$ ceci montre que $x \in \overline{F_{d_2}} = F$ et donc $\overline{F_{d_1}} \subset F$ or $F \subset \overline{F_{d_1}}$, conclusion $F = \overline{F_{d_1}}$ càd F est fermé dans (E, d_1).
2. Montrons que (E, d_2) est compact. Soit (x_n) une suite de points de (E, d_2) donc (x_n) est une suite de points de (E, d_1) qui est compact par suite il existe une sous suite notée $x_{\varphi(n)}$ de points de (E, d_1) tq : $x_{\varphi(n)} \to^{d_1} x$ par suite $x_{\varphi(n)} \to^{d_2} x$ ce qui montre que (E, d_2) est compact.
3. Soit F un fermé dans (E, d_1) qui est compact, alors (F, d_1) est compact et donc de la même façon que 2), on montre que (F, d_2) est compact par suite F est un fermé dans (E, d_2).
4. D'aprés les questions précédentes nous avons montré que F est fermé dans (E, d_1) si et seulement si F est fermé dans (E, d_2) et par passage au complémentaire on obtient donc O est un ouvert pour (E, d_1) si et seulement si O est ouvert pour (E, d_2). Conclusion d_1 et d_2 définissent la même topologie dans E.

Chapitre 5

Espaces vectoriels normés

5.1 Définitions et propriétés élémentaires

Dans toute la suite $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 5.1 Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel. On appelle norme sur E, toute application $x \mapsto ||x||$ de E dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

1. $\forall x \in E, ||x|| \geq 0$ et $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
2. $\forall (x, \lambda) \in E \times \mathbb{K}; ||\lambda x|| = |\lambda| ||x||$.
3. $\forall (x, y) \in E^2; ||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$.

On dit que $(E, ||.||)$ est un espace vectoriel normé.

Remarque 5.2
1. La norme de E définit une distance sur E par : $d(x, y) = ||x - y||$.
2. La topologie de l'e.v.n E est la topologie associe à cette distance.
3. Si E est complet pour cette distance, on dit que E est un espace de Banach.

Propriété 5.3
1. $\forall (x, y) \in E^2; |||x|| - ||y||| \leq ||x - y||$.
2. *L'application $x \to ||x||$ est uniformément continue.*
3. *L'application $(x, y) \mapsto x + y$ est uniformément continue sur E^2 et l'application $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ est continue sur $\mathbb{K} \times E$.*
4. *$\forall a \in E$, l'application $x \mapsto x + a$ est un homéomorphisme de E.*

Preuve.

1. On a : $||x|| \leq ||x - y|| + ||y||$ et $||y|| \leq ||x - y|| + ||x||$, $\forall x, y \in E$, d'où $|||x|| - ||y||| \leq ||x - y||$.

2. D'après 1, on a : $x \mapsto ||x||$ est lipschitizienne.
3. $||x+y-(x'+y')|| \leq ||x-x'|| + ||y-y'||$, pour tout $x, x', y, y' \in E$. Donc $(x, y) \mapsto x+y$ est lipschitizienne.
4. $(\lambda, x) \mapsto \lambda.x$ est continue, en effet :
   $||\lambda x - \lambda_0 x_0|| = ||(\lambda-\lambda_0)(x-x_0) + \lambda_0(x-x_0) + (\lambda-\lambda_0)x_0||$, par suite nous avons, $||\lambda x - \lambda_0 x_0|| \leq |\lambda-\lambda_0|||x-x_0|| + |\lambda_0|||x-x_0|| + |\lambda-\lambda_0|.||x_0||$.
   Pour $x \mapsto x+a$, on a $||x+a-(y+a)|| = ||x-y||$ donc continue de plus l'application réciproque est : $x \mapsto x-a$ qui est continue aussi, d'où $x \mapsto x+a$ est un homéomorphisme.

Exercice 5.4 *1. Montrer que pour $x, y \in E$, $r > 0$ et $\lambda > 0$, on a : $y + \lambda B(x, r) = B(y + \lambda x, \lambda r)$.*

2. Montrer que pour $a \in E$ et $r > 0$, on a : $\overline{B(a, r)} = B'(a, r)$ et $\overset{\circ}{B'}(a, r) = B(a, r)$.

Sous-espaces-Espace produit

Définition 5.5 Soient E un e.v.n et F un sous espace vectoriel de E, alors la restriction de la norme de E à F est une norme sur F, qui induit sur F la distance induite par la distance de E, F est alors un sous espace vectoriel normé de E.

Proposition 5.6 *Soit E un e.v.n et F un sous e.v.n de E, alors $\overline{F}$ est un sous e.v.n de E.*

Preuve. Soient $x, y \in \overline{F}$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, montrons que $\alpha x + \beta y \in \overline{F}$. Puisque $x, y \in \overline{F}$, alors il existe $(x_n), (y_n) \in F$, tq $x_n \to x$ et $y_n \to y$, par suite on a : $\alpha x_n + \beta y_n \to \alpha x + \beta y$, donc $\alpha x + \beta y \in \overline{F}$.

Exemple 5.7 *Soient E, F deux e.v.n et $f : E \to F$ une application linéaire, alors $\ker(f) = f^{-1}(\{0\})$ est un sous espace vectoriel de E et $Im(f)$ est un sous e.v.n de F. De plus si f est continue, alors $\ker(f)$ est fermé.*

5.1.1 Espace produit

Soit $(E_i, ||.||_i)$ une famille d'e.v.n sur le corps $\mathbb{K}$. Le $\mathbb{K}$ e.v produit $E = \prod_{i=1}^{i=n} E_i$ est normé. Les applications suivantes :
$N(x) = \sum_{i=1}^{i=n} ||x_i||$, $N_2(x) = (\sum_{i=1}^{i=n} ||x_i||^2)^{\frac{1}{2}}$ et $N_\infty(x) = \max(||x_i||)_{1 \leq i \leq n}$ sont des normes sur E, les distances qu'elles définissent sur E sont équivalentes et la topologie définie sur E par l'une d'elles est la topologie produit.

5.2 Applications linéaires

Théorème 5.8 *Soient E et F deux e.v.n et $f : E \to F$ une application linéaire, alors les P.S.S.E :*

1. *f est uniformément continue sur E.*
2. *f est continue sur E.*
3. *f est continue au point 0.*
4. *Il existe $k_1 > 0$ tq : $||f(x)|| \leq k_1$ pour tout $x \in E$ vérifiant $||x|| \leq 1$.*
5. *f est borné sur la sphère unité*
6. *Il existe une constante k_2, tq : $\forall x \in E$, $||f(x)|| \leq k_2||x||$.*

Preuve. Les implications $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3$ et $4 \Rightarrow 5$ sont immédiates, montrons que $3 \Rightarrow 4$: Puisque f est continue en 0, alors il existe $r > 0$, $||x|| \leq r \Rightarrow ||f(x)|| \leq 1$. Soit $x \in E$, $||x|| \leq 1 \Rightarrow ||rx|| \leq r$ donc $||f(rx)|| \leq 1$, par suite $||f(x)|| \leq \frac{1}{r}$ ce qui fait $\sup ||f(x)||_{||x|| \leq 1} \leq \frac{1}{r}$ d'où le resultat.
Montrons que $5 \Rightarrow 6$: Supposons qu'il existe $k_2 > 0$ tq : $||f(x)|| \leq k_2$ pour tout $x \in E$, $||x|| = 1$. Soit $x \in E$ avec $x \neq 0$, $||\frac{x}{||x||}|| = 1 \Rightarrow ||f(\frac{x}{||x||})|| \leq k_2 \Rightarrow \frac{1}{||x||}f(x) \leq k_2$, ce qui montre que $||f(x)|| \leq k_2||x||$.
Reste à montrer $6 \Rightarrow 1$: Il existe $k_3 > 0$ de façon que $||f(x)|| \leq k_3||x||$ pour tout $x \in E$. Soient $x, y \in E$ donc $||f(x) - f(y)|| = ||f(x-y)|| \leq k_3||x-y||$, ce qui montre que f est lipsh et par suite f est unft continue.
<u>L'espace $\mathcal{L}(E,F)$</u>

Définition 5.9 Soient E et F deux e.v.n, $\mathcal{L}(E,F) = \{f : E \to F, f$ linéaire continue.
Pour $f \in \mathcal{L}(E,F)$ on pose :
$||f|| = \inf\{k > 0, ||f(x)|| \leq k||x||; x \in E\} = \sup \frac{||f(x)||}{||x||}$, $x \neq 0$.

Proposition 5.10 *L'application $f \mapsto ||f||$ est une norme sur $\mathcal{L}(E,F)$, de plus nous avons :*

$$||f|| = \sup ||f(x)||_{||x||=1} = \sup ||f(x)||_{||x|| \leq 1} = \sup(\frac{||f(x)||}{||x||})_{x \neq 0}.$$

Preuve. Pour $f \mapsto ||f||$ est une norme c'est simple.
On a : $\sup(||f(x)||)_{||x||=1} \leq \sup(||f(x)||)_{||x|| \leq 1}$.
$\sup(||f(x)||)_{||x|| \leq 1} \leq \sup(\frac{||f(x)||}{||x||})_{0<||x|| \leq 1}$. ensuite on a :
$\sup(\frac{||f(x)||}{||x||})_{0<||x|| \leq 1} \leq \sup(\frac{||f(x)||}{||x||})_{x \neq 0}$. D'autre part nous avons : $\sup(\frac{||f(x)||}{||x||})_{x \neq 0} = \sup ||f(\frac{x}{||x||})||_{x \neq 0} \leq \sup(||f(x||)_{||x||=1}$

Théorème 5.11 *Si F est complet, alors $\mathcal{L}(E,F)$ est complet.*

Preuve. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}(E,F)$, alors $\forall\varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$,tq : $\forall m, n \geq n_0$, $||f_n - f_m|| < \varepsilon$, par suite on a : $||f_n(x) - f_m(x)|| \leq ||f_n - f_m||||x|| \leq \varepsilon||x||$,$\forall x \in E$, donc pour tout $x \in E$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans F qui est complet, alors pour tout $x \in E$, $f_n(x)$ converge dans F, posons $f(x) = \lim\limits_{n\mapsto+\infty} f_n(x)$. f est linéaire en effet : pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $f_n(\alpha x + \beta y) = \alpha f_n(x) + \beta f_n(y)$, en passant à la limite quand n tend vers l'infini on obtient donc $f(\alpha x+\beta y) = \alpha f(x)+\beta f(y)$. D'autre part on a : $||f_n(x) - f_m(x)|| \leq \varepsilon||x||$ pour tout $x \in E$, en faisant tendre m vers l'infini, on obtient alors $||f_n(x) - f(x)|| \leq \varepsilon||x||$, par suite pour tout $n \geq n_0$, $f_n - f$ est continue, il en résulte que $f = f_n - (f_n - f)$ est continue. D'après le fait que $||f_n(x) - f(x)|| \leq \varepsilon||x||$ pour tout $x \in E$, alors $||f_n - f|| < \varepsilon$, ce qui montre que $f_n \to^{\mathcal{L}(E,F)} f$.

5.3 Espaces normés de dimensions finies

Lemme 5.12 *Dans un e.v.n E de dimension finie, la boule unité fermée $B'(0,1)$ est compacte.*

Preuve. Considérons une base $(e_1, e_2, e_3, ..., e_n)$ de l'espace E et on lui assosie la norme N_∞ càd si on considère $x = \sum_{i=1}^{i=n} x_i e_i$, alors $N_\infty(x) = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|$ et $\varphi : \mathbb{K}^n \to E$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \mapsto \sum_{i=1}^{i=n} x_i e_i$.
L'application φ : $(\mathbb{K}^n, ||.||_\infty) \to (E, N_\infty)$. On a : φ est linéaire continue (car $N_\infty(\varphi(x)) = ||x||_\infty$ et de même pour φ^{-1}). On sait que dans $\mathbb{K}^n$ les compacts sont les fermés bornés, par suite la boule unité fermée dans $\mathbb{K}^n$ est un compact dans $\mathbb{K}^n$, or son image par φ ce n'est que la boule unité fermé dans E, donc elle est compact (l'image d'un compact est un compact par une fonction continue).

Lemme 5.13
1. *Pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{R}^k$ et $\mathbb{C}^k$ sont complets.*
2. *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriel normés de même dimension n et l'application linéaire $f : E \to F$ vérifiant $||f(x)-f(y)||_F = ||x-y||_E$ pour tout $x, y \in E$, alors si l'un de ces espaces est complet l'autre l'est aussi.*

Preuve.

1. Soit (x_n) une suite de Cauchy dans $\mathbb{K}^k$, alors la suite (x_n) est bornée dans $\mathbb{K}^k$, ce qui prouve l'existence d'une boule fermée $B'(a,r)$ tel que $(x_n) \subset B'(a,r)$, or la boule $B'(a,r)$ est un compact donc la suite (x_n) admet une valeur d'adhérence $b \in B'(a,r)$ et puisque (x_n) est de Cauchy alors elle converge vers b.

2. On remarque que f est injective et puisque E et F ont même dimension alors f est surjective, d'autre part f est continue et de même f^{-1} ce qui montre que f est un homéomorphisme d'où le résultat.

Théorème 5.14 *Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie, alors*

1. *Toutes les normes sur E sont équivalentes.*
2. *E est complet.*
3. *Toute partie fermée bornée est compacte.*

Preuve.1 Soit $(e_1, e_2, e_3, ..., e_n)$ une base de E, alors tout $x \in E$ s'écrit $x = \sum_{i=1}^{i=n} x_i e_i$, posons $N_\infty(x) = \max |x_i|$, N_∞ est une norme sur E. Soit N une norme qlq sur E, alors $N : (E, N_\infty) \to \mathbb{R}$ est continue (même unift continue) en effet :
Pour tout $x, y \in E$, $|N(x) - N(y)| \leq N(x-y)$, or $x - y = \sum_{i=1}^{i=n}(x_i - y_i)e_i$, donc $N(x-y) \leq \sum_{i=1}^{i=n} |x_i - y_i| N(e_i) \leq N_\infty(x-y).\sum_{i=1}^{i=n} N(e_i)$, par suite $N(x-y) \leq c.N_\infty(x-y)$, ce qui montre que $|N(x) - N(y)| \leq c.N_\infty(x-y)$, donc N est c-lipsh ce qui fait que N est unift continue sur E.
Soit $\varphi : (\mathbb{K}^n, ||.||_\infty) \to (E, N_\infty)$ définie par $\varphi(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{i=n} x_i e_i$, alors $N_\infty(\varphi(x)) = ||x||_\infty$, sachant que $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, donc φ est une isométrie bijective et par suite φ est un homéomorphisme. Soit $\Sigma = \{x \in E; N_\infty(x) = 1\}$, alors $\Sigma = \varphi(S)$ où $S = \{x \in \mathbb{K}^n, ||x||_\infty = 1\}$, or S est un compact, par suite Σ est un compact de (E, N_∞). Puisque $N : (E, N_\infty) \to \mathbb{R}$ est continue donc N est borné sur Σ et atteint ses bornes, par suite il existe $a > 0, b > 0$ de façons que $a \leq N(x) \leq b$ pour tout $x \in \Sigma$. Soit $x \in E$ et $x \neq 0$, alors $\frac{x}{N_\infty(x)} \in \Sigma$, donc $a \leq N(\frac{x}{N_\infty(x)}) \leq b$, d'où $aN_\infty(x) \leq N(x) \leq bN_\infty(x)$. Donc N et N_∞ sont équivalentes, si N' est une autre norme sur E, alors N' est équivalente N_∞, par suite N et N' sont équivalentes.
2 : Soit $\varphi : (\mathbb{K}^n, ||.||_\infty) \to (E, ||.||_\infty)$ est une isométrie bijective. Or $(\mathbb{K}^n, ||.||_\infty)$ est complet ce qui montre que E est complet.
3 : Soit K une partie fermée bornée dans l'espace E, donc il existe $r > 0$ et $a \in E$ tel que $K \subset B'(a, r)$, càd $K \subset a + rB'(0, 1)$ (on est dans un e.v.n), d'autre part nous avons $a+rB'(0, 1)$ est un compact $(x \to a+rx)$ est continue. Or K est une partie fermée dans un compact donc elle est compacte.

Proposition 5.15 *Soit E un e.v.n, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *E est de dimension finie.*
2. *La boule unité fermée $B'(0, 1)$ est compacte.*

Preuve. $\Rightarrow$, D'après le théorème ci-dessus.
$\Leftarrow$ Supposons que $B'(0,1)$ est compact, alors puisque $B'(0,1) \subset \cup B(a, \frac{1}{2})$, $a \in B'(0,1)$, il existe $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ de points de $B'(0,1)$ tq : $B'(0,1) \subset \cup_{i=1}^{i=n} B(a_i, \frac{1}{2})$. Soit F le sous espace engendré par $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$, on a : F est un epace fermé. Montrons que $E = F$. Supposons qu'il existe $a \in E \setminus F$, par suite $\alpha = d(a, F) > 0$ car $a \notin \overline{F} = F$. D'autre part nous avons $\alpha = \inf_{x\in F} ||a-x|| < \frac{3}{2}\alpha$, donc il existe $x \in F$ tq : $\alpha \leq ||a-x|| < \frac{3}{2}\alpha$. Par ailleurs on a : $y = \frac{a-x}{||a-x||} \in B'(0,1) \subset \cup_{i=1}^{i=n} B(a_i, \frac{1}{2})$, donc il existe i_0 tq :$y \in B(a_{i_0}, \frac{1}{2})$, càd $||y - a_{i_0}|| < \frac{1}{2}$, or $a = x + ||a-x||y = x + ||a-x||a_{i_0} + ||a-x||(y - a_{i_0})$ et $x + ||a-x||a_{i_0} \in F$, d'autre part nous avons :

$$[a - (x + ||a-x||a_{i_0})] = ||a-x||(y - a_{i_0}) = ||a-x||.|y - a_{i_0}|||,$$

par suite $\alpha \leq ||a-x||.||y - a_{i_0}|| < \frac{3}{2}\alpha\frac{1}{2} = \frac{3}{4}\alpha$, ce qui montre que $\alpha < \frac{3}{4}\alpha$ ce qui est absurde, d'où le résultat.

Théorème 5.16 *Soient E et F deux e.v.n, Si E est de dimension finie, alors toute application linéaire $f : E \to F$ est continue.*

Preuve. Soit $(e_1, e_2, e_3, ..., e_n)$ une base de E, pour $x = \sum_{i=1}^{i=n} x_i e_i$, on pose $N_\infty(x) = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|$, alors pour tout $x \in E$,

$$||f(x)|| = ||\sum_{i=1}^{i=n} x_i f(e_i)|| \leq \sum_{i=1}^{i=n} ||f(e_i)||. \max(||x_i||),$$

donc pour tout $x \in E$, on a : $||f(x)|| \leq k.N_\infty(x)$, par conséquent $f : (E, N_\infty) \to F$ est continue.

5.4 Exercices

Exercice 5.17 1. *Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ tq : $\alpha + \beta = 1$. Montrer que pour tout $u, v \in \mathbb{R}^+$, on a : $u^\alpha v^\beta \leq \alpha u + \beta v$.*

2. *Montrer que pour $x = (x_1, x_2, ..., x_n), y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$, on a : $\sum_{i=1}^{i=n} |x_i||y_i| \leq (\sum_{i=1}^{i=n} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}.(\sum_{i=1}^{i=n} |y_i|^q)^{\frac{1}{q}}$ sachant que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.*

3. *Déduire que $x \mapsto ||x||_p = (\sum_{i=1}^{i=n} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.*

Solution :

1. Soit $\varphi(x) = -\ln(x)$, on a : φ est convexe car $\varphi''(x) = \frac{1}{x^2} > 0$, par suite nous avons $\varphi(\alpha u + \beta v) \leq \alpha\varphi(u) + \beta\varphi(v)$ càd $\ln(\alpha u + \beta v) \geq \alpha \ln(u) + \beta \ln(v)$ ou encore $\ln(\alpha u + \beta v) \geq \ln(u^\alpha.v^\beta)$ ce qui donne $u^\alpha v^\beta \leq \alpha u + \beta v$.

2. Posons $u = \frac{|x_i|^p}{(\sum |x_i|^p)}$ et $v = \frac{|y_i|^q}{(\sum |y_i|^q)}$, $\alpha = \frac{1}{p}$, $\beta = \frac{1}{q}$. Nous avons donc :

$$u^\alpha v^\beta = \frac{|x_i y_i|}{(\sum |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}.(\sum |y_i|^q)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{1}{p}\frac{|x_i|^p}{(\sum |x_i|^p)} + \frac{1}{q}\frac{|y_i|^q}{(\sum |y_i|^q)}$$

Exercice 5.18 *Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{C}$. On désigne par : $B'(0,1) = \{x \in E; ||x|| \leq 1\}$, la boule unitée fermée de centre 0 et de rayon 1.*
Soit $F \subset E$ un sous espace vectoriel fermé de E. Pour $x \in E$, on pose : $d(x,F) = \inf\limits_{y \in F} ||x-y||$.

1. *Montrer que $\forall x \in E$, on a : $0 \leq d(x,F) \leq ||x||$.*
2. *Montrer que $d(x,F) = 0 \Leftrightarrow x \in F$.*
3. (a) *Montrer que $\forall x, x' \in E$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $y \in F$ on a :*

   $$d(\lambda x, F) = |\lambda| d(x,F),$$

   $$d(x-y, F) = d(x,F),$$

   (b) *Montrer que l'application $x \mapsto d(x,F)$ est uniformément continue dans E.*
4. (a) *Soit $x \in B'(0,1)$. On pose $\alpha = d(x,F)$ et on suppose que $\alpha > 0$, soit de plus $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $y \in F$ tel que : $\alpha \leq ||x-y|| < \alpha(1+\varepsilon)$.*

   (b) *Soit $x' = \dfrac{x-y}{||x-y||}$, montrer que $d(x',F) > \dfrac{1}{1+\varepsilon}$.*
5. *Montrer que si $F \neq E$, alors $\sup\limits_{x \in B'(0,1)} d(x,F) = 1$.*
6. *Montrer que si $F \neq E$ et E est de dimension finie, alors il existe $x_0 \in B'(0,1)$ tel que $d(x_0,F) = 1$.*

Solution :

1. On sait que $0 \leq d(x,F) \leq ||x-y||$, pour tout $y \in F$. Puisque F est un sous espace vectoriel de E, alors $0_E = 0_F = 0 \in F$ et donc $0 \leq d(x,F) \leq ||x-0|| = ||x||$, d'où le résultat.
2. On sait que $d(x,F) = 0 \Leftrightarrow x \in \overline{F} = F$ (F est un fermé), donc

   $$d(x,F) = 0 \Leftrightarrow x \in F.$$

3. (*a*) • pour $\lambda = 0$, nous avons : $\lambda x = 0$ et donc $d(\lambda x, F) = 0$, car $0 \in F$ d'autre part, $\inf\limits_{y \in F} ||0 - y|| = 0$, d'où le résultat.
   Si $\lambda \neq 0$, alors $d(\lambda x, F) = \inf\limits_{y \in F} ||\lambda x - y|| = \inf\limits_{\frac{y}{\lambda} \in F} ||\lambda(x - \frac{y}{\lambda})||$,
   posons : $\frac{y}{\lambda} = t \in F$($F$ est un sous espace vectoriel), nous obtenons donc $d(\lambda x, F) = |\lambda| \inf\limits_{t \in F} ||x - t|| = |\lambda| d(x, F)$.
   • Nous avons : $d(x - y, F) = \inf\limits_{z \in F} ||x - y - z|| = \inf\limits_{y+z \in F} ||x - (y + z)||$,
   posons : $y + z = t \in F$ (F s.e.v),
   par suite $d(x - y, F) = \inf\limits_{t \in F} ||x - t|| = d(x, F)$.
   (*b*) Considèrons l'application $f : E \to \mathbb{R}$ tq, $f(x) = d(x, F)$, nous avons : $|f(x) - f(y)| \leq ||x - y||$, ce qui montre que f est uniformément continue sur E.
4. (*a*) Soit $x \in B'(0, 1)$ et $d(x, F) = \alpha > 0$. Nous avons : $\alpha = \inf\limits_{t \in F} ||x - t||$ donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $y \in F$ tq :
   $$\alpha \leq ||x - y|| < \alpha + \alpha\varepsilon = \alpha(1 + \varepsilon).$$
   (*b*) Pour $x' = \frac{x-y}{||x-y||}$, d'aprés les questions précédentes, nous avons :
   $$d(x', F) = \frac{d(x, F)}{||x - y||} = \frac{\alpha}{||x - y||} > \frac{1}{1 + \varepsilon}.$$
5. On a : $F \neq E$, alors il existe $x_0 \in E$ non nul, tq $x_0 \in E$ et $x_0 \notin F$, et par suite posons : $x = \frac{x_0}{||x_0||} \in B'(0, 1)$ et nous posons : $d(x, F) = \alpha > 0$. On sait que $1 \geq d(x, F) > \frac{1}{1+\varepsilon}$ pour tout $x \in B'(0, 1)$ et pour tout $\varepsilon > 0$, maintenant passons à la borne supérieure, nous obtenons $1 \geq \sup\limits_{x \in B'(0,1)} d(x, F) \geq 1$ d'où $\sup\limits_{x \in B'(0,1)} d(x, F) = 1$.
6. Puisque E est de dimension finie suite à la question précédente, alors $\sup\limits_{x \in B'(0,1)} d(x, F) = 1$ et dans ce cas la boule $B'(0, 1)$ est compact donc la borne supérieure est atteinte càd il existe $x_0 \in B'(0, 1)$ vérifiant $d(x_0, F) = 1$.

Chapitre 6

Espaces de Hilbert

6.1 Définitions et propriétés

Dans toute la suite $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, ou $\mathbb{C}$.

Définition 6.1 Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel, une application $h : E \times E \to \mathbb{K}$ est un produit scalaire si pour tout $x, y, z \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ on a :

1. $h(x + y, z) = h(x, y) + h(y, z)$ et $h(\lambda x, y) = \lambda h(x, y)$.
2. $h(x, y + z) = h(x, y) + h(x, z)$ et $h(x, \lambda y) = \overline{\lambda} h(x, y)$.
3. $h(x, y) = \overline{h(y, x)}$.
4. $h(x, x) > 0$ pour tout $x \in E \setminus \{0\}$.

Notation Dans toute la suite, on adoptera la notation (x/y) ou $\langle x, y\rangle$ pour désigner un produit scalaire.
Pour tout $x \in E$, on a : $(x/x) \geq 0$, on pose $||x|| = (x/x)^{\frac{1}{2}}$.

Exemple 6.2 *$E = \mathbb{K}^n$, $n \geq 1$, pour $x = (x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$ et $y = (y_1, y_2, y_3, ..., y_n)$ on pose : $(x/y) = \sum_{i=1}^{i=n} x_i \overline{y_i}$, alors (x/y) est un produit scalaire sur $\mathbb{K}^n$.*

Définition 6.3 Tout espace vectoriel muni d'un produit scalaire est appelé espace préhilbertien.

Propriété 6.4 *Pour tout $x_1, x_2, ..., x_n; y_1, y_2, y_3, ..., y_n \in E$ et $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n; \beta_1, \beta_2, ..., \beta_n \in \mathbb{K}$. on a :*

1. $(\sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i x_i / \sum_{i=1}^{i=n} \beta_i y_i) = \sum_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq m} \alpha_i \overline{\beta_j} (x_i/y_j)$.
2. $\forall x, y \in E$, $||x + y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2 + 2.Re(x/y)$;
   $||x - y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2 - 2.Re(x/y)$.

3. *$\forall x, y \in E$, $||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2[||x||^2 + ||y||^2$.*
4. *Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, alors $||x+y||^2 - ||x-y||^2 = 4(x/y)$.*

Lemme 6.5 *(Lemme de la médiane) $\forall x, y, z \in E$, on a :*
$||x-z||^2 + ||x-y||^2 = 2||x-m||^2 + \frac{1}{2}||y-z||^2$ où $m = \frac{y+z}{2}$.

Preuve. On a : $\forall x, y \in E$, $||x||^2 + ||y||^2 = \frac{1}{2}[||x+y||^2 + ||x-y||^2]$.
Donc $\forall x, y, z \in E$, on a :$||x-y||^2 + ||x-z||^2 = \frac{1}{2}||2x-y-z||^2 + \frac{1}{2}||y-z||^2$, par suite on a : $||x-y||^2 + ||x-z||^2 = 2||m-x||^2 + \frac{1}{2}||y-z||^2$.

Théorème 6.6 *(Théorème de Pythagore)*
Soit E un espace préhilbertien et $x, y \in E$.
Si $(x/y) = 0$, alors $||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$.
Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, la réciproque est vraie.

Proposition 6.7 *Soit E un espace préhilbertien.*

1. *Pour tout $x, y \in E$, $|(x/y)| \leq ||x||.||y||$ (Inégalité de Cauchy-Scharz).*
2. *L'égalité a lieu si et seulement si x et y sont liées.*

Preuve. 1 : $\forall x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on pose :
$P(\lambda) = (\lambda x + /\lambda x + y) \geq 0$, alors $P(\lambda) = \lambda\overline{\lambda}||x||^2 + 2Re[\lambda(x/y)] + ||y||^2 \geq 0$.
Puisque $(x/y) \in \mathbb{C}$, alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$, de façon que $(x/y) = |(x/y)|e^{i\theta}$, en faisant $\lambda = re^{-i\theta}$ dans l'exprèssion de $P(\lambda)$, il vient que

$$P(re^{-i\theta}) = r^2||x||^2 + 2r|(x/y)| + ||y||^2 \geq 0.$$

Donc $P(re^{-i\theta})$ est un trinôme positif ou nul, donc son déscriminant est négatif ou nul, càd $\Delta' = |(x/y)|^2 - ||x||^2.||y||^2 \leq 0$, d'où le résultat.
2 Si x et y sont liées, alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tq : $x = \lambda y$ et par suite

$$|(x/y)| = |\lambda|(y/y) = |\lambda|(y/y)^{\frac{1}{2}}(y/y)^{\frac{1}{2}}$$

ce qui montre que :

$$|(x/y)| = [\lambda\overline{\lambda}(y/y)]^{\frac{1}{2}}.(y/y)^{\frac{1}{2}} = (\lambda y/\lambda y)^{\frac{1}{2}}.||y|| = ||x||.||y||.$$

Corollaire 6.8 *Soit E un espace préhilbertien.*

1. *Pour tout $x, y \in E$, $||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$.*
2. *L'égalité a lieu si et seulement si, il existe $\lambda \geq 0$ tq : $x = \lambda y$ ou $y = \lambda x$.*

Conséquences 1 : L'application $||.|| : E \to \mathbb{R}$, $x \mapsto ||x||$ est une norme.
2 : Tout espace préhilbertien est un e.v.n et par suite est un e.m.
3 : L'application $h : E \times E \to \mathbb{K}$, $(x, y/) \mapsto (x/y)$ est continue.

Définition 6.9 On appelle espace de Hilbert tout espace préhilbertien complet pour la norme associée au produit scalaire de E.

Exemple 6.10 *Tout espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire est un espace de Hilbert.*

6.2 Théorème de projection

Définition 6.11 *Soit (E, d) un e.m et F une partie non vide de E. Une projection d'un point $x \in E$ sur F est un point $y \in F$ vérifiant :*
$d(x, y) = d(x, F)$.

Théorème 6.12 *Soient E un espace préhilbertien et F une partie non vide convexe et complète de E, alors on a :*

1. *Tout $x \in E$ a une projection unique sur F, notée $P_F(x)$.*
2. *P_F est caractérisée par : $Re(x - P_F(x)/u - P_F(x)) \leq 0$, $\forall u \in F, x \in E$.*
3. *Pour tout $x, y \in E$, on a : $||P_F(x) - P_F(y)|| \leq ||x - y||$.*

Preuve.

1. Soient $x \in E$ et $\delta = d(x, F) = \inf_{y\in F} ||x - y||$, alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, il existe $y_n \in F$ tq : $\delta \leq ||x - y_n|| \leq \delta + \frac{1}{n}$. Montrone que la suite (y_n) est de cauchy.
On a :
$$||x - y_n||^2 + ||x - y_{n+p}||^2 = 2||x - \frac{y_n + y_{n+p}}{2}||^2 + \frac{1}{2}||y_n - y_{n+p}||^2,$$
donc $||y_n - y_{n+p}||^2 = 2||x - y_n||^2 + 2||x - y_{n+p}||^2 - 4||x - \frac{y_n+y_{n+p}}{2}||^2$. Puisque F est convexe, alors $\frac{y_n+y_{n+p}}{2} \in F$, d'où $||y_n - y_{n+p}||^2 \leq 2(\delta + \frac{1}{n})^2 + 2(\delta + \frac{1}{n+p})^2 - 4\delta^2$, par suite $||y_n - y_{n+p}||^2 \leq \frac{4}{n^2} + \frac{8\delta}{n}$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} ||y_n - y_{n+p}|| = 0$, ce qui montre que (y_n) est une suite de cauchy dans F qui est complet, alors $y_n \to y \in F$, d'autre part on a : $\delta \leq ||x - y_n|| \leq \delta + \frac{1}{n}$, on passe à la limite on obtient donc $||x - y|| = \delta = d(x, F)$. Montrons l'unicité de la projection. Supposons l'excitence d'un autre $y' \in F$ vérifiant $||x - y'|| = \delta = d(x, F)$. On sait que $||y - y'||^2 = 2(||x - y||^2 + ||x - y'||^2 - 4||x - \frac{y+y'}{2}||^2 = 4(\delta^2 - ||x - \frac{y+y'}{2}||^2) \leq 0$, ce qui montre que $y = y'$.

2. Supposons que $Re(x - P_F(x)/u - P_F(x)) \leq 0$, montrons que $P_F(x)$ est la projection de x sur F. On a : $||x - u||^2 = (x - u/x - u) = (x - P_F(x) + P_F(x) - u/x - P_F(x) + P_F(x) - u)$ donc $||x - u||^2 = ||u - P_F(x)||^2 + ||x - P_F(x)||^2 - 2Re(u - P_F(x)/x - P_F(x))$, ce qui montre que $||x - u||^2 \geq ||x - P_F(x)||^2$ d'où le résultat. Inversement, soit $P_F(x)$ la projection de x sur F et montrons que $Re(x - P_F(x)/u - P_F(x)) \leq 0$? Pour tout $u \in F$ et tout $\lambda \in]0, 1]$, $\lambda u + (1 - \lambda)P_F(x) \in F$, donc $||x - P_F(x) - \lambda(u - P_F(x)||^2 \geq ||x - P_F(x)||^2$ ou encore $\lambda^2||u - P_F(x)||^2 -$

$2Re(x-P_F(x)/u-P_F(x)) \geq 0$, le résultat désiré s'en déduit, en divisant les membres par λ puis en faisant tendre λ vers 0.
3 : Soient $x, y \in E$, montrons que $||P_F(x) - P_F(y)|| \leq ||x - y||$. On sait que $Re(x - P_F(x)/P_F(y) - P_F(x)) \leq 0$ et $Re(y - P_F(y)/P_F(x) - P_F(y)) \leq 0$ donc $Re(P_F(y) - y/P_F(y) - P_F(x)) \leq 0$ par suite on a : $Re(x-y-(P_F(x)-P_F(y))/P_F(y)-P_F(x)) \leq 0$, donc $Re(x-y/P_F(y)-P_F(x)) + ||P_F(y) - P_F(x)||^2 \leq 0$, par suite nous avons :

$$||P_F(y)-P_F(x)||^2 \leq Re(y-x/P_F(y)-P_F(x)) \leq ||y-x||.||P_F(y)-P_F(x)||,$$

d'où $||P_F(x) - P_F(y)|| \leq ||x - y||$.

Corollaire 6.13 *Soient E un espace de Hilbert et F une partie non vide convexe fermée de E. Alors pour tout $x \in E$ a une projection unique sur F.*

Preuve. E est complet, F est fermée donc F est complète.

Définition 6.14 Soit E un espace préhilbertien.

1. Deux éléments x et y sont dite orthogonaux si $(x/y) = 0$.
2. Deux parties non vides A et B de E sont dites orthogonales, si $(a/b) = 0$, pour tout $a \in A$ et $b \in B$.
3. On appelle orthogonal d'une partie A de E et on note $A^\perp$ l'ensemble $A^\perp = \{x \in E, (x/a) = 0, \forall a \in A\}$.

Propriété 6.15
1. *Si A et B sont orthogonales, alors $A \cap B = \varnothing$ ou $A \cap B = \{0_E\}$.*
2. *$A^\perp$ est un sous espace vectoriel fermé de E.*
3. *Si $A \subset B$, alors $B^\perp \subset A^\perp$.*
4. *Si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille de partie non vides de E, alors $(\bigsqcup A_i)^\perp = \bigcap A_i^\perp$.*

Preuve.

1. On a : $A \cap B$ est une partie de E, alors $A \cap B = \varnothing$ ou $A \cap B \neq \varnothing$, si $A \cap B \neq \varnothing$, soit $x \in A \cap B$ on a donc $(x/x) = 0$ par suite $x = 0_E$.
2. $A^\perp = \{x \in E; (x/a) = 0\} = \bigcap_{a\in A}\{x \in E; (x/a) = 0\}$. Or $\{x \in E; (x/a) = 0\} = \ker(\varphi_a)$, avec $\varphi_a : E \to \mathbb{K}$, $x \mapsto (x/a)$, φ_a est linéaire continue et $|(x/a)| \leq ||x||||a||$. Donc $\ker(\varphi_a)$ est un fermé de E, par conséquent $A^\perp = \bigcap \ker(\varphi_a)$ est fermé.
3. Soit $x \in B^\perp$ donc $(x/b) = 0$ par suite $(x/a) = 0$ pour tout $a \in A$, d'où le résultat.

4. $\forall i \in I$, $A_i \subset \bigsqcup A_i$, donc $(\bigsqcup A_i)^\perp \subset A_i^\perp$, $\forall i \in I$, ce qui montre que $(\bigsqcup A_i)^\perp \subset \bigcap A_i^\perp$. D'autre part si $x \in \bigcap A_i^\perp$, alors $\forall i \in I$, $x \in A_i^\perp$, par suite $\forall i \in I$, $\forall a_i \in A_i$, $(x/a_i) = 0$, donc si $a \in \bigsqcup A_i$, il existe $i_0 \in I$,tq $a \in A_{i_0}$ d'où $(x/a) = 0$.

Théorème 6.16 *Soient E un espace préhilbertien et F un sous espace vectoriel complet de E, alors on a :*

1. *Tout $x \in E$ a une projection unique $P_F(x)$ sur F.*
2. *Cette projection est caractérisée par la relation : $(x - P_F(x)/u) = 0$ pour tout $u \in F$.*
3. *L'application $P_F : E \to E$, $x \mapsto P_F(x)$ est linéaire continue de norme 1 si $F \neq \{0\}$.*
4. $\ker(P_F) = F^\perp$, $F^{\perp\perp} = F$ *;* $E = F \oplus F^\perp$ *et pour tout $x \in E$, on a :* $||x||^2 = ||P_F(x)||^2 + ||x - P_F(x)||^2$.

Preuve.

1. Puisque F est un ss.e.v de E, alors F est convexe, par suite F est une partie de E convexe, complète et donc pour tout $x \in E$ admet une projection unique $P_F(x)$.
2. On sait que $Re(x - P_F(x)/u - P_F(x)) \leq 0$, $\forall u \in F$ et puisque $P_F(x) \in F$, alors posons $u - P_F(x) = v$ cela revient à dire que $\forall v \in F$. Montrons que $(x - P_F(x)/v) = 0$, $\forall v \in F$. On a : $Re(x - P_F(x)/v) \leq 0$ et par suite remplaçons v par $-v$ ce qui donne $Re(x - P_F(x)/v) = 0$, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ c'est fini, si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors remplaçons v par iv on obtient donc $Im(x - P_F(x)/v) = 0$ et donc $(x - P_F(x)/v) = 0$.
3. On sait que $||P_F(x) - P_F(y)|| \leq ||x - y||$ donc P_F est continue. La linéarité de P_F est une conséquence immédiate de la caractérisation de P_F. On a : $||P_F(x) - P_F(y)|| \leq ||x - y||$, $\forall x, y \in E$, donc pour $y = 0$, on obtient $||P_F(x)|| \leq ||x||$, ce qui montre que $||P_F|| \leq 1$, d'autre part pour $u \in F \backslash \{0\}$, on a : $P_F(u) = u$, conclusion $||P_F|| = 1$.
4. On sait que $(x - P_F(x)/u) = 0$, pour tout $u \in F$, donc $x \in \ker(P_F) \Leftrightarrow P_F(x) = 0$ donc $(x/u) = 0$, pour tout $u \in F$ càd $x \in F^\perp$, la réciproque est évidente.
   On a : $F \subset F^{\perp\perp}$, montrons que $F^{\perp\perp} \subset F$?, soit $x \in F^{\perp\perp}$, donc $(x/y) = 0$ pour tout $y \in F^\perp$, or $x - P_F(x) \in F^\perp$ donc $(x/x - P_F(x)) = 0$, d'autre part nous avons $P_F(x) \in F$, alors $(P_F(x)/x - P_F(x)) = 0$, par suite on a : $(x - P_F(x)/x - P_F(x)) = 0$, ce qui donne $||x - P_F(x)|| = 0$, conclusion $x = P_F(x)$.
   Maintenant montrons que $E = F \oplus F^\perp$. On sait que $F \cap F^\perp = \{0\}$. Soit $x \in E$, $x = P_F(x) + x - P_F(x) \in F + F^\perp$, donc $E = F \oplus F^\perp$.

Remarque 6.17 Si E est un espace de Hilbert et F est un ss.e.v fermé de E tous les résultats du théorème ci-dessus subsistent.

Corollaire 6.18 *Si E est un espace de Hilbert et F un ss.e.v de E, alors $\overline{F} = F^{\perp\perp}$.*

Preuve. Puisque $F \subset F^{\perp\perp}$ et $F^{\perp\perp}$ est un ss.e.v fermé, alors $\overline{F} \subset F^{\perp\perp}$. D'autre part nous avons $\overline{F}$ est un ss.e.v fermé et $\overline{F}^{\perp\perp} = \overline{F}$, or $F \subset \overline{F}$ donc $F^{\perp\perp} \subset \overline{F}^{\perp\perp} = \overline{F}$ càd $F^{\perp\perp} \subset \overline{F}$, d'où le résultat.

Dual d'un espace de Hilbert :

Théorème 6.19 *(Théorème de représentation)*

1. *Soit E un espace préhilbertien, alors pour tout $a \in E$, l'application $\varphi_a : E \to \mathbb{K}$, $x \mapsto (x/a)$ est une forme linéaire continue de norme $||a||$.*
2. *Si E est un espace de Hilbert, alors pour toute forme linéaire continue sur E, il existe un $a \in E$ unique telque $u = \varphi_a$ et l'application :*
   $\varphi : E \to E'$, $a \mapsto \varphi_a$ est une isometrie bijective semilinéaire.

Preuve.

1. Soient $a \in E \in$ et $\varphi_a : E \to \mathbb{K}$, $x \mapsto (x/a)$. φ_a est linéaire et continue en affet :
   $(|\varphi_a(x)| \leq ||a||.||x||$ donc $||\varphi_a|| \leq ||a||$ d'autre part nous avons $\varphi_a(a) = ||a||.||a||$, ce qui montre que $||\varphi_a|| = ||a||$.
2. Soit $\varphi : E \to E' = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$, $a \mapsto \varphi_a$. On a : φ est injective, continue, montrons que φ est surjective. Soient $u \in E'$ et $F = \ker(u)$ est un fermé de E. Soit $b \notin F$, alors $F^{\perp} = b.\mathbb{K}$, pour tout $x \in E$, s'écrit de manière unique $x = y + \lambda b$. $u(x) = \lambda u(b) = \lambda.(b/b)\frac{u(b)}{||b||^2} = u(b)\frac{(\lambda b/b)}{||b||^2}$,
   par suite $u(x) = u(b)\frac{(y+\lambda b/b)}{||b||^2} = u(b)\frac{(x/b)}{||b||^2} = (x/\frac{\overline{u(b)}b}{||b||^2}) = (x/a) = \varphi_a(x)$.
   avec $a = \frac{\overline{u(b)}b}{||b||^2}$.

Chapitre 7

Espaces fonctionnelles

7.1 Théorèmes de Banach

Théorème de Baire

Définition 7.1 Un e.t E est dit de Baire, s'il est séparé et s'il vérifie l'une des propriétés équivalentes suivantes :

1. Pour toute suite (F_n) de fermés de E d'intérieurs vides, la réunion F des F_n est d'intérieur vide.
2. Pour toute suite (U_n) d'ouverts de E denses dans E, l'intersection U des U_n est dense dans E.

Montrons l'équivalence entre les propriétés ci-dessus. $1 \Rightarrow 2$: Soit (U_n) une suite d'ouvert de E de façon que $\overline{U_n} = E$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit $F_n = \complement_E^{U_n}$, alors $\mathring{F}_n = \complement_E^{\overline{U_n}} = \varnothing$. Par 1, on a donc $\cup \mathring{F}_n = \varnothing = \complement_E^{\overline{\cap U_n}}$, ce qui donne $\overline{\cap U_n} = E$.
$2 \Rightarrow 1$: Soit (F_n) une suite de fermés de E vérifiant $\mathring{F}_n = \varnothing$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit $U_n = \complement_E^{F_n}$, alors $\overline{U_n} = \complement_E^{\mathring{F}_n} = E$ et par 2, nous avons donc $\overline{\cap U_n} = \complement_E^{\cup \mathring{F}_n} = E$, ce qui prouve que $\cup \mathring{F}_n = \varnothing$.

7.2 Espaces fonctionnelles

Soient E et F deux ensembles non vides, on note $\mathcal{F}(E, F)$, l'ensemble des applications de E dans F.

Définition 7.2 *On appelle espace fonctionnelle tout sous ensemble de $\mathcal{F}(E, F)$ muni d'une topologie.*

Remarque 7.3 1. *Si F est un $\mathbb{K}$ e.v, alors $\mathcal{F}(E,F)$ muni des lois suivantes*

   (a) *Pour tout $x \in E$, $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, où $f, g \in \mathcal{F}(E,F)$.*

   (b) *Pour tout $(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E$, $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$*

   est un $\mathbb{K}$ e.v. En particulier $\mathcal{F}(E,\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$ e.v.

2. *Supposons que (F,d) soit un espace métrique. Pour $f, g \in \mathcal{F}(E,F)$, on pose : $\delta(f,g) = \sup_{x\in E}(f(x), g(x))$, alors l'application δ vérifie :*

   (a) *$f = g \Rightarrow \delta(f,g) = 0$.*

   (b) *$\delta(f,g) = \delta(g,f)$.*

   (c) *$\delta(f,h) \leq \delta(f,g) + \delta(g,h)$, pour tout $f, g, h \in \mathcal{F}(E,F)$.*

On dit que δ est un écart.

Remarque 7.4 *δ n'est pas en generale une distance car on peut avoir $\delta(f,g) = +\infty$. Cependant δ permet de définir une une topologie sur $\mathcal{F}(E,F)$ comme suit : Pour $f \in \mathcal{F}(E,F)$ et $r > 0$, on appelle boule ouverte de centre f et de rayon r ; $B(f,r) = \{g \in \mathcal{F}(E,F); \delta(f,g) < r\}$*
$B'(f,r) = \{g \in \mathcal{F}(E,F); \delta(f,g) \leq r\}$ c'est la boule fermée de centre f et de rayon r.
Un ouvert de $\mathcal{F}(E,F)$ pour l'écart δ est une réunion qlq de boules ouvertes. La topologie ainsi définie est appelé toplogie de la convergence uniforme.

Définition 7.5 *Soient E un ensemble non vide et (F,d) un e.m, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{F}(E,F)$ et $f \in \mathcal{F}(E,F)$.*

1. *On dit que f_n converge simplement vers f quand $n \to +\infty$, si $(\forall x \in E)$, $(\forall \epsilon > 0)$, $\exists n_0 = n_0(x,\epsilon) \in \mathbb{N}$ tq : $\forall n \geq n_0$, $d(f_n(x), f(x)) < \epsilon$.*
2. *On dit que f_n converge uniformément vers f quand $n \to +\infty$, si $(\forall \epsilon > 0)$, $\exists n_0 = n(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tq : $\forall n \geq n_0$, $d(f_n(x), f(x)) < \epsilon$, $\forall x \in E$.*

Remarque 7.6 *Dire que (f_n) converge uniformément vers f équivaut à dire que (f_n) converge vers f dans $\mathcal{F}(E,F)$ pour la topologie de la convergence uniforme.*

7.2.1 Espaces $\mathcal{B}(E,F)$, $\mathcal{C}(E,F)$ et $\mathcal{C}_\infty(E,F)$

Définition 7.7 *Soient E un ensemble et (F,d) un e.m*

1. *$\mathcal{B}(E,F) = \{f \in \mathcal{F}(E,F); f$ est bornée$\}$.*
2. *$\mathcal{C}(E,F)\{f \in \mathcal{F}(E,F); f$ est continue$\}$.*
3. *$\mathcal{C}_\infty(E,F) = \{f \in \mathcal{F}(E,F); f$ est continue bornée$\}$.*

Proposition 7.8 *L'application $\delta : \mathcal{B}(E,F) \times \mathcal{B}(E,F) \to \mathbb{R}^+$, définie par $\delta(f,g) = \sup_{x\in E} d(f(x),g(x))$ est une distance. De plus si F est complet, alors $\mathcal{B}(E,F)$ est complet pour δ.*

Preuve δ est une distance (évident).
Soit (f_n) est une suite de cauchy dans $\mathcal{B}(E,F)$. Soit $\epsilon > 0$, $\exists n_0; m,n \geq n_0$ tq : $d(f_m(x),f_n(x)) < \epsilon$. Donc la suite $f_n(x)$ est une suite de cauchy dans F qui est complet, d'où pour tout $x \in E$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$ existe, soit $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$. On a : f est une application car F est un e.m, d'autre part dans l'égalité $d(f_m(x),f_n(x)) < \epsilon$ faisons tendre $m \to +\infty$ on obtient donc $d(f(x),f_n(x)) \leq \epsilon$, pour $n = n_0$ on a : $d(f_{n_0}(x),f(x)) \leq \epsilon$, or $f_{n_0} \in \mathcal{B}(E,F)$ donc $f_{n_0}(E) \subset F$ est borné et par suite il existe $a \in F$ et $r > 0$ tq : $f_{n_0}(E) \subset B'(a,r)$ càd $\forall x \in E, f_{n_0}(x) \in B'(a,r)$ par suite $d(f_{n_0}(x),f(x)) \leq r$ or $d(f(x),a) \leq d(f(x),f_{n_0}(x)) + d(f_{n_0}(x),a)$ càd $d(f(x),a) \leq r+\epsilon$, pour tout $x \in E$, ceci implique que $f(x) \in B'(a,r+\epsilon)$ donc $f(E) \subset B'(a,r+\epsilon)$ ce qui montre que $f \in \mathcal{B}(E,F)$.
On sait que $\forall x \in E, d(f_n(x),f(x)) \leq \epsilon$ par suite $\forall\epsilon > 0, \exists n_0, \forall n \geq n_0, d(f_n(x),f(x)) \leq \epsilon$ et donc $\sup d(f_n(x),f(x)) \leq \epsilon$ ce qui prouve que $\delta(f_n,f) \leq \epsilon$, conclusion f_n converge uniformément vers f.

Corollaire 7.9 *Si E est un e.t et F un e.m complet, alors $\mathcal{C}_\infty(E,F)$ est un sous espace fermé (complet) de $\mathcal{B}(E,F)$ (Toute limite uniforme d'une suite d'application borné continue est borné et continue.)*

Preuve Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{C}_\infty(E,F)$ et $f_n \to f$ uniformément ; on a donc $f \in \mathcal{B}(E,F)$ (proposition ci-dessus). D'autre part pour $a \in E$ on a : pour tout $x \in E$, $d(f(x),f(a)) \leq d(f(x),f_n(x)) + d(f_n(x),f_n(a)) + d(f_n(a),f(a))$. Puisque $f_n \to f$ uniformément, alors $(\forall\epsilon > 0)$, $(\exists n_0 \in \mathbb{N})$ tq $\forall n \geq n_0$ on a : $d(f_n(x),f(x)) < \epsilon$, par suite nous avons : $d(f(x),f(a)) < 3\epsilon$, d'où le resultat.

Condition suffisante pour qu'une convergence simple soit uniforme.

Proposition 7.10 *Soit E un e.t compact, F un e.m, $f_n, f : E \to F$ des applications continues telleque pour tout $x \in E$, la suite $d(f_n(x),f(x))$ soit décroissante et converge vers 0, alors la suite f_n converge uniformément vers f sur E. En particulier si $F = \mathbb{R}$ et (f_n) est monotone et converge vers une application continue f, alors f_n converge uniformément vers f(Dini).*

Corollaire 7.11 *Il existe une suite croissante de polynôme P_n, $n \in \mathbb{N}$, qui converge uniformément vers $t \mapsto \sqrt{t}$ sur $[0,1]$.*

On définit les P_n par recurrence : $P_0(t) = 0$ et $P_{n+1}(t) = P_n(t) + \frac{1}{2}(t - P_n^2(t))$ pour $n \geq 0$. On montre alors que P_n est croissante sur $[0,1]$, $P_n(t) \leq \sqrt{t}$ et $P_n(t) \to \sqrt{t}$ simplement.

7.2.2 Théorème de Stone-Weierstrass

Définition 7.12 *Une algèbre sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{K}$ e.v A muni d'une multiplication $\times$, tq : $A \times A \to A$, $(x,y) \mapsto x \times y$, bilinéaire associative et telleque, pour tout $(\lambda, x, y) \in \mathbb{K} \times A \times A$ on ait : $\lambda.(x \times y) = (\lambda.x) \times y = x \times (\lambda.y)$. De plus si la multiplication est commutative (resp admet un élément neutre) on dit que A est commutative (resp unitaire).*

Remarque 7.13
1. *Une algèbre A muni d'une norme $||.||$ qui vérifie $||x \times y|| \leq ||x||.||y||$ pour tout $x, y \in A$ est appelé une algèbre normée.*
2. *Une algèbre normée complète est appelée une algèbre de Banach.*
3. *Une sous algèbre d'une algèbre A est une partie B de A vérifiant : $x + y \in B$, $x \times y \in B$ et $\lambda.x$ pour tout $x, y \in B$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.*
4. *Si A est une algèbre normée, alors l'application $f : A \times A \to A$, $(x,y) \mapsto x \times y$ est continue de norme ≤ 1.*

Proposition 7.14 *Si A est une algèbre normée sur $\mathbb{K}$ et B est une sous algèbre de A alors $\overline{B}$ est une sous algèbre de A.*

Définition 7.15 *On dit qu'une partie A de $\mathcal{C}(E, \mathbb{R})$ est réticulé si pour tout $f, g \in A$ on a : $\sup(f,g) \in A$ et $\inf(f,g) \in A$.*

Lemme 7.16 *Soit A une partie réticulé de $\mathcal{C}(E, \mathbb{R})$ et $f \in \mathcal{C}(E, \mathbb{R})$, alors $f \in \overline{A}$ ssi $\forall x, y \in \in E$ et pour tout $\epsilon > 0$, il existe $g \in A$ tellque $|f(x) - g(x)| < \epsilon$ et $|f(y) - g(y)| < \epsilon$.*

Lemme 7.17 *Toute sous algèbre fermé de $\mathcal{C}(E, \mathbb{R})$ est réticulée. En particulier si A est une sous algèbre de $\mathcal{C}(E, \mathbb{R})$, alors $\overline{A}$ est réticulé.*

Preuve Soit A une algèbre de $\mathcal{C}(E, \mathbb{R})$, alors $\overline{A}$ est une sous algèbre fermé de $\mathcal{C}(E, \mathbb{R})$, donc réticulé par la première partie du lemme. Montrons que si A est réticulé alors $\overline{A}$ est réticulé. Il s'agit d'établir que pour tout $f, g \in A$, $\inf(f,g) \in A$ et $\sup(f,g) \in A$. On sait que $\inf(f,g) = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|)$ et $\sup(f,g) = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|)$, il suffit de montrer que $|f - g| \in A$ càd $|f| \in A$ pour tout $f \in A$. Soit $f \in A$ et $\alpha = \sup_{x \in E} |f(x)|$. Si $f = 0$, alors $|f| = 0 \in A$. Si $f \neq 0$,alors $\alpha > 0$, donc pour tout $x \in E$, $|f(x)| \leq \alpha$, par suite pour tout $x \in E$ on a : $0 \leq \frac{f^2(x)}{\alpha^2} \leq 1$. soit (P_n) une suite croissante de polynômes qui converge vers $\sqrt{t}$ sur $[0,1]$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n : x \mapsto P_n(\frac{f^2(x)}{\alpha^2}) \in A$ car $P_n(\frac{f^2(x)}{\alpha^2}) \in A = \sum_{i=1}^{i=n} (\frac{f^2(x)}{\alpha^2})^i a_i$. Soit $\epsilon > 0$, il existe n_0, pour $n \geq n_0$ on a : $|u_n(x) - \frac{|f(x)|}{\alpha}| < \epsilon$ pour tout $x \in E$. Par suite on a :$\sup_{x \in E} |u_n(x) - \frac{|f(x)|}{\alpha}| < \epsilon$ ce qui montre que $u_n \to \frac{|f|}{\alpha} \in \overline{A} = A$. Or $|f| = \alpha.\frac{|f|}{\alpha} \in A$, d'où le resultat.

Définition 7.18 *On dit qu'une partie A de $\mathcal{C}(E,\mathbb{R})$ sépare les points de E, si pour tout $x, y \in E$ tq : $x \neq y$, il existe $f \in A$; $f(x) \neq f(y)$.*

Théorème 7.19 *Soit A une sous algèbre de $\mathcal{C}(E,\mathbb{R})$, tellque*

1. *A sépare les points de E.*
2. *Pour tout $x \in E$, il existe $f \in A$; $f(x) \neq 0$. Alors A est dense dans $\mathcal{C}(E,\mathbb{R})$ ($\overline{A} = \mathcal{C}(E,\mathbb{R})$.)*

Lemme 7.20 *Avec les mêmes notation et hypothèses que le théorème ci-dessus on a : pour tout $x, y \in E$ tq : $x \neq y$, $x \neq y$ et pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, il existe $f \in \overline{A}$ tq : $f(x) = \alpha$ et $f(y) = \beta$.*

Preuve : Pour tout $x, y \in E$, il existe $g \in A$ tq ; $g(x) \neq g(y)$ et $g(x) \neq 0$, $g(y) \neq 0$, en effet : Puisque A sépare les points de E, il existe $g_1(x) \neq g_1(y)$. Si $g_1(x) \neq 0$ et $g_1(y) \neq 0$ on prend $g = g_1$. Si $g_1(x) = 0$ donc $g_1(y) \neq 0$, d'après 2, il existe $g_2 \in A$ tq ; $g_2(x) \neq 0$. Soit $g = g_1 + \epsilon g_2$, pour ϵ suffisament petit $g(x) \neq g(y)$, $g(x) \neq 0$, $g(y) \neq 0$ ($g(x) = \epsilon g_2(x)$; $g(y) = g_1(y) + \epsilon g_2(y)$. Soit $f = a_1 g + a_2 g^2$ existe-t-il $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ tq : $f(x) = a_1 g(x) + a_2 g^2(x) = \alpha$ et $a_1 g(y) + a_2 g^2(y) = \beta$? Considerons le système $S = \begin{cases} a_1 g(x) + a_2 g^2(x) = \alpha, \\ a_1 g(y) + a_2 g^2(y) = \beta \end{cases}$. On $\det(S) = g(x)g(y)(g(x) - g(y)) \neq 0$, donc $f \in A$ (car A ssalgèbre et $g \in A$) ; $f(x) = \alpha$, $g(y) = \beta$.

Démonstration du théorème : Puisque A est une ss-algèbre donc $\overline{A}$ est une algèbre fermée et par conséquent $\overline{A}$ est réticulé.

Soit $f \in \mathcal{C}(E,\mathbb{R})$ et soient $x, y \in E$, $\alpha = f(x) + \frac{\epsilon}{2}$, $\beta = f(y) + \frac{\epsilon}{2}$, donc d'après le lemme, il existe $g \in \overline{A}$ tq ; $g(x) = f(x) + \frac{\epsilon}{2}$ et $g(y) = f(y) + \frac{\epsilon}{2}$, ce qui veut dire que $|g(x) - f(x)| < \epsilon$ et $|g(y) - f(y)| < \epsilon$, cequi montre que $f \in \overline{\overline{A}} = \overline{A}$, donc $\mathcal{C}(E,\mathbb{R}) \subset \overline{A}$, par suite on a :$\mathcal{C}(E,\mathbb{R}) = \overline{A}$.